Zakres rozszerzony

3

Marcin Kurczab
Elżbieta Kurczab
Elżbieta Świda

Matematyka

Podręcznik do liceów i techników
klasa 3.

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

2012
nowa podstawa programowa

OE

Zakres rozszerzony

3

Marcin Kurczab
Elżbieta Kurczab
Elżbieta Świda

Matematyka

Podręcznik do liceów i techników
klasa 3.

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

Oficyna Edukacyjna * Krzysztof Pazdro

Podręcznik dopuszczony do użytku szkolnego przez ministra właściwego do spraw oświaty i wychowania i wpisany do wykazu podręczników przeznaczonych do kształcenia ogólnego do nauczania matematyki, na podstawie opinii rzeczoznawców: dr. Macieja Bryńskiego, prof. dr. hab. Tadeusza Stanisza, dr Ewy Ogłozy.
Zakres kształcenia: rozszerzony
Etap edukacyjny: IV
Typ szkoły: szkoły ponadgimnazjalne
Rok dopuszczenia: 2014

Numer dopuszczenia/Numer ewidencyjny w wykazie: 563/3/2014

Projekt okładki
Stefan Drewiczewski, FPstudio

Rysunki i łamanie
Eryk Krawczyński

Redaktor
Jan Baranowski

Druk i oprawa
DRUK-SERWIS Sp. z o.o.
ul. Tysiąclecia 8b, 06-400 Ciechanów

Wydanie II, Warszawa 2015 r.

Oficyna Edukacyjna * Krzysztof Pazdro Sp. z o.o.
ul. Kościańska 4, 01–695 Warszawa
www.pazdro.com.pl
e-mail: pazdro@pazdro.com.pl

ISBN 978-83-7594-091-6

Spis treści

Wstęp

Książka zamyka serię podręczników dla uczniów szkół średnich przygotowujących się do matury w zakresie rozszerzonym.

W pierwszym rozdziale przypominamy i utrwalamy wiadomości dotyczące działań na potęgach i logarytmach. Wprowadzamy pojęcie funkcji wykładniczej i funkcji logarytmicznej. Uczymy rozwiązywać równania oraz nierówności wykładnicze i logarytmiczne. Pokazujemy ich zastosowanie w rozwiązywaniu zadań, w tym również zadań praktycznych. Rozdział drugi poświęcony jest elementom analizy matematycznej. Omawiamy w nim pojęcie granicy funkcji i własności funkcji ciągłych. Następnie zajmujemy się pochodną (głównie wielomianów i funkcji wymiernych) i zastosowaniem pochodnej w rozwiązywaniu zadań. Do zastosowań pochodnej powracamy jeszcze w rozdziale dotyczącym geometrii analitycznej i w rozdziale dotyczącym geometrii przestrzennej. W trzecim rozdziale porządkujemy i uzupełniamy wiedzę dotyczącą geometrii analitycznej na płaszczyźnie. Poruszamy m.in. zagadnienia dotyczące wektorów, równania prostej i równania okręgu. Kolejny rozdział składa się z dwóch zasadniczych części. W pierwszej omawiamy metody zliczania obiektów w prostych i bardziej złożonych sytuacjach kombinatorycznych. W drugiej – zajmujemy się rachunkiem prawdopodobieństwa, w tym prawdopodobieństwem warunkowym i niezależnością zdarzeń. Następnie omawiamy główne parametry statystyczne oraz ich interpretację. Ostatni rozdział zawiera usystematyzowanie i uzupełnienie wiedzy dotyczącej figur przestrzennych. Przy okazji przypominamy wiele informacji z geometrii płaskiej i trygonometrii.

Każdy temat kończą zadania do samodzielnego rozwiązania (zatytułowane *Sprawdź, czy rozumiesz*).

Na końcu podręcznika znajdują się odpowiedzi do większości zadań oraz skorowidz ważniejszych terminów występujących w podręczniku.

Autorzy

1. Funkcja wykładnicza i funkcja logarytmiczna

Potęga o wykładniku rzeczywistym – powtórzenie

W klasie pierwszej poznałeś definicję potęgi o podstawie różnej od zera i wykładniku całkowitym ujemnym:

- $a^{-n} \underset{\text{z def.}}{=} \frac{1}{a^n}$, gdzie $n \in \boldsymbol{N}_+$ i $a \in \boldsymbol{R} - \{0\}$.

Wiesz, że można określić potęgę o dowolnym wykładniku wymiernym:

- $a^{\frac{m}{n}} \underset{\text{z def.}}{=} \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$, gdzie $a \geqslant 0$, $n \in \boldsymbol{N} - \{0, 1\}$, $m \in \boldsymbol{N}_+$
- $a^{-\frac{m}{n}} \underset{\text{z def.}}{=} \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}$, gdzie $a > 0$, $n \in \boldsymbol{N} - \{0, 1\}$, $m \in \boldsymbol{N}_+$.

Dowiedziałeś się również, że istnieje potęga o podstawie dodatniej i wykładniku rzeczywistym oraz prawdziwe jest następujące twierdzenie dotyczące działań na potęgach.

- Jeśli a, b są dodatnimi liczbami rzeczywistymi, x, y – dowolnymi liczbami rzeczywistymi, to:
  1) $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$
  2) $a^x : a^y = a^{x-y}$
  3) $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$
  4) $a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x$
  5) $\frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x$

Poniższe przykłady pomogą Ci powtórzyć i utrwalić wcześniej zdobytą wiedzę.

Przykład 1.

Obliczymy, ile procent liczby $\frac{15 \cdot 5^9 + 2 \cdot 5^{10}}{625 \cdot 5^6}$ stanowi liczba $\frac{3^{-7} + \frac{2}{3} \cdot 3^{-6}}{3^{-5}}$.

Oznaczmy pierwszą liczbę przez a, drugą – przez b. Mamy:

$$a = \frac{15 \cdot 5^9 + 2 \cdot 5^{10}}{625 \cdot 5^6} = \frac{3 \cdot 5 \cdot 5^9 + 2 \cdot 5^{10}}{5^4 \cdot 5^6} = \frac{3 \cdot 5^{10} + 2 \cdot 5^{10}}{5^{10}} = \frac{5 \cdot 5^{10}}{5^{10}} = 5$$

$$b = \frac{3^{-7} + \frac{2}{3} \cdot 3^{-6}}{3^{-5}} = \frac{3^{-6} \cdot \left(3^{-1} + \frac{2}{3}\right)}{3^{-5}} = \frac{3^{-6} \cdot \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\right)}{3^{-5}} = \frac{3^{-6}}{3^{-5}} = 3^{-1} = \frac{1}{3}$$

Otrzymaliśmy:

$$a = 5 \quad \text{oraz} \quad b = \frac{1}{3},$$

więc

$$\frac{b}{a} = \frac{\frac{1}{3}}{5} = \frac{1}{15} \qquad \frac{1}{15} = \frac{100}{15}\% = 6\frac{2}{3}\%.$$

Liczba b stanowi $6\frac{2}{3}\%$ liczby a.

Przykład 2.

Obliczymy wartość wyrażenia $9^{\frac{1}{2}} \cdot \left(3\frac{3}{8}\right)^{-\frac{1}{3}} - 81^{\frac{3}{4}}$.

$$9^{\frac{1}{2}} \cdot \left(3\frac{3}{8}\right)^{-\frac{1}{3}} - 81^{\frac{3}{4}} = \sqrt{9} \cdot \left(\frac{27}{8}\right)^{-\frac{1}{3}} - \left(\sqrt[4]{81}\right)^3 = 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{8}{27}} - 3^3 = 3 \cdot \frac{2}{3} - 27 = -25$$

Wartość wyrażenia jest równa -25.

Przykład 3.

Zapiszemy podane wyrażenia w postaci potęg, których podstawą jest liczba naturalna:

a) $5 \cdot 3^{\frac{7}{2}} - 6 \cdot 3^{\frac{5}{2}}$ b) $\sqrt{5\sqrt[3]{5\sqrt{5}}}$

Ad a) Zauważ, że $6 = 2 \cdot 3$, zatem

$$5 \cdot 3^{\frac{7}{2}} - 6 \cdot 3^{\frac{5}{2}} = 5 \cdot 3^{\frac{7}{2}} - 2 \cdot 3 \cdot 3^{\frac{5}{2}} = 5 \cdot 3^{\frac{7}{2}} - 2 \cdot 3^{\frac{5}{2}+1} = 5 \cdot 3^{\frac{7}{2}} - 2 \cdot 3^{\frac{7}{2}}$$

Korzystamy z prawa rozdzielności mnożenia względem odejmowania i wyłączamy wspólny czynnik poza nawias:

$$5 \cdot 3^{\frac{7}{2}} - 2 \cdot 3^{\frac{7}{2}} = 3^{\frac{7}{2}} \cdot (5 - 2) = 3^{\frac{7}{2}} \cdot 3 = 3^{\frac{9}{2}}$$

Ad b) Dane wyrażenie zapisujemy za pomocą potęg:

$$\sqrt{5\sqrt[3]{5\sqrt{5}}} = \left[5\left(5 \cdot 5^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}\right]^{\frac{1}{2}} = \left[5\left(5^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}\right]^{\frac{1}{2}} = \left(5 \cdot 5^{\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(5 \cdot 5^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(5^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} = 5^{\frac{3}{4}}$$

Przykład 4.

Wiadomo, że 2,51 jest przybliżeniem liczby $10^{0,4}$ z zaokrągleniem do dwóch miejsc po przecinku. Wyznaczymy przybliżenie liczby $10^{\frac{3}{5}}$ z zaokrągleniem do dwóch miejsc po przecinku.

Zauważamy, że:

$$10^{-\frac{3}{5}} = 10^{0,4} : 10^{1}, \text{ zatem}$$

$$10^{\frac{3}{5}} \approx 2,51 : 10 = 0,251 \approx 0,25$$

Liczba $10^{-\frac{3}{5}}$ jest równa w przybliżeniu 0,25.

Przykład 5.

Porównamy liczby:

a) $3^{12} - 2^{18}$ oraz $3^{6} + 2^{9}$

b) $\left(4^{\sqrt{3}}\right)^{\frac{\sqrt{3}}{2}}$ oraz $\left[\left(3-\sqrt{2}\right)^{\sqrt{3}} \cdot \left(3+\sqrt{2}\right)^{\sqrt{3}}\right]^{\sqrt{3}}$

c) $3^{\sqrt{2}}$ oraz $2^{\sqrt{3}}$.

Ad a) Zapisujemy liczbę $3^{12} - 2^{18}$ za pomocą liczby $3^{6} + 2^{9}$, korzystając ze wzoru na potęgę potęgi i wzoru skróconego mnożenia na różnicę kwadratów. Otrzymujemy:

$$3^{12} - 2^{18} = (3^{6})^{2} - (2^{9})^{2} = (3^{6} - 2^{9})(3^{6} + 2^{9})$$

Teraz wystarczy oszacować wartość wyrażenia $3^{6} - 2^{9}$.

Wyrażenie $3^{6} - 2^{9}$ zapisujemy w postaci różnicy sześcianów i stosujemy wzór skróconego mnożenia $a^{3} - b^{3} = (a-b)(a^{2} + ab + b^{2})$. Mamy:

$$3^{6} - 2^{9} = (3^{2})^{3} - (2^{3})^{3} = 9^{3} - 8^{3} = (9-8) \cdot (9^{2} + 9 \cdot 8 + 8^{2}) = 9^{2} + 9 \cdot 8 + 8^{2} > 1$$

Zatem liczba $3^{12} - 2^{18}$ jest większa od liczby $3^{6} + 2^{9}$.

Ad b) Najpierw pierwszą liczbę zapisujemy w postaci potęgi o podstawie 2.

$$\left(4^{\sqrt{3}}\right)^{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 4^{\frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}{2}} = 4^{\frac{3}{2}} = 2^{3}$$

Teraz drugą liczbę zapisujemy w prostszej postaci, korzystając ze wzoru na iloczyn potęg o tych samych wykładnikach oraz ze wzoru skróconego mnożenia na różnicę kwadratów.

$$\left[\left(3-\sqrt{2}\right)^{\sqrt{3}} \cdot \left(3+\sqrt{2}\right)^{\sqrt{3}}\right]^{\sqrt{3}} = \left\{\left[\left(3-\sqrt{2}\right) \cdot \left(3+\sqrt{2}\right)\right]^{\sqrt{3}}\right\}^{\sqrt{3}} =$$

$$= \left[3^{2} - \left(\sqrt{2}\right)^{2}\right]^{3} = (9-2)^{3} = 7^{3}$$

$$2^{3} < 7^{3}$$

Liczba $\left[\left(3-\sqrt{2}\right)^{\sqrt{3}}\cdot\left(3+\sqrt{2}\right)^{\sqrt{3}}\right]^{\sqrt{3}}$ jest większa od liczby $\left(4^{\sqrt{3}}\right)^{\frac{\sqrt{3}}{2}}$.

Ad c) Liczby $3^{\sqrt{2}}$ i $2^{\sqrt{3}}$ są dodatnie. Podnosimy obie liczby do potęgi $\sqrt{3}$ i otrzymujemy:

$$\left(3^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{3}}=3^{\sqrt{6}} \quad \text{oraz} \quad \left(2^{\sqrt{3}}\right)^{\sqrt{3}}=2^3=8$$

Wiadomo, że

$\sqrt{6}>2$ (bo $\sqrt{6}>\sqrt{4}$), więc $3^{\sqrt{6}}>9$, zatem $\left(3^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{3}}>\left(2^{\sqrt{3}}\right)^{\sqrt{3}}$, czyli

$$3^{\sqrt{2}}>2^{\sqrt{3}}$$

Liczba $3^{\sqrt{2}}$ jest większa od liczby $2^{\sqrt{3}}$.

Przykład 6.

Wykażemy, że liczba $\left(4-2\cdot 3^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}-\left(4+2\cdot 3^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}$ jest liczbą całkowitą.

Zamieniamy potęgi na pierwiastki, wówczas dana liczba ma postać

$$\sqrt{4-2\sqrt{3}}-\sqrt{4+2\sqrt{3}}$$

Zauważmy, że jest to liczba ujemna, bo

$$\sqrt{4-2\sqrt{3}}<\sqrt{4+2\sqrt{3}}$$

Oznaczmy daną liczbę przez x i obliczmy kwadrat tej liczby x, korzystając ze wzoru skróconego mnożenia $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$. Mamy:

$$x^2=\left(\sqrt{4-2\sqrt{3}}-\sqrt{4+2\sqrt{3}}\right)^2=$$

$$=\left(\sqrt{4-2\sqrt{3}}\right)^2-2\sqrt{4-2\sqrt{3}}\cdot\sqrt{4+2\sqrt{3}}+\left(\sqrt{4+2\sqrt{3}}\right)^2=$$

$$=4-2\sqrt{3}-2\cdot\sqrt{\left(4-2\sqrt{3}\right)\left(4+2\sqrt{3}\right)}+4+2\sqrt{3}=$$

$$=8-2\sqrt{4^2-\left(2\sqrt{3}\right)^2}=8-2\sqrt{16-12}=8-2\sqrt{4}=8-4=4$$

Otrzymaliśmy, że $x^2=4$ i $x<0$, więc $x=-2$.

Liczba $\left(4-2\cdot 3^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}-\left(4+2\cdot 3^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}$ jest równa -2, jest więc liczbą całkowitą.

Przykład 7.

Udowodnimy, że liczba $\sqrt[3]{9+\sqrt{80}}+\sqrt[3]{9-\sqrt{80}}$ jest równa 3.

Oznaczamy daną liczbę jako x i otrzymujemy równanie:

$$x=\sqrt[3]{9+\sqrt{80}}+\sqrt[3]{9-\sqrt{80}}$$

Podnosimy obie strony równania do sześcianu (po prawej stronie stosujemy wzór skróconego mnożenia $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$).

$$x^3=\left(\sqrt[3]{9+\sqrt{80}}+\sqrt[3]{9-\sqrt{80}}\right)^3$$

$$x^3=9+\sqrt{80}+3\cdot\sqrt[3]{\left(9+\sqrt{80}\right)^2}\cdot\sqrt[3]{9-\sqrt{80}}+3\cdot\sqrt[3]{9+\sqrt{80}}\cdot\sqrt[3]{\left(9-\sqrt{80}\right)^2}+9-\sqrt{80}$$

Następnie korzystamy z prawa działań na pierwiastkach $\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[3]{b}=\sqrt[3]{ab}$ i otrzymujemy:

$$x^3=18+3\sqrt[3]{\left(9+\sqrt{80}\right)^2\left(9-\sqrt{80}\right)}+3\sqrt[3]{\left(9+\sqrt{80}\right)\left(9-\sqrt{80}\right)^2}$$

Zauważ, że wyrażenia podpierwiastkowe możemy zapisać w prostszej postaci, korzystając ze wzoru skróconego mnożenia na różnicę kwadratów:

$$\left(9+\sqrt{80}\right)^2\left(9-\sqrt{80}\right)=\left(9+\sqrt{80}\right)\left(9+\sqrt{80}\right)\left(9-\sqrt{80}\right)=\left(9+\sqrt{80}\right)(81-80)=9+\sqrt{80}$$

Podobnie można stwierdzić, że $\left(9+\sqrt{80}\right)\left(9-\sqrt{80}\right)^2=9-\sqrt{80}$ (sprawdź!).
Otrzymujemy równanie:

$$x^3=18+3\sqrt[3]{9+\sqrt{80}}+3\sqrt[3]{9-\sqrt{80}}$$

$$x^3=18+3\left(\sqrt[3]{9+\sqrt{80}}+\sqrt[3]{9-\sqrt{80}}\right)$$

Ale $\sqrt[3]{9+\sqrt{80}}+\sqrt[3]{9-\sqrt{80}}=x$, więc równanie ma postać $x^3=18+3x$, czyli

$$x^3-3x-18=0$$

Lewą stronę równania rozkładamy na czynniki metodą grupowania wyrazów. Mamy:

$$x^3-9x+6x-18=0$$

$$x(x^2-9)+6(x-3)=0$$

$$x(x-3)(x+3)+6(x-3)=0$$

$$(x-3)(x^2+3x+6)=0,\quad \text{stąd}$$

$$x-3=0\quad\text{lub}\quad x^2+3x+6=0$$

$$x=3\qquad(\Delta<0-\text{równanie sprzeczne})$$

Jedynym rozwiązaniem otrzymanego równania jest liczba 3.

Zatem liczba mająca postać $\sqrt[3]{9+\sqrt{80}}+\sqrt[3]{9-\sqrt{80}}$ jest równa 3, co kończy dowód.

Przykład 8.

Doprowadzimy wyrażenie $\left(\frac{4}{x-27}-\frac{x^{\frac{1}{3}}-3}{x^{\frac{2}{3}}+3x^{\frac{1}{3}}+9}\right)\cdot\frac{x-27}{x^{\frac{1}{3}}-1}$ do najprostszej postaci.

Dziedziną wyrażenia jest zbiór $\langle 0, 1) \cup (1, 27) \cup (27, +\infty)$. Najpierw wykonujemy odejmowanie ułamków w nawiasie. Ponieważ ułamki mają różne mianowniki, należy sprowadzić je do wspólnego mianownika. Zauważ, że wspólnym mianownikiem tych ułamków jest $x - 27$, bowiem

$$x-27=\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^3-3^3=\left(x^{\frac{1}{3}}-3\right)\left(x^{\frac{2}{3}}+3x^{\frac{1}{3}}+9\right)$$

Mnożymy licznik i mianownik odjemnika przez $x^{\frac{1}{3}}-3$ i otrzymujemy:

$$\left(\frac{4}{x-27}-\frac{x^{\frac{1}{3}}-3}{x^{\frac{2}{3}}+3x^{\frac{1}{3}}+9}\right)\cdot\frac{x-27}{x^{\frac{1}{3}}-1}=\left(\frac{4}{x-27}-\frac{\left(x^{\frac{1}{3}}-3\right)^2}{x-27}\right)\cdot\frac{x-27}{x^{\frac{1}{3}}-1}=$$

$$=\frac{4-\left(x^{\frac{1}{3}}-3\right)^2}{x-27}\cdot\frac{x-27}{x^{\frac{1}{3}}-1}=\frac{4-\left(x^{\frac{1}{3}}-3\right)^2}{x^{\frac{1}{3}}-1}=\frac{2^2-\left(x^{\frac{1}{3}}-3\right)^2}{x^{\frac{1}{3}}-1}=$$

$$=\frac{\left(2-x^{\frac{1}{3}}+3\right)\left(2+x^{\frac{1}{3}}-3\right)}{x^{\frac{1}{3}}-1}=\frac{\left(5-x^{\frac{1}{3}}\right)\left(x^{\frac{1}{3}}-1\right)}{x^{\frac{1}{3}}-1}=5-x^{\frac{1}{3}}$$

Wyrażenie to po uproszczeniu ma postać $5-\sqrt[3]{x}$, o ile $x \in \boldsymbol{R}_+ - \{1, 27\}$.

Sprawdź, czy rozumiesz

1. Oblicz wartość wyrażenia $\left[\left(\frac{5}{7}\right)^{-3}\right]^0+3\cdot 4^{-\frac{3}{2}}+64^{\frac{4}{3}}-(-2)^3$.
2. Przedstaw liczbę $\sqrt[3]{81\sqrt[4]{27}}$ w postaci potęgi o podstawie 3 i wykładniku wymiernym.
3. Porównaj liczby $a=\left(3^{-\frac{1}{2}}+1\right)^{-2}$ oraz $b=\frac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$.
4. Wykaż, że liczba $\left(6-20^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}-\left(6+20^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}$ jest liczbą całkowitą.
5. Wykaż, że $\sqrt[3]{38+\sqrt{1445}}+\sqrt[3]{38-\sqrt{1445}}=4$.

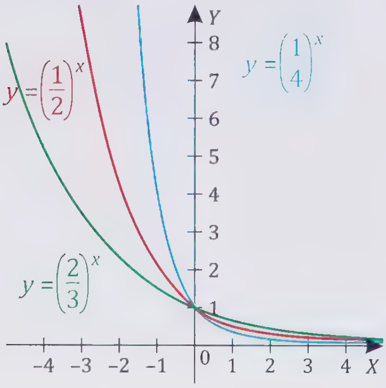
Funkcja wykładnicza i jej własności

Wiesz, że można obliczyć potęgę o dodatniej podstawie i dowolnym wykładniku rzeczywistym. Zatem dla liczby dodatniej a ($a > 0$) i dowolnej liczby rzeczywistej x ($x \in \boldsymbol{R}$) istnieje liczba a^x. Ta wiedza pozwala wprowadzić określenie nowej funkcji zwanej funkcją wykładniczą.

Definicja 1.
Funkcją wykładniczą nazywamy funkcję, którą można opisać wzorem $y = a^x$, gdzie $x \in \boldsymbol{R}$ oraz a jest ustaloną liczbą rzeczywistą dodatnią ($a > 0$).

Rozważmy trzy przypadki ze względu na podstawę potęgi.

I przypadek $a \in (0, 1)$



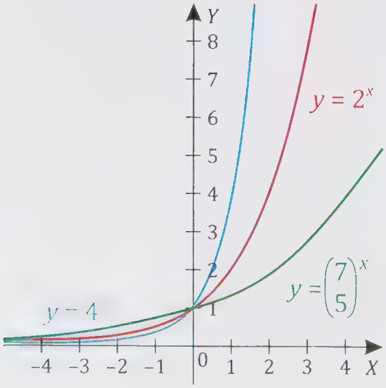
Przykłady funkcji wykładniczych:

$$y = \left(\frac{1}{4}\right)^x \quad y = \left(\frac{1}{2}\right)^x \quad y = \left(\frac{2}{3}\right)^x$$

Wykresy tych funkcji zostały przedstawione na rysunku obok.

II przypadek $a = 1$
Jeśli $a = 1$, to otrzymujemy wzór $y = 1^x$, zatem $y = 1$ (funkcja stała).

III przypadek $a \in (1, +\infty)$



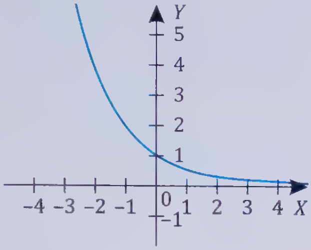
Przykłady funkcji wykładniczych:

$$y = 4^x \quad y = 2^x \quad y = \left(\frac{7}{5}\right)^x$$

Wykresy tych funkcji zostały przedstawione na rysunku obok.

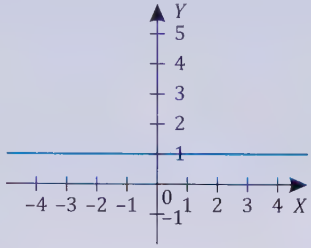
Podsumujemy nasze spostrzeżenia.

I. $f(x) = a^x$, $a \in (0, 1)$



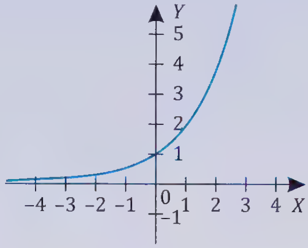
Wykresem funkcji jest krzywa wykładnicza.

II. $f(x) = a^x$, $a = 1$



Wykresem funkcji jest prosta.

III. $f(x) = a^x$, $a \in (1, +\infty)$



Wykresem funkcji jest krzywa wykładnicza.

- Dziedziną funkcji wykładniczej jest zbiór liczb rzeczywistych, $D = \boldsymbol{R}$.
- Wykres funkcji wykładniczej ma z osią OY jeden punkt wspólny o współrzędnych $(0, 1)$.
- Funkcja wykładnicza nie ma miejsc zerowych.
- Funkcja wykładnicza przyjmuje wartości dodatnie dla każdej liczby rzeczywistej x, czyli $\bigwedge_{x \in \boldsymbol{R}} a^x > 0$.

Jeśli $a \in (0, 1)$, to $ZW = (0, +\infty)$.	Jeśli $a = 1$, to $ZW = \{1\}$.	Jeśli $a \in (1, +\infty)$, to $ZW = (0, +\infty)$.

- Funkcja wykładnicza o podstawie a należącej do sumy przedziałów $(0, 1) \cup (1, +\infty)$ jest różnowartościowa, to znaczy, że przyjmuje ona każdą wartość (dodatnią) tylko jeden raz; funkcja wykładnicza o podstawie 1 nie jest różnowartościowa.
- Funkcja wykładnicza jest monotoniczna.

Jeśli $a \in (0, 1)$, to funkcja jest malejąca.	Jeśli $a = 1$, to funkcja jest stała.	Jeśli $a \in (1, +\infty)$, to funkcja jest rosnąca.

Udowodnimy twierdzenie.

Twierdzenie 1.
Krzywe wykładnicze o równaniach $y = a^x$ oraz $y = \left(\frac{1}{a}\right)^x$, gdzie $a \in \boldsymbol{R}_+ - \{1\}$, są symetryczne względem osi OY.

Założenie: $f(x) = a^x$, $g(x) = \left(\frac{1}{a}\right)^x$, $x \in \boldsymbol{R}$, $a \in \boldsymbol{R}_+ - \{1\}$

Teza: wykresy funkcji f i g są symetryczne względem osi OY

Dowód:
Przekształcając wykres funkcji $f(x) = a^x$ przez symetrię osiową względem osi OY, otrzymujemy wykres funkcji $y = f(-x)$. Zatem

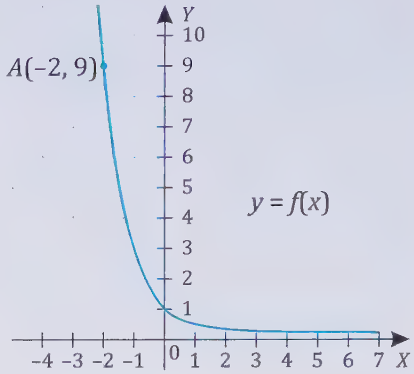
$$y = f(-x) = a^{-x} = (a^{-1})^x = \left(\frac{1}{a}\right)^x = g(x),$$ co kończy dowód.

Przykład 1.

Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji wykładniczej f. Do wykresu funkcji należy punkt $A(-2, 9)$.

a) Wyznaczymy wzór funkcji f.

b) Obliczymy wartość funkcji g, gdzie $g(x) = f(-x)$, dla argumentu $-0{,}5$.



Ad a) Szukamy wzoru mającego postać $y = a^x$, gdzie $a > 0$. Ponieważ do wykresu funkcji należy punkt $A(-2, 9)$, więc

$$9 = a^{-2}, \text{ skąd } \frac{1}{a^2} = 9, \text{ czyli } a^2 = \frac{1}{9}, \text{ zatem}$$

$$a = -\frac{1}{3} \lor a = \frac{1}{3}$$

Tylko liczba $\frac{1}{3}$ spełnia warunek z definicji funkcji wykładniczej $\left(\frac{1}{3} > 0\right)$.

Wzór funkcji wykładniczej f jest następujący: $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$, gdzie $x \in \boldsymbol{R}$.

Ad b) Mamy: $g(x) = 3^x$. Wartość funkcji g dla argumentu $-0{,}5$ jest równa:

$$g(-0{,}5) = 3^{-0{,}5} = 3^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Dla argumentu $-0{,}5$ funkcja g przyjmuje wartość $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Przykład 2.

Uporządkujemy w kolejności rosnącej liczby: $5^{\sqrt{3}}, 5^{\pi}, 5^{3{,}1}, 5^{-\sqrt{2}}, 5^{\sqrt{6}}$.

Korzystamy z faktu, że funkcja wykładnicza o podstawie 5 jest rosnąca, zatem dla większego argumentu przyjmuje większą wartość.

Ponieważ $-\sqrt{2} < \sqrt{3} < \sqrt{6} < 3{,}1 < \pi$, więc

$$5^{-\sqrt{2}} < 5^{\sqrt{3}} < 5^{\sqrt{6}} < 5^{3{,}1} < 5^{\pi}$$

Ostatecznie otrzymujemy rozwiązanie: $5^{-\sqrt{2}}, 5^{\sqrt{3}}, 5^{\sqrt{6}}, 5^{3{,}1}, 5^{\pi}$.

Przykład 3.

Dana jest funkcja wykładnicza $f(x) = a^x$, $a > 0$, $x \in \mathbf{R}$. Wykażemy, że jeśli argumenty $x_1, x_2, x_3, \ldots$ tworzą ciąg arytmetyczny, to wartości funkcji f dla tych argumentów tworzą ciąg geometryczny.

Założenie: $f(x) = a^x$, $a > 0$, $x \in \mathbf{R}$
$(x_1, x_2, x_3, \ldots)$ – ciąg arytmetyczny

Teza: $(f(x_1), f(x_2), f(x_3), \ldots)$ – ciąg geometryczny

Dowód: Z założenia ciąg $(x_1, x_2, x_3, \ldots)$ jest ciągiem arytmetycznym, więc

$$\bigwedge_{n \in \mathbf{N}_+ - \{1\}} x_n = \frac{x_{n-1} + x_{n+1}}{2}, \text{ skąd}$$

$$2x_n = x_{n-1} + x_{n+1}$$

Zatem

$$\bigwedge_{n \in \mathbf{N}_+ - \{1\}} a^{2x_n} = a^{x_{n-1} + x_{n+1}}$$

Korzystając z praw działań na potęgach, powyższą równość możemy zapisać w postaci:

$$\bigwedge_{n \in \mathbf{N}_+ - \{1\}} \left(a^{x_n}\right)^2 = a^{x_{n-1}} \cdot a^{x_{n+1}},$$

co znaczy, że ciąg

$$(a^{x_1}, a^{x_2}, a^{x_3}, \ldots),$$

czyli ciąg

$$(f(x_1), f(x_2), f(x_3), \ldots)$$

jest ciągiem geometrycznym.

Przykład 4.

Wyznaczymy zbiór wartości funkcji $y = f(x)$, jeśli:

a) $f(x) = -9^x - 2 \cdot 3^x + 8$, $x \in \mathbf{R}$

b) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2 - 4x}$, $x \in \left\langle 1, 4\frac{1}{2} \right\rangle$

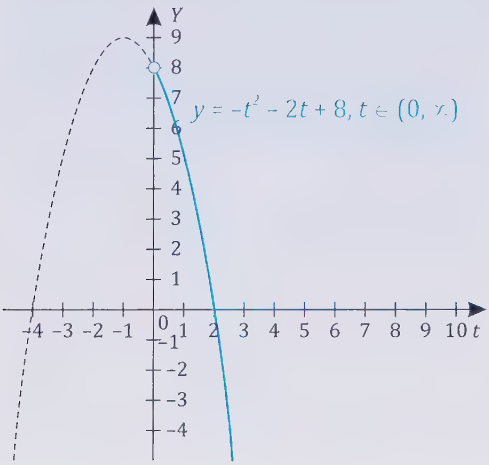
Ad a) Korzystając z praw działań na potęgach, wzór funkcji $f(x) = -9^x - 2 \cdot 3^x + 8$ możemy zapisać w postaci

$$f(x) = -(3^x)^2 - 2 \cdot 3^x + 8$$

Aby wyznaczyć zbiór wartości funkcji f, wystarczy określić, jakie wartości przyjmuje wyrażenie

$$-t^2 - 2t + 8, \text{ gdzie } t = 3^x \text{ i } x \in \mathbf{R}$$

Wiemy, że dla każdej liczby rzeczywistej funkcja $y = 3^x$ przyjmuje wartości dodatnie, więc $t \in (0, +\infty)$. Wystarczy zatem rozważyć funkcję $g(t) = -t^2 - 2t + 8$, gdzie $t \in (0, +\infty)$, i wyznaczyć zbiór wartości tej funkcji.



Rysunek obok przedstawia szkic wykresu funkcji g (wykonaj odpowiednie obliczenia). Na jego podstawie można stwierdzić, że zbiorem wartości funkcji g jest przedział

$$(-\infty, 8).$$

Z tego wynika, że zbiorem wartości funkcji

$$f(x) = -9^x - 2 \cdot 3^x + 8$$

jest przedział $(-\infty, 8)$.

Ad b) Aby określić zbiór wartości funkcji $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-4x}$, $x \in \left\langle 1, 4\frac{1}{2} \right\rangle$, najpierw ustalimy, jakie wartości może przyjmować wykładnik $x^2 - 4x$, gdzie $x \in \left\langle 1, 4\frac{1}{2} \right\rangle$.

Rozważmy funkcję $y = x^2 - 4x$, gdzie $x \in \left\langle 1, 4\frac{1}{2} \right\rangle$. Wyznaczymy największą i najmniejszą wartość tej funkcji. Mamy:

- dla argumentu 1 funkcja $y = x^2 - 4x$ przyjmuje wartość -3;
- dla argumentu $4\frac{1}{2}$ funkcja $y = x^2 - 4x$ przyjmuje wartość $\frac{9}{4}$;
- $x_w = 2$, $\quad 2 \in \left\langle 1, 4\frac{1}{2} \right\rangle$, dla argumentu 2 funkcja $y = x^2 - 4x$ przyjmuje wartość -4 (x_w to odcięta wierzchołka paraboli będącej wykresem funkcji kwadratowej $y = x^2 - 4x$).

Z naszych obliczeń wynika, że wyrażenie $x^2 - 4x$ w przedziale $\left\langle 1, 4\frac{1}{2} \right\rangle$ przyjmuje wartości ze zbioru $\left\langle -4, \frac{9}{4} \right\rangle$.

Rozważmy funkcję

$$g(t) = \left(\frac{1}{2}\right)^t, \text{ gdzie } t \in \left\langle -4, \frac{9}{4} \right\rangle$$

Zbiór wartości funkcji g jest równy zbiorowi wartości funkcji f. Funkcja g jest funkcją wykładniczą malejącą w zbiorze, w którym jest określona. Zatem dla najmniejszego argumentu przyjmuje największą wartość, zaś dla największego argumentu – wartość najmniejszą.

Funkcja $g(t) = \left(\frac{1}{2}\right)^t$ przyjmuje największą wartość dla argumentu -4:

$$g(-4) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-4} = 2^4 = 16$$

Najmniejszą wartość funkcja ta przyjmuje dla argumentu $\frac{9}{4}$:

$$g\left(\frac{9}{4}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{9}{4}} = \sqrt[4]{\left(\frac{1}{2}\right)^9} = \frac{1}{\sqrt[4]{2^8 \cdot 2}} = \frac{1}{4\sqrt[4]{2}} = \frac{\sqrt[4]{8}}{8}$$

Zbiorem wartości funkcji $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2\ 4x}$, gdzie $x \in \left\langle 1, 4\frac{1}{2}\right\rangle$, jest przedział $\left\langle \frac{\sqrt[4]{8}}{8}, 16\right\rangle$.

Sprawdź, czy rozumiesz

1. Napisz wzór funkcji wykładniczej f, wiedząc, że do jej wykresu należy punkt $A(-4,\ 16)$. Oblicz wartość funkcji f dla argumentu $-0{,}75$. Omów własności funkcji f.

2. Uporządkuj w kolejności rosnącej liczby k, l, m, n, jeśli:

   $k = \left(2\sqrt{5}\right)^{3\sqrt{2}}$ $\quad l = \left(2\sqrt{5}\right)^{\frac{1}{\sqrt{2}}}$ $\quad m = \left(2\sqrt{5}\right)^{1+\sqrt{3}}$ $\quad n = \left(2\sqrt{5}\right)^{\pi}$

3. Wywnioskuj na podstawie poniższych równości, czy liczba x jest dodatnia, czy ujemna, jeśli:

   a) $(0{,}8)^x = \frac{1}{3}$ b) $(2{,}7)^x = \frac{3}{4}$ c) $\left(\frac{2}{9}\right)^x = 6$ d) $\left(3\frac{1}{3}\right)^x = 15$

4. Wykaż, że funkcja $f(x) = \frac{7^{2x} - 1}{7^{x+1}}$ jest nieparzysta.

5. Funkcja określona wzorem $f(x) = 25^x + 25^{-x}$ przyjmuje dla pewnego argumentu x_0 wartość równą 34. Jaką wartość dla tego argumentu przyjmuje funkcja $g(x) = 5^x + 5^{-x}$?

6. Wyznacz zbiór wartości funkcji określonej wzorem:

   a) $f(x) = 49^x - 7^x - 6$, gdzie $x \in \boldsymbol{R}$

   b) $f(x) = \left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^{x^2+2x-4}$, gdzie $x \in \langle 0, 2\rangle$

Przekształcenia wykresu funkcji wykładniczej. Rozwiązywanie zadań z zastosowaniem wykresów funkcji wykładniczych

Przykład 1.

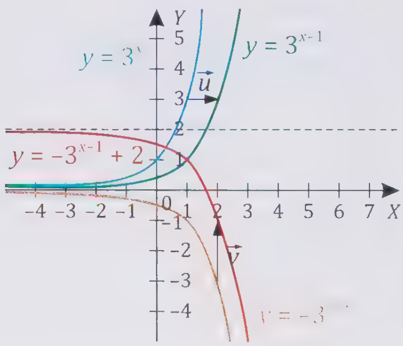
Naszkicujemy wykres funkcji $y = -3^{x-1} + 2$, $x \in \boldsymbol{R}$.

I sposób

Aby naszkicować wykres funkcji $y = -3^{x-1} + 2$, $x \in \boldsymbol{R}$, wystarczy wykonać następujące przekształcenia wykresu funkcji $f(x) = 3^x$, $x \in \boldsymbol{R}$:

1) $g(x) = 3^{x-1}$, gdzie $g(x) = f(x-1)$ $\left(T_{\vec{u}=[1,\ 0]}\right)$
2) $h(x) = -3^{x-1}$, gdzie $h(x) = -g(x)$ (S_{OX})
3) $r(x) = -3^{x-1} + 2$, gdzie $r(x) = h(x) + 2$ $\left(T_{\vec{v}=[0,\ 2]}\right)$

Sytuację tę ilustruje poniższy rysunek.

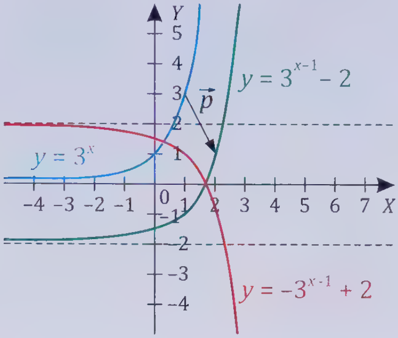


II sposób

Przekształcimy wzór funkcji $y = -3^{x-1} + 2$ do postaci $y = -(3^{x-1} - 2)$. Wystarczy teraz naszkicować wykres funkcji $y = 3^x$, następnie przesunąć go równolegle o wektor $\vec{p} = [1, -2]$ i otrzymany wykres odbić symetrycznie względem osi OX. Przekształcenia te zapiszemy krótko w następujący sposób:

$$y = 3^x \xrightarrow{T_{\vec{p}=[1,\ -2]}} y = 3^{x-1} - 2 \xrightarrow{S_{OX}} y = -(3^{x-1} - 2)$$

Sytuacja ta przedstawiona jest na poniższym rysunku.



Przykład 2.

Naszkicujemy wykres funkcji $f(x) = 2^{|x-1|-|x|}$, $x \in \boldsymbol{R}$.

Wzór funkcji f zapiszemy bez użycia symbolu wartości bezwzględnej. Mamy trzy przypadki dotyczące wykładnika potęgi o podstawie 2:

- jeśli $x \in (-\infty, 0)$, to $|x-1| - |x| = -x + 1 + x = 1$;
- jeśli $x \in \langle 0, 1)$, to $|x-1| - |x| = -x + 1 - x = -2x + 1$;
- jeśli $x \in \langle 1, +\infty)$, to $|x-1| - |x| = x - 1 - x = -1$.

Ostatecznie wzór funkcji f możemy zapisać następująco

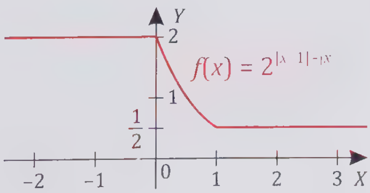
$$f(x) = \begin{cases} 2, & \text{jeśli } x \in (-\infty,\ 0) \\ 2^{-2x+1}, & \text{jeśli } x \in \langle 0,\ 1) \\ \dfrac{1}{2}, & \text{jeśli } x \in \langle 1, +\infty) \end{cases}$$

Zanim przystąpimy do naszkicowania wykresu funkcji f, zauważmy, że

$$2^{-2x+1} = 2^{-2\left(x-\frac{1}{2}\right)} = \left(\frac{1}{4}\right)^{x-\frac{1}{2}}$$

Aby otrzymać fragment wykresu funkcji f odpowiadający argumentom z przedziału $\langle 0, 1)$, wystarczy przesunąć równolegle wykres funkcji $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ o wektor $\vec{u} = \left[\frac{1}{2}, 0\right]$ (i wybrać odpowiedni fragment wykresu).

Wykres funkcji f ilustruje poniższy rysunek.



Przykład 3.

Wyznaczymy zbiór wszystkich wartości parametru m, $m \in \boldsymbol{R} - \{-2\}$, dla których równanie

$$\frac{2}{\left(\frac{1}{2}\right)^x - \left(\frac{1}{2}\right)^{2x} + \left(\frac{1}{2}\right)^{3x} - \left(\frac{1}{2}\right)^{4x} + \ldots} = \frac{m-3}{m+2}$$

ma rozwiązanie.

W mianowniku ułamka po lewej stronie równania występuje wyrażenie

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x - \left(\frac{1}{2}\right)^{2x} + \left(\frac{1}{2}\right)^{3x} - \left(\frac{1}{2}\right)^{4x} + \ldots,$$

które jest sumą wyrazów nieskończonego ciągu geometrycznego o pierwszym wyrazie a_1, gdzie $a_1 = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, i ilorazie q, $q = -\left(\frac{1}{2}\right)^x$. Suma szeregu istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy $|q| < 1$, czyli $\left|-\left(\frac{1}{2}\right)^x\right| < 1$, skąd

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x < 1$$

Z wykresu funkcji wykładniczej $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ odczytujemy, że $\left(\frac{1}{2}\right)^x < 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x \in (0, +\infty)$. Zatem dla $x \in (0, +\infty)$ suma szeregu wyraża się wzorem

$$S = \frac{a_1}{1-q}, \text{ więc } S = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^x}{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^x} = \frac{\frac{1}{2^x}}{1 + \frac{1}{2^x}} = \frac{1}{2^x + 1}$$

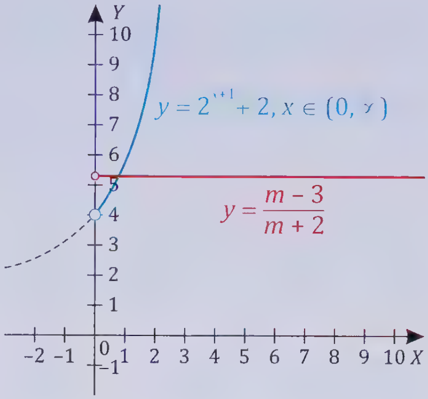
Równanie wyjściowe jest równoważne równaniu

$$2 \cdot (2^x + 1) = \frac{m-3}{m+2}, \text{ czyli } 2^{x+1} + 2 = \frac{m-3}{m+2}, \text{ gdzie } x \in (0, +\infty) \text{ i } m \in \boldsymbol{R} - \{-2\}.$$

Problem możemy rozwiązać, interpretując równanie jako równość wartości funkcji tej samej zmiennej x: $f(x) = 2^{x+1} + 2$ oraz $g(x) = \frac{m-3}{m+2}$, gdzie $x \in (0, +\infty)$ i $m \in \boldsymbol{R} - \{-2\}$.

(Zauważ, że funkcja g jest funkcją stałą).

Równanie ma rozwiązanie, gdy wykresy funkcji f i g mają co najmniej jeden punkt wspólny. Sytuację taką przedstawia rysunek obok. Rozważane równanie ma rozwiązanie wówczas, gdy funkcja stała g przyjmuje wartości większe od 4.



Stąd

$$\left(\frac{m-3}{m+2} > 4 \wedge m \in \boldsymbol{R} - \{-2\}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{m-3}{m+2} - 4 > 0 \wedge m \in \boldsymbol{R} - \{-2\}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{-3m-11}{m+2} > 0 \wedge m \in \boldsymbol{R} - \{-2\}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow [(-3m-11)(m+2) > 0 \wedge m \in \boldsymbol{R} - \{-2\}] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow m \in \left(-3\frac{2}{3}, -2\right)$$

Rozważane równanie ma rozwiązanie wtedy, gdy $m \in \left(-3\frac{2}{3}, -2\right)$.

Sprawdź, czy rozumiesz

1. Naszkicuj wykres funkcji f, jeśli

   a) $f(x) = |-2^{x-5} + 1|$ b) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{|x+2|+|x|}$

2. Rozwiąż graficznie równanie i nierówność:
   a) $2^x + 3 = -x^2 + 2x + 4$ b) $6 - 2^{|x|} < |x|$

3. Wyznacz zbiór wszystkich parametrów m ($m \in \boldsymbol{R}$), dla których równanie

   $$2^x + \frac{1}{2} \cdot 2^x + \frac{1}{4} \cdot 2^x + \frac{1}{8} \cdot 2^x + \ldots = m^2$$

   ma rozwiązanie mniejsze od 1.

4. Naszkicuj wykres funkcji wykładniczej określonej wzorem $f(x) = 4 \cdot 2^{x-1} - 1$.
   a) Na podstawie wykresu funkcji f naszkicuj wykres funkcji g, wiedząc, że $g(x) = |f(1-x) - 5|$.
   b) Napisz wzór funkcji g i oblicz współrzędne punktu wspólnego wykresu funkcji g i osi OY.
   c) Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których równanie $g(x) = m^2 - 2$ ma dwa rozwiązania różnych znaków.

Równania wykładnicze

Równanie wykładnicze to równanie, w którym niewiadoma występuje tylko w wykładniku potęgi. Oto przykłady równań wykładniczych z niewiadomą x:

$3^x = 3^{2x+1}$ $\quad 5^{x^2} = 25^{\frac{x+4}{x}}$ $\quad 2^{2x+1} = \sqrt[3]{2} \cdot 2^{x-1}$ $\quad 2^{2x} + 2^x - 6 = 0$

Nie są równaniami wykładniczymi równania:

$x - 1 = 3^{x+2}$ $\quad x^2 - 4x = 2^x + 4^x$

W rozwiązywaniu równań wykładniczych korzystamy z tego, że funkcja wykładnicza $y = a^x$, gdzie $a \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$, jest funkcją różnowartościową. Prawdziwe jest następujące twierdzenie.

Twierdzenie 1.

Jeżeli $a > 0$ i $a \neq 1$ oraz $x_1 \in \boldsymbol{R}$, $x_2 \in \boldsymbol{R}$, to $a^{x_1} = a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 = x_2$.

Zastosowanie powyższego twierdzenia oraz praw działań na potęgach w rozwiązywaniu równań wykładniczych ilustrują poniższe przykłady.

Przykład 1.

Rozwiążemy równania:

a) $4^{2x-1} = 1$ $\quad$ b) $\dfrac{3^{x+1}}{81} = \left(\dfrac{1}{9}\right)^{\frac{x-1}{x}}$ $\quad$ c) $0{,}125 \cdot 16^{2x-1} = \left(\sqrt[3]{0{,}25}\right)^{3x-6} \cdot 8^{x-1}$

Ad a) Dziedziną równania $4^{2x-1} = 1$ jest zbiór liczb rzeczywistych, $D = \boldsymbol{R}$. Zauważ, że $1 = 4^0$, zatem równanie ma postać:

$$4^{2x-1} = 4^0$$

Po zastosowaniu ostatniego twierdzenia otrzymujemy:

$2x - 1 = 0$, skąd

$$x = \frac{1}{2}$$

Rozwiązaniem równania jest liczba $\frac{1}{2}$.

Ad b) Po prawej stronie równania $\dfrac{3^{x+1}}{81} = \left(\dfrac{1}{9}\right)^{\frac{x-1}{x}}$ w wykładniku potęgi występuje wyrażenie $\dfrac{x-1}{x}$, określone wtedy i tylko wtedy, gdy $x \neq 0$, zatem $D = \boldsymbol{R} - \{0\}$.

Aby rozwiązać to równanie, najpierw zapiszemy jego obie strony w postaci potęgi o tej samej podstawie, np. 3. Lewą stronę równania możemy przedstawić następująco:

$$\frac{3^{x+1}}{81} = \frac{3^{x+1}}{3^4} = 3^{x-3} \quad \text{(korzystamy z twierdzenia: } a^x : a^y = a^{x-y}\text{)}$$

Prawą stronę równania zapisujemy w postaci:

$$\left(\frac{1}{9}\right)^{\frac{x-1}{x}} = \left(3^{-2}\right)^{\frac{x-1}{x}} = 3^{\frac{-2x+2}{x}} \quad \text{(korzystamy z twierdzenia: } (a^x)^y = a^{x \cdot y}\text{)}$$

Otrzymaliśmy równanie:

$$3^{x-3} = 3^{\frac{-2x+2}{x}}$$

Na podstawie twierdzenia 1. możemy zapisać:

$$x - 3 = \frac{-2x+2}{x}, \text{ skąd}$$

$$x^2 - 3x = -2x + 2, \text{ czyli}$$

$$x^2 - x - 2 = 0$$

Pierwiastkami równania kwadratowego są liczby -1 oraz 2. Są one również rozwiązaniami równania wykładniczego (obie liczby należą do dziedziny).
Równanie ma dwa rozwiązania: -1 oraz 2.

Ad c) Dziedziną równania $0{,}125 \cdot 16^{2x\ \ 1} = \left(\sqrt[3]{0{,}25}\right)^{3x-6} \cdot 8^{x-1}$ jest zbiór liczb rzeczywistych, $D = \boldsymbol{R}$. Prześledź przedstawione poniżej rozwiązanie równania. Wskaż prawa działań, które zostały zastosowane przy sprowadzaniu obu stron równania do potęgi o podstawie $\frac{1}{2}$.

$$0{,}125 \cdot 16^{2x-1} = \left(\sqrt[3]{0{,}25}\right)^{3x-6} \cdot 8^{x\ \ 1}$$

$$\frac{1}{8} \cdot 16^{2x-1} = \left(\sqrt[3]{\frac{1}{4}}\right)^{3x-6} \cdot 8^{x-1}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{-4}\right]^{2x\ \ 1} = \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}}\right]^{3x\ \ 6} \cdot \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{3}\right]^{x\ \ 1}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-8x+4} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2x-4} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-3x+3}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{-8x+7} = \left(\frac{1}{2}\right)^{x\ \ 1}$$

Na podstawie twierdzenia 1. otrzymujemy:

$$-8x + 7 = -x - 1$$

$$-7x = -8$$

$$x = 1\frac{1}{7}$$

Rozwiązaniem równania jest liczba $1\frac{1}{7}$.

Jedną z metod rozwiązywania równań wykładniczych jest metoda przez podstawienie zmiennej pomocniczej. Rozwiązywanie tego rodzaju równań ilustruje poniższy przykład.

Przykład 2.

Rozwiążemy równania:

a) $81^x + 2 \cdot 9^x - 15 = 0$ b) $\dfrac{8^x + 5 \cdot 4^x}{4 - 2^x} = 2$ c) $\left(\sqrt{5 + 2\sqrt{6}}\right)^x + \left(\sqrt{5 - 2\sqrt{6}}\right)^x = 10$

Ad a) Dziedziną równania $81^x + 2 \cdot 9^x - 15 = 0$ jest zbiór $\boldsymbol{R}$. Równanie możemy zapisać w postaci:

$$(3^4)^x + 2 \cdot (3^2)^x - 15 = 0$$

$$(3^{2x})^2 + 2 \cdot 3^{2x} - 15 = 0$$

Wprowadzamy zmienną pomocniczą t, $t = 3^{2x}$, i otrzymujemy równanie kwadratowe z niewiadomą t:

$t^2 + 2t - 15 = 0$, skąd

$(t - 3)(t + 5) = 0$, czyli

$t = 3 \quad \vee \quad t = -5$, zatem

$3^{2x} = 3 \quad \vee \quad 3^{2x} = -5$ (równanie sprzeczne)

$$3^{2x} = 3^1$$

$$2x = 1$$

$$x = \frac{1}{2}$$

Rozwiązaniem równania jest liczba $\frac{1}{2}$.

Ad b) Najpierw wyznaczymy dziedzinę równania $\dfrac{8^x + 5 \cdot 4^x}{4 - 2^x} = 2$.

$$4 - 2^x \neq 0 \Leftrightarrow 4 \neq 2^x \Leftrightarrow 2^2 \neq 2^x \Leftrightarrow x \neq 2$$

Dziedziną równania jest zbiór D, gdzie $D = \boldsymbol{R} - \{2\}$.

Równanie możemy zapisać w postaci:

$$\frac{\left(2^x\right)^3+5\cdot\left(2^x\right)^2}{4-2^x}=2$$

Wprowadzamy zmienną pomocniczą t, $t=2^x$, i otrzymujemy równanie wymierne z niewiadomą t:

$$\frac{t^3+5t^2}{4-t}=2$$

Skąd mamy:

$$t^3+5t^2=8-2t$$

$$t^3+5t^2+2t-8=0$$

Wielomian występujący po lewej stronie równania ma wszystkie współczynniki całkowite oraz współczynnik przy t^3 wynosi 1. Całkowitych pierwiastków wielomianu $W(t)=t^3+5t^2+2t-8$ szukamy wśród całkowitych dzielników -8, czyli wśród liczb ze zbioru $\{-8,-4,-2,-1,1,2,4,8\}$. Okazuje się, że $W(1)=0$ (sprawdź!). Po podzieleniu wielomianu $W(t)=t^3+5t^2+2t-8$ przez dwumian $t-1$ otrzymujemy wielomian t^2+6t+8 (sprawdź!), stąd równanie ma postać:

$$(t-1)(t^2+6t+8)=0$$

$$(t-1)(t+2)(t+4)=0\text{, czyli}$$

$$t=1 \quad\vee\quad t=-2 \quad\vee\quad t=-4$$

Otrzymujemy równania wykładnicze:

$$2^x=1 \ \vee\ 2^x=-2 \ \vee\ 2^x=-4$$

Rozwiązaniem równania $2^x=1$ jest liczba 0 ($0\in D$). Pozostałe dwa równania są sprzeczne.
Równanie ma jedno rozwiązanie równe 0.

Ad c) Dziedziną równania $\left(\sqrt{5+2\sqrt{6}}\right)^x+\left(\sqrt{5-2\sqrt{6}}\right)^x=10$ jest zbiór $\boldsymbol{R}$.

Równanie można zapisać w postaci

$$\left(5+2\sqrt{6}\right)^{\frac{1}{2}x}+\left(5-2\sqrt{6}\right)^{\frac{1}{2}x}=10$$

Zauważmy, że liczby $5+2\sqrt{6}$ oraz $5-2\sqrt{6}$ mają tę własność, że ich iloczyn wynosi 1, bo

$$\left(5+2\sqrt{6}\right)\cdot\left(5-2\sqrt{6}\right)=5^2-\left(2\sqrt{6}\right)^2=25-24=1\text{, stąd}$$

$$5-2\sqrt{6}=\frac{1}{5+2\sqrt{6}}$$

Na tej podstawie równanie możemy zapisać w następujący sposób:

$$\left(5+2\sqrt{6}\right)^{\frac{1}{2}x}+\frac{1}{\left(5+2\sqrt{6}\right)^{\frac{1}{2}x}}=10$$

Po podstawieniu zmiennej pomocniczej t, $t = \left(5+2\sqrt{6}\right)^{\frac{1}{2}x}$, mamy:

$$t + \frac{1}{t} = 10, \text{ czyli}$$

$$t^2 - 10t + 1 = 0$$

$$\Delta = 96, \quad \sqrt{\Delta} = 4\sqrt{6}$$

$$t_1 = 5 - 2\sqrt{6}, \quad t_2 = 5 + 2\sqrt{6}$$

Otrzymujemy dwa równania wykładnicze:

$$\left(5+2\sqrt{6}\right)^{\frac{1}{2}x} = 5 - 2\sqrt{6} \quad \vee \quad \left(5+2\sqrt{6}\right)^{\frac{1}{2}x} = 5 + 2\sqrt{6}\text{, skąd}$$

$$\left(5+2\sqrt{6}\right)^{\frac{1}{2}x} = \left(5+2\sqrt{6}\right)^{-1} \quad \vee \quad \left(5+2\sqrt{6}\right)^{\frac{1}{2}x} = \left(5+2\sqrt{6}\right)^{1}\text{, czyli}$$

$$\frac{1}{2}x = -1 \quad \vee \quad \frac{1}{2}x = 1$$

$$x = -2 \quad \vee \quad x = 2$$

Rozwiązaniami równania są liczby -2 oraz 2.

Przykład 3.

Rozwiążemy równanie $\dfrac{4^{\frac{x-1}{2}} \cdot 5}{5^x} = \dfrac{1}{9} \cdot 3^{2x}$.

Łatwo zauważyć, że poznanych wcześniej metod nie da się zastosować w tym przypadku. Zauważmy, że $D = \mathbf{R}$. Doprowadzimy równanie do prostszej postaci, przekształcając je równoważnie przez zastosowanie praw działań na potęgach. Otrzymujemy:

$$\frac{\left(2^2\right)^{\frac{x-1}{2}}}{5^{x-1}} = 3^{-2} \cdot 3^{2x}\text{, czyli } \frac{2^{x-1}}{5^{x-1}} = 3^{2(x-1)}\text{, zatem}$$

$$\frac{2^{x-1}}{5^{x-1}} = 9^{x-1} \quad /: 9^{x-1} \qquad \text{(dla każdej liczby rzeczywistej } x \text{ mamy: } 9^{x-1} > 0\text{)}$$

$$\frac{2^{x-1}}{5^{x-1} \cdot 9^{x-1}} = 1$$

Ponieważ podstawy potęg są dodatnie, więc korzystamy z praw $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$ oraz $\dfrac{a^n}{b^n} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^n$ i otrzymujemy:

$$\left(\frac{2}{45}\right)^{x-1} = 1\text{, skąd } x - 1 = 0\text{, czyli } x = 1$$

Rozwiązaniem równania jest liczba 1.

Przykład 4.

Rozwiążemy równanie $5 \cdot 5^4 \cdot 5^7 \cdot 5^{10} \cdot 5^{13} \cdot \ldots \cdot 5^{3n-2} = 0{,}2^{-35}$, gdzie $n \in \boldsymbol{N}_+$.

Po lewej stronie równania występuje iloczyn potęg o tej samej podstawie, który jest równy potędze o podstawie 5 i wykładniku równym sumie wykładników tych potęg. Zatem

$$5^{1+4+7+10+13+\ldots+(3n-2)} = 0{,}2^{-35}, \text{ gdzie } n \in \boldsymbol{N}_+$$

Wyrażenie $1 + 4 + 7 + 10 + 13 + \ldots + (3n - 2)$ to suma n kolejnych początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego (a_n) o wyrazie ogólnym $a_n = 3n - 2$ (sprawdź!). Korzystamy ze wzoru

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n \quad \text{i otrzymujemy:}$$

$$1 + 4 + 7 + \ldots + (3n - 2) = \frac{3n^2 - n}{2}$$

Równanie ma postać

$$5^{\frac{3n^2-n}{2}} = \left(\frac{1}{5}\right)^{-35}$$

$$5^{\frac{3n^2-n}{2}} = 5^{35}$$

$$\frac{3n^2 - n}{2} = 35$$

$$3n^2 - n - 70 = 0$$

Rozwiązaniami równania kwadratowego są liczby $-4\frac{2}{3}$ oraz 5 (sprawdź!), z których tylko liczba 5 jest liczbą naturalną.
Rozwiązaniem równania jest liczba 5.

Sprawdź, czy rozumiesz

1. Rozwiąż równania:

a) $\left(\frac{2}{3}\right)^{3x-1} = 1$ b) $\left(\frac{2}{9}\right)^{3x-7} = \left(\frac{9}{2}\right)^{7x-3}$ c) $3^x \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{x-3} = \left(\frac{1}{27}\right)^x$

2. Rozwiąż równania:

a) $3^{x^2-7,2x} = \left(3\sqrt[5]{9}\right)^{-1}$ b) $2^{x-2} = \left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{-1}{x}}$

3. Rozwiąż równania:

a) $5^{x-3} = 7^{3-x}$ b) $3^{x-2} \cdot 4^{2x+3} = 3^{2x} \cdot 2^{3x+4}$

4. Rozwiąż równania:

a) $2^{2x-1} + 4^x = 24$ b) $\left(\frac{1}{3}\right)^{x-2} = 4 \cdot 3^{-x+1} - 9$

Nierówności wykładnicze

Nierównością wykładniczą nazywamy nierówność, w której niewiadoma znajduje się tylko w wykładniku potęgi. Nierównościami wykładniczymi są na przykład:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-1} \geqslant 2^x \qquad 3^{x-1}\cdot\sqrt[4]{27} < \left(\frac{1}{3}\right)^{2x^2} \qquad 5^x\cdot 16^{2x} < 25^{3x}$$

Wiesz, że funkcja wykładnicza $y = a^x$, gdzie $a \in \boldsymbol{R}_+ - \{1\}$, jest funkcją monotoniczną. Jeśli $a \in (0, 1)$, to funkcja jest malejąca, czyli wraz ze wzrostem argumentów wartości maleją, jeśli $a \in (1, +\infty)$, to funkcja jest rosnąca, czyli wraz ze wzrostem argumentów wartości funkcji rosną. Ta własność funkcji wykładniczej ma zastosowanie w rozwiązywaniu nierówności wykładniczych. Prawdziwe jest twierdzenie.

Twierdzenie 1.

1) Jeśli $a \in (0, 1)$ i $x_1 \in \boldsymbol{R}$, $x_2 \in \boldsymbol{R}$, to $a^{x_1} < a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 > x_2$.
2) Jeśli $a \in (1, +\infty)$ i $x_1 \in \boldsymbol{R}$, $x_2 \in \boldsymbol{R}$, to $a^{x_1} < a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 < x_2$.

Poniższe przykłady ilustrują rozwiązywanie nierówności wykładniczych z zastosowaniem tego twierdzenia.

Przykład 1.

Rozwiążemy nierówności:

a) $(3\sqrt{27})^x > 9^{2x-1}$ b) $0{,}5^{x^2-3} < \left(\frac{1}{4}\right)^x$ c) $6^{\frac{1}{x}} \leqslant 216$

Ad a) Dziedziną nierówności $\left(3\sqrt{27}\right)^x > 9^{2x-1}$ jest zbiór liczb rzeczywistych, $D = \boldsymbol{R}$. Stosując odpowiednie prawa działań na potęgach, zapiszemy obie strony nierówności w postaci potęgi o tej samej podstawie, na przykład 3. Mamy:

$$\left(3\cdot 3^{\frac{3}{2}}\right)^x > (3^2)^{2x-1},\ \text{skąd}\ \left(3^{\frac{5}{2}}\right)^x > 3^{4x-2},\ \text{zatem}\ 3^{2{,}5x} > 3^{4x-2}$$

Teraz zastosujemy twierdzenie 1. Ponieważ podstawa potęgi (3) jest liczbą z przedziału $(1, +\infty)$, więc porównując wykładniki potęg, znak nierówności pozostawiamy bez zmiany. Mamy:

$2{,}5x > 4x - 2$

$-1{,}5x > -2 \quad /:(-1{,}5)$

$x < 1\frac{1}{3}$

Zbiorem rozwiązań nierówności jest przedział $\left(-\infty, 1\frac{1}{3}\right)$.

Ad b) Dziedziną nierówności $0{,}5^{x^2-3} < \left(\frac{1}{4}\right)^x$ jest zbiór liczb rzeczywistych, $D = \boldsymbol{R}$.

Przedstawimy obie strony nierówności w postaci potęgi o podstawie $\frac{1}{2}$. Otrzymujemy:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-3} < \left[\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]^x$$

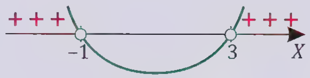
$$\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-3} < \left(\frac{1}{2}\right)^{2x}$$

Ponieważ podstawa potęgi $\left(\frac{1}{2}\right)$ jest liczbą z przedziału $(0, 1)$, więc na mocy twierdzenia 1., porównując wykładniki potęg, znak nierówności zmieniamy na przeciwny. Otrzymujemy:

$x^2 - 3 > 2x$, skąd

$x^2 - 2x - 3 > 0$

Teraz wystarczy rozwiązać nierówność kwadratową. Szkicujemy wykres pomocniczy.



$x \in (-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$

Zbiorem rozwiązań nierówności jest suma przedziałów $(-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$.

Ad c) Po lewej stronie nierówności $6^{\frac{1}{x}} \leqslant 216$, w wykładniku potęgi występuje wyrażenie $\frac{1}{x}$, które jest określone, jeśli $x \neq 0$. Zatem dziedziną nierówności jest zbiór $\boldsymbol{R} - \{0\}$.

Przedstawimy obie strony nierówności w postaci potęgi o podstawie 6. Otrzymujemy:

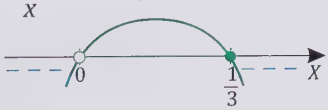
$6^{\frac{1}{x}} \leqslant 6^3$

Podstawa potęgi (6) jest większa od 1, zatem

$\frac{1}{x} \leqslant 3$

Otrzymaliśmy nierówność wymierną:

$\frac{1}{x} - 3 \leqslant 0$, skąd $\quad \frac{1-3x}{x} \leqslant 0 \quad / \cdot x^2$



$x(1-3x) \leqslant 0$

Zbiorem rozwiązań nierówności wymiernej, a także zbiorem rozwiązań nierówności wykładniczej jest suma przedziałów $(-\infty, 0) \cup \left\langle \frac{1}{3}, +\infty \right)$.

Przykład 2.

Rozwiążemy nierówności:

a) $2^{x+1}+4^x \leqslant 80$

b) $3^{-3x}-9\cdot 3^{-2x}-\left(\frac{1}{3}\right)^x+9>0$

Ad a) Nierówność

$$2^{x+1}+4^x \leqslant 80$$

zapisujemy w postaci

$$2\cdot 2^x+(2^x)^2 \leqslant 80$$

$$(2^x)^2+2\cdot 2^x-80 \leqslant 0$$

Jej dziedziną jest zbiór $\boldsymbol{R}$. Stosujemy podstawienie $2^x=t$ i sprowadzamy nierówność wykładniczą do nierówności kwadratowej z niewiadomą t.

$$t^2+2t-80 \leqslant 0$$

Ponieważ $\bigwedge_{x\in \boldsymbol{R}} 2^x>0$ i $2^x=t$, więc wystarczy rozpatrywać $t>0$. Otrzymujemy:

$$[t^2+2t-80 \leqslant 0 \ \wedge \ t>0] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow [(t-8)(t+10) \leqslant 0 \ \wedge \ t>0] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow [t\in\langle -10,8\rangle \ \wedge \ t>0] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t\in(0,8\rangle$$

Ale $t=2^x$, zatem

$$0<2^x \leqslant 8, \text{ czyli}$$

$$2^x>0 \ \wedge \ 2^x \leqslant 8$$

Nierówność $2^x>0$ jest spełniona przez każdą liczbę rzeczywistą, natomiast

$$2^x \leqslant 8 \Leftrightarrow 2^x \leqslant 2^3 \Leftrightarrow x \leqslant 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x\in(-\infty,3\rangle$$

Ostatecznie

$$0<2^x \leqslant 8 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow [x\in \boldsymbol{R} \ \wedge \ x\in(-\infty,3\rangle] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x\in(-\infty,3\rangle$$

Nierówność spełnia każda liczba rzeczywista należąca do przedziału $(-\infty,3\rangle$.

Ad b) Dziedziną nierówności

$$3^{-3x}-9\cdot 3^{-2x}-\left(\frac{1}{3}\right)^x+9>0$$

jest zbiór $\boldsymbol{R}$. Nierówność możemy zapisać w postaci

$$\left[\left(\frac{1}{3}\right)^x\right]^3-9\left[\left(\frac{1}{3}\right)^x\right]^2-\left(\frac{1}{3}\right)^x+9>0$$

Podstawiamy $\left(\frac{1}{3}\right)^x = t$ i otrzymujemy nierówność wielomianową stopnia trzeciego z niewiadomą t:

$$t^3 - 9t^2 - t + 9 > 0$$

Po rozłożeniu lewej strony nierówności na czynniki i uwzględnieniu warunku $t > 0$ (bo $\left(\frac{1}{3}\right)^x > 0$, gdzie $t = \left(\frac{1}{3}\right)^x$), mamy:

$$[(t-9)(t-1)(t+1) > 0 \ \wedge \ t > 0] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow [t \in (-1, 1) \cup (9, +\infty) \ \wedge \ t > 0] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t \in (0, 1) \cup (9, +\infty) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow [0 < t < 1 \ \vee \ t > 9]$$

Po podstawieniu $t = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ otrzymujemy alternatywę nierówności:

$$0 < \left(\frac{1}{3}\right)^x < 1 \ \vee \ \left(\frac{1}{3}\right)^x > 9, \text{ stąd}$$

$$0 < \left(\frac{1}{3}\right)^x < \left(\frac{1}{3}\right)^0 \ \vee \ \left(\frac{1}{3}\right)^x > \left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$$

Na podstawie twierdzenia 1.1. otrzymujemy:

$$x > 0 \ \vee \ x < -2, \text{ czyli}$$

$$x \in (-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$$

Zbiorem rozwiązań nierówności jest $(-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$.

Sprawdź, czy rozumiesz

1. Rozwiąż nierówności:

   a) $\left(\frac{1}{3}\right)^x > 81$ b) $2^{\frac{x-5}{2}} \leqslant 2\sqrt{2}$ c) $0{,}125 \cdot 2^{4x-6} > \left(\frac{1}{4}\sqrt{2}\right)^x$

2. Rozwiąż nierówności:

   a) $\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{2}{x}} > 0{,}2$ b) $\left(\frac{1}{3}\right)^{(2x-3)(x-2)} < 3$ c) $4^{|x+2|} \leqslant 8^{\frac{2}{3}} \cdot 16^{\frac{3}{4}}$

3. Rozwiąż nierówności:

   a) $3^{2x+3} + 3^{2x+1} < 30$ b) $2 \cdot 16^x - 2^{4x} \leqslant 15 + 4^{2x-2}$

4. Rozwiąż nierówności:

   a) $2^{x+4} \cdot 7^{x+4} > 2^{3x} \cdot 7^{3x}$ b) $5 \cdot 4^{2x} - 3 \cdot 5^{2x} \geqslant 2 \cdot 20^x$

Zastosowanie równań i nierówności wykładniczych w rozwiązywaniu zadań

Przykład 1.

Wyznaczymy wszystkie wartości x, $x \in \boldsymbol{R}$, dla których liczby:

a) $4^{\frac{1}{2}x}$, $2^x + 6$, $2^{x+2} - 12$, w podanej kolejności, tworzą ciąg arytmetyczny

b) $3^x - 1$, $3^x + 7$, $9^x - 49$, w podanej kolejności, tworzą ciąg geometryczny.

Ad a) Skorzystamy z własności ciągu arytmetycznego (a_n):

$$\bigwedge_{n \in \boldsymbol{N}_+ - \{1\}} a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$$

Otrzymujemy:

$$2^x + 6 = \frac{4^{\frac{1}{2}x} + 2^{x+2} - 12}{2} \quad / \cdot 2$$

$$2 \cdot 2^x + 12 = 2^x + 4 \cdot 2^x - 12$$

$$3 \cdot 2^x = 24 \quad /: 3$$

$$2^x = 8$$

$$x = 3$$

Liczby $4^{\frac{1}{2}x}$, $2^x + 6$, $2^{x+2} - 12$ tworzą – w podanej kolejności – ciąg arytmetyczny wtedy, gdy $x = 3$. Wówczas wyrazy tego ciągu to 8, 14, 20 (sprawdź!).

Ad b) Skorzystamy z własności ciągu geometrycznego (a_n):

$$\bigwedge_{n \in \boldsymbol{N}_+ - \{1\}} a_n^2 = a_{n-1} \cdot a_{n+1}$$

Mamy:

$$(3^x + 7)^2 = (3^x - 1)(9^x - 49), \text{ skąd}$$

$$(3^x + 7)^2 = (3^x - 1)[(3^x)^2 - 49]$$

Podstawiamy $3^x = t$ i otrzymujemy równanie wielomianowe stopnia trzeciego z niewiadomą t:

$$(t + 7)^2 = (t - 1)(t^2 - 49)$$

$$t^3 - 2t^2 - 63t = 0$$

$$t(t^2 - 2t - 63) = 0$$

$$t(t - 9)(t + 7) = 0$$

$$t = 0 \ \lor \ t = 9 \ \lor \ t = -7$$

Otrzymujemy równania wykładnicze:

$3^x = 0$ – równanie sprzeczne

$3^x = 9$ – rozwiązaniem równania jest liczba 2

$3^x = -7$ – równanie sprzeczne

Liczby $3^x - 1$, $3^x + 7$, $9^x - 49$ tworzą – w podanej kolejności – ciąg geometryczny wtedy, gdy $x = 2$. Wyrazy tego ciągu są równe: 8, 16, 32.

Przykład 2.

Rozwiążemy:

a) równanie $3^{\sin^2 x} + 3^{\cos^2 x} = 4$, gdzie $x \in \langle 0, 2\pi \rangle$

b) nierówność $0{,}2^{\cos 2x} - \dfrac{1}{25^{\cos^2 x}} < \dfrac{4}{5\sqrt{5}}$.

Ad a) Z „jedynki trygonometrycznej" otrzymujemy: $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, więc równanie możemy zapisać w postaci

$$3^{\sin^2 x} + 3^{1 - \sin^2 x} = 4$$

$$3^{\sin^2 x} + \frac{3}{3^{\sin^2 x}} = 4$$

Podstawiamy $3^{\sin^2 x} = t$ i otrzymujemy równanie wymierne z niewiadomą t:

$$t + \frac{3}{t} = 4, \quad \text{skąd}$$

$$t^2 - 4t + 3 = 0$$

$$(t-1)(t-3) = 0$$

$$t = 1 \ \vee\ t = 3, \ \text{stąd}$$

$$3^{\sin^2 x} = 1 \ \vee\ 3^{\sin^2 x} = 3, \ \text{więc}$$

$$\sin^2 x = 0 \ \vee\ \sin^2 x = 1, \ \text{czyli}$$

$$\sin x = 0 \ \vee\ |\sin x| = 1$$

W przedziale $\langle 0, 2\pi \rangle$ równanie $\sin x = 0$ ma trzy rozwiązania: $0, \pi, 2\pi$, zaś równanie $|\sin x| = 1$ ma dwa rozwiązania: $\dfrac{\pi}{2}$ oraz $\dfrac{3}{2}\pi$. Zbiorem rozwiązań równania $3^{\sin^2 x} + 3^{\cos^2 x} = 4$ jest $\left\{0, \dfrac{\pi}{2}, \pi, \dfrac{3}{2}\pi, 2\pi\right\}$.

Ad b) Po zastosowaniu wzoru:

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$$

oraz praw działań na potęgach otrzymujemy nierówność:

$$\left(\frac{1}{5}\right)^{2\cos^2 x - 1} - \left(\frac{1}{5}\right)^{2\cos^2 x} < 4 \cdot \frac{1}{5^{\frac{3}{2}}}$$

$$5 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{2\cos^2 x} - \left(\frac{1}{5}\right)^{2\cos^2 x} < 4 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$4 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{2\cos^2 x} < 4 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{3}{2}} \quad /:4$$

$$\left(\frac{1}{5}\right)^{2\cos^2 x} < \left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{3}{2}}$$

Ponieważ podstawa potęgi $\frac{1}{5}$ należy do przedziału $(0, 1)$, zatem

$$2\cos^2 x > \frac{3}{2}$$

$$\cos^2 x > \frac{3}{4}$$

$$|\cos x| > \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Zbiorem rozwiązań nierówności trygonometrycznej $|\cos x| > \frac{\sqrt{3}}{2}$, a zatem i nierówności $0{,}2^{\cos 2x} - \frac{1}{25^{\cos^2 x}} < \frac{4}{5\sqrt{5}}$, jest suma przedziałów mających postać $\left(-\frac{\pi}{6} + k\pi, \frac{\pi}{6} + k\pi\right)$, gdzie $k \in C$.

Przykład 3.

Rozwiążemy nierówność $\left(\frac{1}{4}\right)^{\sin x} + \left(\frac{1}{16}\right)^{\sin x} + \left(\frac{1}{64}\right)^{\sin x} + \ldots \leqslant 1$.

Po lewej stronie nierówności występuje suma nieskończonego ciągu geometrycznego o pierwszym wyrazie a_1, $a_1 = \left(\frac{1}{4}\right)^{\sin x}$, i ilorazie q, $q = \left(\frac{1}{4}\right)^{\sin x}$. Suma ta istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy

$|q| < 1$, czyli

$$\left|\left(\frac{1}{4}\right)^{\sin x}\right| < 1$$

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{\sin x} < 1$$

$$\sin x > 0$$

Załóżmy, że $\sin x > 0$. Wówczas nierówność możemy zapisać w postaci

$$\frac{\left(\frac{1}{4}\right)^{\sin x}}{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{\sin x}} \leqslant 1$$

Z założenia wiadomo, że $1-\left(\frac{1}{4}\right)^{\sin x} > 0$. Obie strony nierówności mnożymy przez wyrażenie $1-\left(\frac{1}{4}\right)^{\sin x}$ i otrzymujemy:

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{\sin x} \leqslant 1-\left(\frac{1}{4}\right)^{\sin x}\text{, skąd}$$

$$2\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{\sin x} \leqslant 1$$

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{\sin x} \leqslant \frac{1}{2}$$

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{\sin x} \leqslant \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\sin x \geqslant \frac{1}{2}$$

Po uwzględnieniu założenia $\sin x > 0$ otrzymujemy: $\sin x \geqslant \frac{1}{2}$. Zbiorem rozwiązań tej nierówności jest suma przedziałów mających postać $\left\langle \frac{\pi}{6} + 2k\pi,\ \frac{5}{6}\pi + 2k\pi \right\rangle$, $k \in \boldsymbol{C}$.

Na koniec zajmiemy się równaniami, w których występuje parametr.

Przykład 4.

Wyznaczymy wszystkie wartości parametru m, $m \in \boldsymbol{R}$, dla których równanie

$$x^2 + 2^{m+1}x - 4^m + 2 = 0$$

ma dwa rozwiązania przeciwnych znaków.

Rozważane równanie to równanie kwadratowe z niewiadomą x. Równanie kwadratowe ma dwa rozwiązania x_1, x_2 przeciwnych znaków wtedy i tylko wtedy, gdy $\Delta > 0$ i $x_1 \cdot x_2 < 0$. Otrzymujemy układ warunków:

$$\begin{cases} \left(2^{m+1}\right)^2 - 4\cdot\left(-4^m + 2\right) > 0 \\ -4^m + 2 < 0 \end{cases}$$

Zatem

$$\begin{cases} 2^{2m+2}+4\cdot 4^m-8>0 \\ 4^m>2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4\cdot 2^{2m}+4\cdot 2^{2m}>8 \\ 2^{2m}>2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^{2m}>1 \\ 2^{2m}>2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ 2^{2m}>2\ \Leftrightarrow\ 2^{2m}>2^1\ \Leftrightarrow\ 2m>1\ \Leftrightarrow\ m>\frac{1}{2}$$

Równanie kwadratowe ma dwa rozwiązania przeciwnych znaków wtedy, gdy $m\in\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$.

Przykład 5.

Wyznaczymy wszystkie wartości parametru m, $m\in \boldsymbol{R}$, dla których równanie

$$49^x+(1-2m)\cdot 7^x+9=0$$

ma dwa różne rozwiązania rzeczywiste.

Rozważane równanie wykładnicze możemy zapisać w postaci

$$(7^x)^2+(1-2m)\cdot 7^x+9=0$$

Po podstawieniu $7^x=t$ otrzymujemy równanie kwadratowe z niewiadomą t:

$$t^2+(1-2m)\cdot t+9=0$$

Równanie wykładnicze ma dwa różne rozwiązania wtedy i tylko wtedy, gdy równanie kwadratowe ma dwa różne rozwiązania dodatnie, czyli wtedy, gdy spełnione są warunki:

$$\begin{cases} \Delta_t>0 \\ t_1+t_2>0 \\ t_1\cdot t_2>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1-2m)^2-36>0 \\ 2m-1>0 \\ 9>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (-2m-5)(-2m+7)>0 \\ 2m>1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m\in\left(-\infty,\ -2\frac{1}{2}\right)\cup\left(3\frac{1}{2},\ +\infty\right) \\ m\in\left(\frac{1}{2},\ +\infty\right) \end{cases} \Leftrightarrow\ m\in\left(3\frac{1}{2},\ +\infty\right)$$

Równanie wykładnicze ma dwa różne rozwiązania wtedy, gdy $m\in\left(3\frac{1}{2},+\infty\right)$.

Przykład 6.

Wyznaczymy wszystkie wartości parametru m, $m\in \boldsymbol{R}$, dla których równanie

$$\sin x+2=\left(\frac{1}{3}\right)^m+\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$$

ma rozwiązanie.

W tym przypadku rozważamy równanie trygonometryczne z niewiadomą x. Uporządkujemy równanie, a następnie zastosujemy wzór:

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

Mamy:

$$\sin x - \sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^m - 2$$

$$2\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\sin\frac{\pi}{6} = \left(\frac{1}{3}\right)^m - 2$$

$$\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^m - 2 \qquad \left(\text{bo } \sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}\right)$$

Z własności funkcji trygonometrycznych wiemy, że funkcja $y=\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$ przyjmuje wartości z przedziału $\langle -1, 1\rangle$. Wobec tego równanie ma rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy spełniony jest warunek:

$$-1 \leqslant \left(\frac{1}{3}\right)^m - 2 \leqslant 1 \quad /+2,\ \text{skąd}$$

$$1 \leqslant \left(\frac{1}{3}\right)^m \leqslant 3$$

Zbiorem rozwiązań nierówności $\left(\frac{1}{3}\right)^m \geqslant 1$ jest zbiór $(-\infty, 0\rangle$, zaś zbiorem rozwiązań nierówności $\left(\frac{1}{3}\right)^m \leqslant 3$ jest zbiór $\langle -1, +\infty)$. Stąd $m \in \langle -1, 0\rangle$.

Równanie ma rozwiązanie wtedy, gdy $m \in \langle -1, 0\rangle$.

Sprawdź, czy rozumiesz

1. Wyznacz wszystkie wartości $x \in \boldsymbol{R}$ tak, aby liczby 2^x+1, 4^x-9, $2^{x+1}+1$, w podanej kolejności, tworzyły ciąg arytmetyczny.
2. Rozwiąż nierówność $2^{\sin^2 x} + 2^{\cos^2 x} \leqslant 3$.
3. Rozwiąż nierówność $\left(\frac{1}{4}\right)^{\cos x} + \left(\frac{1}{16}\right)^{\cos x} + \left(\frac{1}{64}\right)^{\cos x} + \ldots \leqslant 1$.
4. Wyznacz wszystkie wartości parametru m, $m \in \boldsymbol{R}$, dla których równanie $25^x + (3m-2)\cdot 5^x + 4 = 0$ ma dwa różne rozwiązania.

Logarytm – powtórzenie wiadomości

Przypomnijmy definicję logarytmu:
Logarytmem liczby dodatniej b przy podstawie a, dodatniej i różnej od jedności, nazywamy liczbę c, do której należy podnieść podstawę a, aby otrzymać liczbę b.

Jeśli $a > 0$ i $a \neq 1$ i $b > 0$, to $(\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b)$.

Logarytm dziesiętny (czyli logarytm przy podstawie 10) liczby b oznaczamy $\log b$.

Na przykład: $\log_2 16 = 4$ $\quad \log 100 = 2$ $\quad \log_{\frac{2}{3}} \frac{9}{4} = -2$ $\quad \log_7 \sqrt[3]{7} = \frac{1}{3}$.

Poniższe twierdzenie przedstawia prawa działań na logarytmach.

Twierdzenie 1.
Jeśli $a, b \in \boldsymbol{R}_+ - \{1\}$ oraz $x > 0$ i $y > 0$, $r \in \boldsymbol{R}$, to:

a) $\log_a x + \log_a y = \log_a (x \cdot y)$

b) $\log_a x - \log_a y = \log_a \frac{x}{y}$

c) $r \cdot \log_a x = \log_a x^r$

d) $\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$

Poniższe przykłady pomogą Ci powtórzyć i utrwalić zdobytą wiedzę.

Przykład 1.

Obliczymy wartości wyrażeń:

a) $\log_{\frac{1}{2}} \dfrac{32}{\sqrt[4]{8}}$

b) $\dfrac{\log_2 24 - \log_2 3}{\log_3 \frac{4}{3} + \log_3 \frac{27}{4}}$

Ad a) Zastosujemy prawa działań na potęgach i definicję logarytmu. Otrzymujemy:

$$\log_{\frac{1}{2}} \frac{32}{\sqrt[4]{8}} = \log_{\frac{1}{2}} \frac{2^5}{2^{\frac{3}{4}}} = \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{17}{4}} = -\frac{17}{4} = -4\frac{1}{4}$$

Wartość wyrażenia wynosi –4,25.

Ad b) Przekształcając licznik ułamka, zastosujemy twierdzenie 1b, natomiast mianownik – twierdzenie 1a. Mamy:

$$\frac{\log_2 24 - \log_2 3}{\log_3 \frac{4}{3} + \log_3 \frac{27}{4}} = \frac{\log_2 \frac{24}{3}}{\log_3 \left(\frac{4}{3} \cdot \frac{27}{4}\right)} = \frac{\log_2 8}{\log_3 9} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$$

Wartość wyrażenia wynosi 1,5.

Przykład 2.

Wiedząc, że $\log 3 = a$ i $\log 2 = b$, wyznaczymy:

a) $\log 108$ b) $\log 5$ c) $\log_9 20$

w zależności od a i b.

Ad a) $\log 108 = \log(27 \cdot 4) = \log 27 + \log 4 = \log 3^3 + \log 2^2 = 3\log 3 + 2\log 2 = 3a + 2b$

Ad b) $\log 5 = \log \frac{10}{2} = \log 10 - \log 2 = 1 - b$

Ad c) $\log_9 20 = \frac{\log 20}{\log 9} = \frac{\log(2 \cdot 10)}{\log 3^2} = \frac{\log 2 + \log 10}{2\log 3} = \frac{b+1}{2a}$

Przykład 3.

Obliczymy średnią geometryczną trzech dodatnich liczb x, y oraz z, jeśli wiadomo, że

$\log_2 x = 3$ i $\log_4 y = \log_4 \sqrt{z} = 2$.

Ponieważ

$\log_2 x = 3$, więc $x = 2^3$.

Ponadto

$\log_4 y = 2$, więc $y = 4^2$ oraz

$\log_4 \sqrt{z} = 2$, więc $z = 4^4$.

Możemy zatem zapisać:

$$\sqrt[3]{x \cdot y \cdot z} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 4^2 \cdot 4^4} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 4^6} = \sqrt[3]{2^3 \cdot \left(2^2\right)^6} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 2^{12}} = \sqrt[3]{2^{15}} = 2^5 = 32$$

Średnia geometryczna liczb x, y oraz z wynosi 32.

Przykład 4.

Porównamy liczby $\log_3 16 \cdot \log_4 81$ oraz $\frac{1}{\log_{256}\sqrt{2}}$.

Aby wyznaczyć pierwszą liczbę, skorzystamy z twierdzenia 1d:

$$\log_3 16 \cdot \log_4 81 = \log_3 16 \cdot \frac{\log_3 81}{\log_3 4} = \log_3 4^2 \cdot \frac{\log_3 3^4}{\log_3 4} =$$

$$= 2\log_3 4 \cdot \frac{4\log_3 3}{\log_3 4} = 2 \cdot 4 = 8$$

Druga liczba wynosi: $\frac{1}{\log_{256}\sqrt{2}} = \frac{1}{\frac{1}{16}} = 16.$

Otrzymaliśmy, że $\log_3 16 \cdot \log_4 81 < \frac{1}{\log_{256}\sqrt{2}}$.

Przykład 5.

Obliczymy $\log_{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{b}{a}$, jeśli wiadomo, że

$$a = \frac{\log_6^3 4 + \log_6^3 9}{\log_6^2 2 - \log_6 2 \cdot \log_6 3 + \log_6^2 3} \quad \text{i} \quad b = \log_{\frac{3}{7}}^2 21 - \log_{\frac{3}{7}} 81 \cdot \log_{\frac{3}{7}} 7$$

Liczby a i b zapiszemy w najprostszej postaci. W liczniku liczby a zastosujemy twierdzenie 1c, prawa działań na potęgach, a następnie wzór skróconego mnożenia na sumę sześcianów. Mamy:

$$a = \frac{\log_6^3 4 + \log_6^3 9}{\log_6^2 2 - \log_6 2 \cdot \log_6 3 + \log_6^2 3} =$$

$$= \frac{\left(\log_6 2^2\right)^3 + \left(\log_6 3^2\right)^3}{\log_6^2 2 - \log_6 2 \cdot \log_6 3 + \log_6^2 3} =$$

$$= \frac{(2\log_6 2)^3 + (2\log_6 3)^3}{\log_6^2 2 - \log_6 2 \cdot \log_6 3 + \log_6^2 3} =$$

$$= \frac{8\left(\log_6^3 2 + \log_6^3 3\right)}{\log_6^2 2 - \log_6 2 \cdot \log_6 3 + \log_6^2 3} =$$

$$= \frac{8 \cdot (\log_6 2 + \log_6 3)\left(\log_6^2 2 - \log_6 2 \cdot \log_6 3 + \log_6^2 3\right)}{\log_6^2 2 - \log_6 2 \cdot \log_6 3 + \log_6^2 3} =$$

$$= 8 \cdot (\log_6 2 + \log_6 3) = 8 \cdot \log_6 6 = 8$$

Zatem

$$a = 8$$

Aby wyznaczyć b, zapiszemy najpierw:

$$\log_{\frac{3}{7}} 21 = \log_{\frac{3}{7}}(3 \cdot 7) = \log_{\frac{3}{7}} 3 + \log_{\frac{3}{7}} 7 \quad \text{oraz}$$

$$\log_{\frac{3}{7}} 81 = \log_{\frac{3}{7}} 3^4 = 4\log_{\frac{3}{7}} 3$$

Następnie zastosujemy wzór skróconego mnożenia na kwadrat sumy oraz kwadrat różnicy dwóch wyrażeń. Otrzymujemy:

$$b = \log_{\frac{3}{7}}^2 21 - \log_{\frac{3}{7}} 81 \cdot \log_{\frac{3}{7}} 7 = \left(\log_{\frac{3}{7}} 3 + \log_{\frac{3}{7}} 7\right)^2 - 4\log_{\frac{3}{7}} 3 \cdot \log_{\frac{3}{7}} 7 =$$

$$= \log_{\frac{3}{7}}^2 3 + 2\log_{\frac{3}{7}} 3 \cdot \log_{\frac{3}{7}} 7 + \log_{\frac{3}{7}}^2 7 - 4\log_{\frac{3}{7}} 3 \cdot \log_{\frac{3}{7}} 7 =$$

$$= \log_{\frac{3}{7}}^2 3 - 2\log_{\frac{3}{7}} 3 \cdot \log_{\frac{3}{7}} 7 + \log_{\frac{3}{7}}^2 7 = \left(\log_{\frac{3}{7}} 3 - \log_{\frac{3}{7}} 7\right)^2 = \left(\log_{\frac{3}{7}} \frac{3}{7}\right)^2 = 1$$

Stąd $b = 1$. Zatem $\log_{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{b}{a} = \log_{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{1}{8} = 6$.

Przykład 6.

Wykażemy, że jeśli $x, y, z \in \boldsymbol{R}_+ - \{1\}$, to liczby $x^{\log_y z}$ i $z^{\log_y x}$ są równe.

Założenie: $x, y, z \in \boldsymbol{R}_+ - \{1\}$

Teza: $x^{\log_y z} = z^{\log_y x}$

Dowód:

Prawdziwe jest twierdzenie:

$$z^{\log_z x} = x, \text{ gdzie } z > 0,\ z \neq 1 \text{ i } x > 0$$

Stąd:

$$x^{\log_y z} = \left(z^{\log_z x}\right)^{\log_y z} = z^{\log_y z \cdot \log_z x} \underset{\text{z tw. 1d}}{=} z^{\log_y x},$$ co kończy dowód

Z twierdzenia tego wynika, że liczby $3^{\log_2 7}$ i $7^{\log_2 3}$ są równe. Korzystając z udowodnionego twierdzenia, wskaż jeszcze inne pary liczb równych.

Sprawdź, czy rozumiesz

1. Oblicz $\log_5 25 - 2\log_3 \sqrt{3} + \log_{\frac{1}{3}} 27$.
2. Liczby x, y, z są dodatnie oraz $\log_8 x = \log_2 y = \log_4 z = 2$. Oblicz $\sqrt[4]{xyz}$.
3. Porównaj liczby a i b, jeśli:

$$a = \frac{\log_{0,5}^3 2{,}25 - \log_{0,5}^3 9}{4\left(\log_{0,5}^2 1{,}5 + \log_{0,5} 1{,}5 \cdot \log_{0,5} 3 + \log_{0,5}^2 3\right)}$$

   i $b = \log 5 \cdot \log 20 + \log^2 2$

4. Wykaż, że iloczyn liczb $m \cdot n$, gdzie $m = \log_3 \log_3 \sqrt[3]{\sqrt[3]{\sqrt[3]{3}}}$ i $n = \log_2 \log_2 \sqrt[4]{\sqrt{2}}$, jest kwadratem liczby naturalnej.
5. Wykaż, że:

   a) jeśli $a = \log_3 2$ i $b = \log_3 7$, to $\log_{81} 84 = \dfrac{2a + b + 1}{4}$

   b) jeśli $a = \log_6 5$ i $b = \log_6 2$, to $\log_3 10 = \dfrac{a + b}{1 - b}$.
6. Wykaż, że liczby a i b, gdzie:

   $a = 8^{\log_4 36} + \log_2 5 \cdot \log_5 6 \cdot \log_6 7 \cdot \log_7 8$

   $b = \log \operatorname{tg}\dfrac{\pi}{6} \cdot \log \operatorname{tg}\dfrac{\pi}{4} \cdot \log \operatorname{tg}\dfrac{\pi}{3}$,

   są całkowite.
7. Wykaż, że

   $(\log_2 5)^{-1} + (\log_3 5)^{-1} + (\log_4 5)^{-1} + (\log_5 5)^{-1} + (\log_6 5)^{-1} = 1 + 2\log_5 12$.

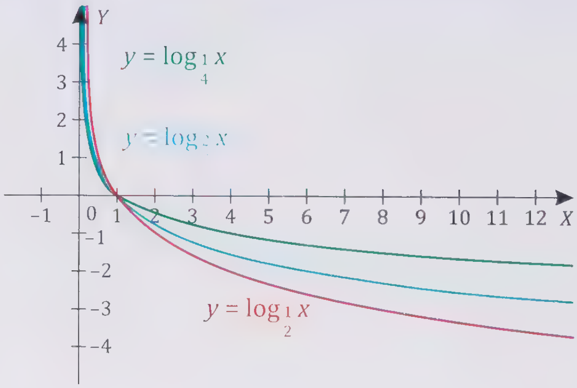
Funkcja logarytmiczna i jej własności

Definicja 1.
Funkcją logarytmiczną o podstawie a, dodatniej i różnej od 1 ($a \in \boldsymbol{R}_+ - \{1\}$), nazywamy funkcję, którą można opisać wzorem $y = \log_a x$, gdzie $x \in \boldsymbol{R}_+$.

Omówimy własności funkcji logarytmicznej. W tym celu rozpatrzymy dwa przypadki ze względu na podstawę logarytmu.

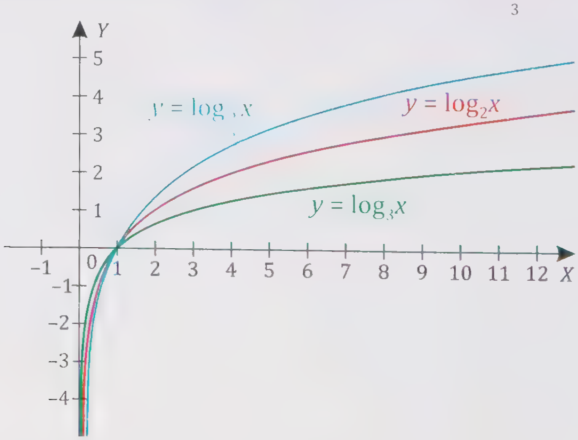
I przypadek $\quad a \in (0, 1)$

Przykłady funkcji logarytmicznych: $y = \log_{\frac{1}{4}} x$, $y = \log_{\frac{2}{5}} x$, $y = \log_{\frac{1}{2}} x$. Poniżej przedstawione są wykresy tych funkcji w jednym układzie współrzędnych.

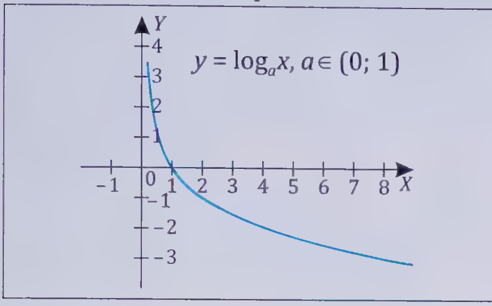


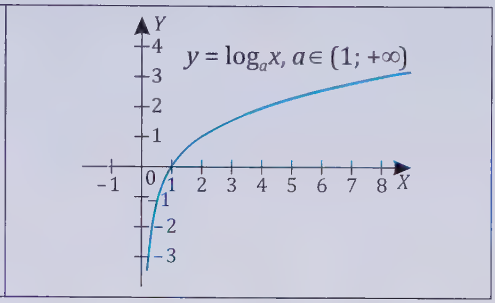
II przypadek $\quad a \in (1, +\infty)$

Wykresy funkcji logarytmicznych: $y = \log_2 x$, $y = \log_3 x$, $y = \log_{\frac{5}{3}} x$ znajdują się poniżej.



Podsumujmy nasze spostrzeżenia.





Własności funkcji logarytmicznej $y = \log_a x$, $a > 0$ i $a \neq 1$, $x \in \boldsymbol{R}_+$.

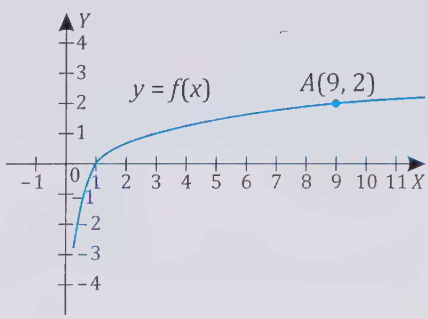
- Wykresem funkcji logarytmicznej jest krzywa logarytmiczna.
- Dziedziną funkcji jest zbiór liczb rzeczywistych dodatnich, $D = \boldsymbol{R}_+$.
- Funkcja przyjmuje wszystkie wartości rzeczywiste, $ZW = \boldsymbol{R}$.
- Funkcja jest różnowartościowa, bo dla różnych argumentów przyjmuje różne wartości.
- Funkcja ma jedno miejsce zerowe. Jest to liczba 1.
- Jeśli $a \in (0, 1)$, to funkcja przyjmuje wartości dodatnie w przedziale $(0, 1)$, a ujemne w przedziale $(1, +\infty)$.
- Jeśli $a \in (1, +\infty)$, to funkcja przyjmuje wartości dodatnie w przedziale $(1, +\infty)$, a ujemne w przedziale $(0, 1)$.
- Funkcja logarytmiczna jest funkcją monotoniczną.
  - Jeśli $a \in (0, 1)$, to funkcja logarytmiczna jest malejąca.
  - Jeśli $a \in (1, +\infty)$, to funkcja logarytmiczna jest rosnąca.

Przykład 1.

Na rysunku obok przedstawiony jest wykres funkcji logarytmicznej f. Do wykresu funkcji f należy punkt $A(9, 2)$.

a) Wyznaczymy wzór funkcji f.

b) Wyznaczymy wzór funkcji g, której wykres otrzymamy po przekształceniu wykresu funkcji f w symetrii względem osi OX.



Ad a) Funkcja f jest funkcją logarytmiczną, więc jej wzór ma postać:

$$f(x) = \log_a x, \text{ gdzie } a \in \boldsymbol{R}_+ - \{1\} \text{ i } x \in \boldsymbol{R}_+$$

Wiemy, że dla argumentu 9 wartość funkcji wynosi 2, czyli

$$2 = \log_a 9$$

Korzystając z definicji logarytmu, otrzymujemy równanie:

$$a^2 = 9, \text{ skąd } a = -3 \text{ lub } a = 3$$

Tylko liczba 3 spełnia warunki zadania, bo podstawa logarytmu jest dodatnia i różna od 1.

Funkcja f jest opisana wzorem $f(x) = \log_3 x$.

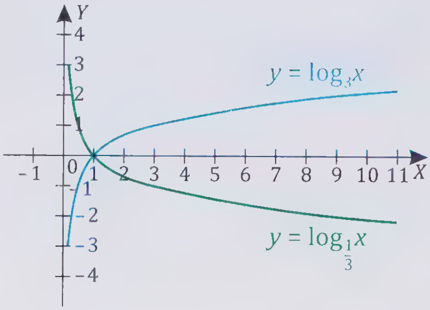
Ad b) W wyniku przekształcenia wykresu funkcji $y = f(x)$ przez symetrię względem osi OX otrzymujemy wykres funkcji $y = g(x)$, gdzie

$$g(x) = -f(x).$$

Skorzystamy również z twierdzenia o zamianie podstawy logarytmu (twierdzenie 1d, str. 40). Otrzymujemy:

$$g(x) = -f(x) = -\log_3 x = -\frac{\log_{\frac{1}{3}} x}{\log_{\frac{1}{3}} 3} = -\frac{\log_{\frac{1}{3}} x}{-1} = \log_{\frac{1}{3}} x$$

Krzywe logarytmiczne o równaniach $y = \log_3 x$ oraz $y = \log_{\frac{1}{3}} x$ są symetryczne względem osi OX. Poniższy rysunek ilustruje tę sytuację.



Przykład 2.

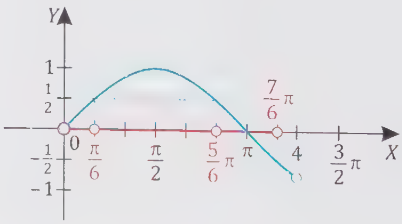
Wyznaczymy dziedzinę funkcji f określonej wzorem

$$f(x) = \log_{\sin x + 0{,}5}(4x - x^2)$$

Logarytm jest określony wtedy i tylko wtedy, gdy jego podstawa jest dodatnia i różna od 1 oraz liczba logarytmowana jest dodatnia. Zatem otrzymujemy układ warunków:

$$\begin{cases} \sin x + 0{,}5 > 0 \\ \sin x + 0{,}5 \neq 1 \\ 4x - x^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x > -0{,}5 \\ \sin x \neq 0{,}5 \\ x \in (0,\ 4) \end{cases}$$

Układ ten rozwiążemy graficznie na podstawie wykresu funkcji $y = \sin x$, gdzie $x \in (0, 4)$.



Dziedziną funkcji $f(x) = \log_{\sin x + 0{,}5}(4x - x^2)$ jest zbiór D,

$$D = \left(0, \frac{\pi}{6}\right) \cup \left(\frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi\right) \cup \left(\frac{5}{6}\pi, \frac{7}{6}\pi\right).$$

Przykład 3.

Wykażemy, że wykres funkcji określonej wzorem $f(x) = \log\dfrac{5-x}{5+x}$ jest symetryczny względem początku układu współrzędnych.

Założenie: $f(x) = \log\dfrac{5-x}{5+x}$

Teza: wykres funkcji f jest symetryczny względem początku układu współrzędnych

Dowód: Wystarczy pokazać, że funkcja f jest nieparzysta. Wyznaczamy dziedzinę funkcji f:

$$\left(\frac{5-x}{5+x} > 0 \wedge x \neq -5\right) \Leftrightarrow (5-x)(5+x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-5, 5)$$

Dziedziną funkcji f jest zbiór D, $D = (-5, 5)$, który jest symetryczny względem punktu O na osi OX. Zatem dla dowolnej liczby x z dziedziny D także $(-x)$ należy do dziedziny D. Wykażemy teraz, że zachodzi równość $-f(-x) = f(x)$ (dla dowolnej liczby x z dziedziny D). Mamy:

$$-f(-x) = -\log\frac{5-(-x)}{5+(-x)} = -\log\frac{5+x}{5-x} = \log\left(\frac{5+x}{5-x}\right)^{-1} = \log\frac{5-x}{5+x} = f(x),$$ co kończy dowód.

Sprawdź, czy rozumiesz

1. We wspólnym układzie współrzędnych naszkicuj wykresy funkcji $f(x) = \log_3 x$ oraz $g(x) = 3^x$. Wykresy te są symetryczne względem pewnej prostej. Podaj jej wzór.
2. Napisz wzór funkcji logarytmicznej, wiedząc, że do jej wykresu należy punkt $A\left(2\frac{1}{4}, -2\right)$. Naszkicuj wykres tej funkcji i omów jej własności.
3. Wyznacz dziedzinę funkcji $f(x) = \log_{x^2-9}\left(\frac{9}{4} - \left(\frac{2}{3}\right)^{x-4}\right)$.
4. Wykaż, że funkcja $f(x) = x \cdot \log\dfrac{x+3}{x-3}$ jest parzysta.
5. Wykaż, że jeśli argumenty $x_1, x_2, x_3, \ldots$ funkcji $f(x) = \log x$ tworzą ciąg geometryczny, to wartości funkcji $\log x_1, \log x_2, \log x_3, \ldots$ tworzą ciąg arytmetyczny.
6. Uporządkuj liczby: $\log_5 6, \log_2 81, \log_3 4, \log_{\frac{1}{2}} 3, \log_2 3, \log_5\sqrt{6}$ w kolejności rosnącej.

Przekształcenia wykresu funkcji logarytmicznej. Rozwiązywanie równań, nierówności oraz układów równań z zastosowaniem wykresu funkcji logarytmicznej

Przykład 1.

Wyznaczymy dziedzinę funkcji $f(x) = \left|\log_2 \frac{x-2}{x^2-4}\right|$. Na podstawie wykresu funkcji $y = \log_2 x$ naszkicujemy wykres funkcji f i określimy jej zbiór wartości.

Aby wyznaczyć dziedzinę funkcji f, wystarczy rozwiązać układ warunków:

$$\begin{cases} \frac{x-2}{x^2-4} > 0 \\ x^2 - 4 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x+2} > 0 \\ x \in \boldsymbol{R} - \{-2,\ 2\} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -2 \\ x \in \boldsymbol{R} - \{-2,\ 2\} \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-2, 2) \cup (2, +\infty)$$

Dziedziną funkcji f jest zbiór $(-2, 2) \cup (2, +\infty)$.
Przekształcamy:

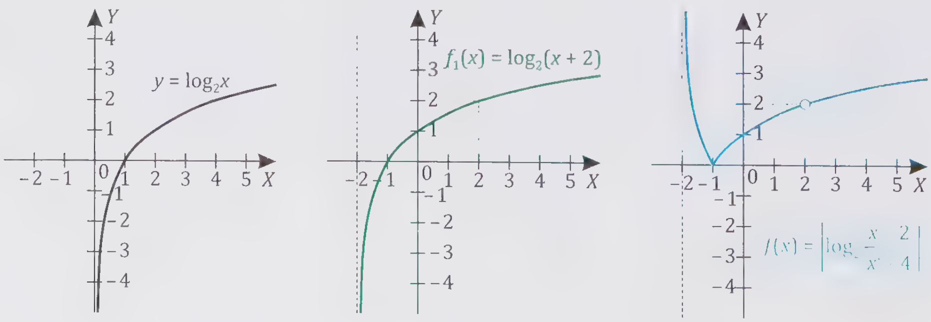
$$\left|\log_2 \frac{x-2}{x^2-4}\right| = \left|\log_2 \frac{1}{x+2}\right| = \left|\log_2 (x+2)^{-1}\right| = \left|-\log_2(x+2)\right| = \left|\log_2(x+2)\right|, \text{ więc}$$

$f(x) = |\log_2(x+2)|$, gdzie $x \in (-2, 2) \cup (2, +\infty)$.

Wykres funkcji $f(x) = |\log_2(x+2)|$ powstaje w wyniku następujących przekształceń:

$$y = \log_2 x \xrightarrow{T_{\vec{u}=[0,\ -2]}} f_1(x) = \log_2(x+2) \xrightarrow{y=|f_1(x)|} f(x) = |\log_2(x+2)|$$

Kolejne przekształcenia ilustrują poniższe rysunki.



Z ostatniego wykresu odczytujemy, że zbiorem wartości funkcji $f(x) = \left|\log_2 \frac{x-2}{x^2-4}\right|$ jest $\langle 0, +\infty)$.

Przykład 2.

Rozwiążemy równanie $-0{,}5\log_{\frac{1}{3}} x^2 = \frac{1}{2}|x| - \frac{1}{2}$.

Interpretujemy równanie jako równość wartości dwóch funkcji $f(x) = -0{,}5\log_{\frac{1}{3}} x^2$ oraz $g(x) = \frac{1}{2}|x| - \frac{1}{2}$.

Dziedziną funkcji f jest zbiór $\boldsymbol{R} - \{0\}$, zaś dziedziną funkcji g zbiór $\boldsymbol{R}$. Dziedziną rozważanego równania jest zbiór $\boldsymbol{R} - \{0\}$.
Wykonujemy przekształcenia:

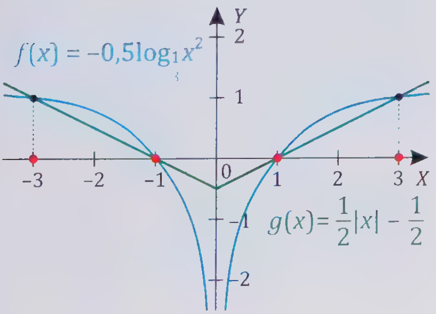
$$-\frac{1}{2}\log_{\frac{1}{3}} x^2 = -\log_{\frac{1}{3}} \sqrt{x^2} = -\log_{\frac{1}{3}} |x|, \text{ więc } f(x) = -\log_{\frac{1}{3}} |x|,\ x \in \boldsymbol{R} - \{0\}$$

Wykres funkcji f otrzymamy na podstawie wykresu funkcji $h(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$, po zastosowaniu następujących przekształceń:

$$h(x) = \log_{\frac{1}{3}} x \xrightarrow{y=h(|x|)} h_1(x) = \log_{\frac{1}{3}} |x| \xrightarrow{S_{OX}} f(x) = -\log_{\frac{1}{3}} |x|$$

Wykres funkcji $g(x) = \frac{1}{2}|x| - \frac{1}{2}$ powstaje w wyniku przesunięcia równoległego wykresu funkcji $y = \frac{1}{2}|x|$ o wektor $\vec{v} = \left[0, -\frac{1}{2}\right]$.

Szkicujemy wykresy obu funkcji we wspólnym układzie współrzędnych.



Sprawdzamy odczytane rozwiązania:

$$f(-3) = f(3) = -0{,}5\log_{\frac{1}{3}} 9 = -0{,}5\log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = 1$$

$$g(-3) = g(3) = \frac{1}{2}\cdot 3 - \frac{1}{2} = 1$$

oraz

$$f(-1) = f(1) = -0{,}5\log_{\frac{1}{3}} 1 = 0$$

$$g(-1) = g(1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

Równanie $-0{,}5\log_{\frac{1}{3}} x^2 = \frac{1}{2}|x| - \frac{1}{2}$ ma cztery rozwiązania: $-3, -1, 1, 3$.

Przykład 3.

Rozwiążemy graficznie nierówność $x^2 - 1 \leqslant \log_{\frac{1}{4}}(x^2 - 4x) - \log_{\frac{1}{4}}(4 - x)$.

Przyjmijmy oznaczenia: $f(x) = x^2 - 1$, $g(x) = \log_{\frac{1}{4}}(x^2 - 4x) - \log_{\frac{1}{4}}(4 - x)$.

Wyznaczamy dziedzinę nierówności. Funkcja f określona jest w zbiorze $\boldsymbol{R}$. Dziedzinę funkcji g wyznaczymy, rozwiązując następujący układ warunków:

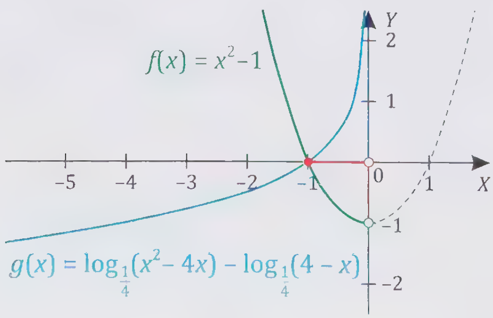
$$\begin{cases} x^2 - 4x > 0 \\ 4 - x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x-4) > 0 \\ x < 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-\infty, 0) \cup (4, +\infty) \\ x < 4 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-\infty, 0)$$

Dziedziną funkcji g jest zbiór $(-\infty, 0)$. Zatem dziedziną nierówności jest przedział $(-\infty, 0)$.
Wzór funkcji g możemy zapisać w prostszej postaci. Zauważmy, że:

$$\log_{\frac{1}{4}}(x^2 - 4x) - \log_{\frac{1}{4}}(4 - x) = \log_{\frac{1}{4}} \frac{x(x-4)}{4-x} = \log_{\frac{1}{4}}(-x), \text{ zatem}$$

$$g(x) = \log_{\frac{1}{4}}(-x)$$

Rozwiązać nierówność $f(x) \leqslant g(x)$ to wyznaczyć zbiór tych argumentów należących do zbioru D, gdzie $D = (-\infty, 0)$, dla których funkcja f przyjmuje wartości nie większe niż funkcja g. Szkicujemy we wspólnym układzie współrzędnych wykresy funkcji $f(x) = x^2 - 1$ oraz $g(x) = \log_{\frac{1}{4}}(-x)$. Wykres funkcji g otrzymujemy w wyniku odbicia symetrycznego wykresu funkcji $y = \log_{\frac{1}{4}} x$ względem osi OY.



Sytuację tę ilustruje rysunek obok.

$g(-1) = \log_{\frac{1}{4}} 5 - \log_{\frac{1}{4}} 5 = 0$

$f(-1) = 1 - 1 = 0$, więc $g(-1) = f(-1)$,

stąd

$f(x) \leqslant g(x) \Leftrightarrow x \in \langle -1, 0)$

Zbiorem rozwiązań nierówności jest $\langle -1, 0)$.

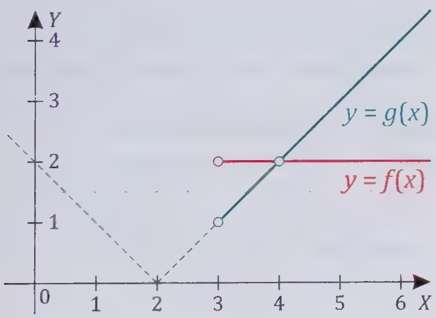
Przykład 4.

Rozwiążemy graficznie układ równań $\begin{cases} y = \log_2(x-3)\cdot\log_{x-3}4 \\ y = \left(\sqrt{2}\right)^{\log_2\left(x^2-4x+4\right)} \end{cases}$.

Rozważmy funkcje: $f(x) = \log_2(x-3)\cdot\log_{x-3}4$ i $g(x) = \left(\sqrt{2}\right)^{\log_2\left(x^2-4x+4\right)}$. Zapiszemy wzory funkcji f i g w prostszej postaci oraz ustalimy dziedzinę każdej z nich. Mamy:

- $\log_2(x-3)\cdot\log_{x-3}4 = \log_2 4 = 2$, o ile $x-3>0$ i $x-3\neq 1$, zatem $f(x)=2,\ x\in(3,4)\cup(4,+\infty)$.
- $\left(\sqrt{2}\right)^{\log_2\left(x^2-4x+4\right)} = 2^{\frac{1}{2}\log_2(x-2)^2} = 2^{\log_2\sqrt{(x-2)^2}} = |x-2|$, gdzie $x\in \boldsymbol{R}-\{2\}$, więc $g(x)=|x-2|,\ x\in\boldsymbol{R}-\{2\}$

Szkicujemy wykresy funkcji f i g we wspólnym układzie współrzędnych w zbiorze, który jest częścią wspólną dziedzin obu funkcji (rysunek poniżej).



Wykresy funkcji f i g nie mają punktów wspólnych.

Układ równań jest sprzeczny.

Sprawdź, czy rozumiesz

1. Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = \log_2\dfrac{x^2-4}{|x|+2}$.

2. Rozwiąż graficznie równanie $|x-2| = \dfrac{|\log x|}{\log x}$.

3. Rozwiąż graficznie nierówność $\log_{\frac{1}{2}}|x-4| < -1$.

Równania logarytmiczne

Równaniem logarytmicznym nazywamy równanie, w którym niewiadoma występuje tylko w wyrażeniu logarytmowanym lub w podstawie logarytmu. Przykłady równań logarytmicznych:

$\log_2(x+3)=5$ $\qquad \log_{x-1}(x+4)=1$ $\qquad \log_3 x^2 = 2\log_3(x-1)+\log_3 x$

Rozwiązując równania logarytmiczne, należy pamiętać o założeniach wynikających z definicji logarytmu:

- wyrażenie logarytmowane jest dodatnie
- podstawa logarytmu jest dodatnia i różna od 1.

W rozwiązywaniu równań logarytmicznych będziemy korzystali z definicji logarytmu, a także z twierdzenia wynikającego z własności funkcji logarytmicznej.

Twierdzenie 1.
Jeśli $a \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$ i $x_1, x_2 \in \boldsymbol{R}_+$, to $\log_a x_1 = \log_a x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$.

Metody rozwiązywania równań logarytmicznych omówimy na przykładach.

Przykład 1.

Korzystając z definicji logarytmu, rozwiążemy równania:

a) $\log_3(2x-1)=2$ $\qquad$ b) $\log_{x-3}16=2$ $\qquad$ c) $\log_{0,5}\left(\log_6 \dfrac{x^2+x}{x+4}\right)=0$

Ad a) Najpierw wyznaczymy dziedzinę równania. Wyrażenie $(2x-1)$ jest dodatnie, więc

$2x-1>0$, czyli

$x>\dfrac{1}{2}$, skąd $D=\left(\dfrac{1}{2}, +\infty\right)$

Korzystając z definicji logarytmu, otrzymujemy:

$$\log_3(2x-1)=2$$

$$3^2=2x-1$$

$$10=2x$$

$$x=5, \quad 5 \in D$$

Rozwiązaniem równania jest liczba 5.

Ad b) Tym razem niewiadoma występuje w podstawie logarytmu, zatem

$$\begin{cases} x-3>0 \\ x-3\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>3 \\ x\neq 4 \end{cases} \Leftrightarrow x\in(3,4)\cup(4,+\infty)$$

Otrzymaliśmy dziedzinę równania:

$D=(3,4)\cup(4,+\infty)$

Przystępujemy do rozwiązania równania.

$\log_{x-3}16=2$

$(x-3)^2=16$ (obie strony równania są dodatnie)

$\sqrt{(x-3)^2}=\sqrt{16}$

$|x-3|=4$

$x-3=-4 \vee x-3=4,$ stąd

$x=-1 \quad \vee x=7$

Tylko liczba 7 należy do dziedziny równania.
Równanie $\log_{x-3}16=2$ ma jedno rozwiązanie, jest nim liczba 7.

Ad c) Chcąc wyznaczyć dziedzinę równania $\log_{0,5}\left(\log_6\frac{x^2+x}{x+4}\right)=0$, należałoby rozwiązać układ warunków:

$$x\neq-4 \wedge \frac{x^2+x}{x+4}>0 \wedge \log_6\frac{x^2+x}{x+4}>0$$

Aby „ominąć" ten problem, możemy skorzystać z metody analizy starożytnych. Stosujemy dwukrotnie definicję logarytmu:

$$\log_{0,5}\left(\log_6\frac{x^2+x}{x+4}\right)=0$$

$$0,5^0=\log_6\frac{x^2+x}{x+4}$$

$$\log_6\frac{x^2+x}{x+4}=1$$

$$\frac{x^2+x}{x+4}=6^1$$

$x^2+x=6x+24$

$x^2-5x-24=0$

$(x+3)(x-8)=0$

$x=-3 \vee x=8$

Korzystając z metody analizy starożytnych, nie można pominąć jej ważnego etapu. Sprawdzamy, czy otrzymane liczby są rozwiązaniami równania:

- jeśli $x = -3$, to $L = \log_{0,5}\left(\log_6 \dfrac{(-3)^2 - 3}{-3+4}\right) = \log_{0,5}(\log_6 6) = \log_{0,5} 1 = 0 = P$
- jeśli $x = 8$, to $L = \log_{0,5}\left(\log_6 \dfrac{72}{12}\right) = \log_{0,5}(\log_6 6) = 0 = P$

Rozwiązaniami równania $\log_{0,5}\left(\log_6 \dfrac{x^2 + x}{x+4}\right) = 0$ są liczby -3 oraz 8.

Przykład 2.

Rozwiążemy równanie $\dfrac{\log(x-1)}{\log(x+1)} = 0{,}5$.

Wyznaczamy dziedzinę równania:

$$\begin{cases} x - 1 > 0 \\ x + 1 > 0 \\ \log(x+1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x > -1 \\ x + 1 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x > -1 \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (1, +\infty)$$

Dziedziną równania jest zbiór $(1, +\infty)$.
Korzystamy z własności proporcji i otrzymujemy:

$$\frac{\log(x-1)}{\log(x+1)} = \frac{1}{2}$$

$$2\log(x-1) = \log(x+1)$$

Stąd na podstawie twierdzenia 1c (str. 40) oraz twierdzenia 1 (str. 52) mamy:

$$\log(x-1)^2 = \log(x+1)$$

$(x-1)^2 = x + 1$, czyli

$x^2 - 3x = 0$, zatem

$x = 0$ lub $x = 3$

Tylko liczba 3 należy do dziedziny równania.
Równanie ma jedno rozwiązanie. Jest nim liczba 3.

Przykład 3.

Rozwiążemy równanie $\log_{\frac{1}{3}}(x+1) = 0{,}5\log_{\frac{1}{3}}(x-3)^2 - 1$.

Wyznaczmy dziedzinę równania:

$$\begin{cases} x + 1 > 0^{*} \\ (x-3)^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-1, +\infty) \\ x \in \boldsymbol{R} - \{3\} \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-1, 3) \cup (3, +\infty)$$

Dziedziną równania jest zbiór $(-1, 3) \cup (3, +\infty)$.

Równanie rozwiążemy na dwa sposoby.

I sposób

Obie strony równania mnożymy przez 2.

$$\log_{\frac{1}{3}}(x+1)=0{,}5\log_{\frac{1}{3}}(x-3)^2-1 \quad /\cdot 2$$

$$2\log_{\frac{1}{3}}(x+1)=\log_{\frac{1}{3}}(x-3)^2-2$$

Korzystamy z twierdzenia 1c (str. 40), aby zapisać lewą stronę równania w postaci

$$\log_{\frac{1}{3}}(x+1)^2$$

Po prawej stronie liczbę 2 przedstawiamy jako $\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{9}$ i korzystamy ze wzoru na różnicę logarytmów o tej samej podstawie (twierdzenie 1b str. 40). Mamy:

$$\log_{\frac{1}{3}}(x+1)^2=\log_{\frac{1}{3}}(x-3)^2-\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{9}$$

$$\log_{\frac{1}{3}}(x+1)^2=\log_{\frac{1}{3}}\left[9(x-3)^2\right]$$

Z twierdzenia 1 (str. 52) otrzymujemy:

$(x+1)^2=9(x-3)^2$, zatem

$$(x+1)^2-[3(x-3)]^2=0$$

Stosujemy wzór skróconego mnożenia: $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$.

$$[(x+1)-3(x-3)][(x+1)+3(x-3)]=0$$

$$(-2x+10)(4x-8)=0$$

$$x=5 \lor x=2$$

Obie liczby należą do dziedziny.

Równanie $\log_{\frac{1}{3}}(x+1)=0{,}5\log_{\frac{1}{3}}(x-3)^2-1$ ma dwa rozwiązania: 2 oraz 5.

II sposób

Wyrażenie $0{,}5\log_{\frac{1}{3}}(x-3)^2$ przekształcamy:

$$0{,}5\log_{\frac{1}{3}}(x-3)^2=\log_{\frac{1}{3}}\sqrt{(x-3)^2}=\log_{\frac{1}{3}}|x-3|$$

Otrzymujemy:

$$\log_{\frac{1}{3}}(x+1)=\log_{\frac{1}{3}}|x-3|-\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{3},$$

skąd po zastosowaniu wzoru na różnicę logarytmów i twierdzenia 1 (str. 52) mamy:

$$\log_{\frac{1}{3}}(x+1) = \log_{\frac{1}{3}}(3|x-3|)$$

$$x+1 = 3|x-3|$$

Dziedziną równania jest zbiór $(-1, 3) \cup (3, +\infty)$. Rozpatrujemy dwa przypadki ze względu na znak wyrażenia $x - 3$.

I.

$$\begin{cases} x \in (-1, 3) \\ x+1 = 3(-x+3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \in (-1, 3) \\ 4x = 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \in (-1, 3) \\ x = 2 \end{cases}$$

Zatem $x = 2$.

II.

$$\begin{cases} x \in (3, +\infty) \\ x+1 = 3(x-3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \in (3, +\infty) \\ -2x = -10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \in (3, +\infty) \\ x = 5 \end{cases}$$

Zatem $x = 5$.

Rozwiązaniami równania są liczby 2 i 5.

Przykład 4.

Rozwiążemy równanie $\log_x 2 + 2\log_{4x} 2 = -2\frac{1}{3}$.

Liczby logarytmowane są dodatnie. Wystarczy założyć, że podstawa logarytmu jest liczbą dodatnią i różną od 1. Zatem:

$$(x > 0 \wedge x \neq 1 \wedge 4x > 0 \wedge 4x \neq 1) \Leftrightarrow \left(x > 0 \wedge x \neq 1 \wedge x \neq \frac{1}{4}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in \boldsymbol{R}_+ - \left\{\frac{1}{4}, 1\right\}$$

Wyznaczyliśmy dziedzinę: $D = \boldsymbol{R}_+ - \left\{\frac{1}{4}, 1\right\}$.

Ze wzoru na zamianę podstawy logarytmu otrzymujemy:

$$\log_x 2 + 2\log_{4x} 2 = -\frac{7}{3}$$

$$\frac{1}{\log_2 x} + \frac{2}{\log_2(4x)} = -\frac{7}{3}$$

Ale

$$\log_2(4x) = \log_2 4 + \log_2 x = 2 + \log_2 x$$

Zatem równanie ma postać:

$$\frac{1}{\log_2 x} + \frac{2}{2 + \log_2 x} = -\frac{7}{3}$$

Wprowadzamy zmienną pomocniczą $t = \log_2 x$, gdzie $x \in D$ (zauważ, że $t \neq 0$ i $t \neq -2$). Otrzymujemy równanie wymierne ze względu na zmienną t:

$$\frac{1}{t} + \frac{2}{2+t} = -\frac{7}{3}, \text{ skąd}$$

$$\frac{2+3t}{2t+t^2} = -\frac{7}{3}, \text{ czyli}$$

$$7t^2 + 23t + 6 = 0$$

Równanie kwadratowe ma dwa rozwiązania: $t_1 = -3$, $t_2 = -\frac{2}{7}$.
Wracamy do podstawienia:

$$\log_2 x = -3 \vee \log_2 x = -\frac{2}{7}$$

$$x = 2^{-3} \vee x = 2^{-\frac{2}{7}}$$

$$x = \frac{1}{8} \vee x = \frac{1}{\sqrt[7]{4}}$$

Obie liczby należą do dziedziny równania.

Równanie $\log_x 2 + 2\log_{4x} 2 = -2\frac{1}{3}$ ma dwa rozwiązania. Są to liczby $\frac{1}{8}$ oraz $\frac{1}{\sqrt[7]{4}}$.

Sprawdź, czy rozumiesz

1. Rozwiąż równania:
   a) $\log_{x-1} 4 = 2$ b) $\log_3(x+2) = 3$ c) $\log_5(\log_2(x-1)) = 1$
2. Rozwiąż równania:
   a) $\log 5 + \log(x+10) - 1 = \log(21x - 20) - \log(2x-1)$
   b) $\log_3(x-2) + 0{,}5\log_3(x-4)^2 = 0$
3. Rozwiąż równanie $2\log_x 3 + \log_{3x} 3 + 3\log_{9x} 3 = 0$.
4. Rozwiąż równanie $\dfrac{\log\left(\sqrt{x-1}+1\right)}{\log\left(\sqrt{x-1}+7\right)} = \dfrac{1}{2}$.
5. Rozwiąż równania:
   a) $\log_x 64 - 6\log_4 x + 7 = 0$ b) $\log^2 x(\log x - 1) + (\log x + 1)(\log x - 1) = 7$
   c) $\dfrac{\log_2^2 x - 3(\log_2 x - 1)}{\log_2 x - 1} = 1$ d) $\dfrac{\log_3 x - 1}{\log_3 x + 2} = \dfrac{\log_3 x - 3}{\log_3 x + 4}$
   e) $2\left(\log_{\frac{1}{3}}^2 x - 1\right) = \log_{\frac{1}{3}} x - \log_{\frac{1}{3}}^3 x$ f) $\log_5{}^3 x + \log_5{}^2 x = 3 - \log_5 x$.
6. Rozwiąż równania:
   a) $2\log_2 x^2 - \log_2{}^2(-x) = 4$ b) $\log_{\frac{1}{3}}^2(-x-3) = \log_{\frac{1}{3}}(x^2 + 6x + 9) + 3$

Nierówności logarytmiczne

Nierównością logarytmiczną nazywamy nierówność, w której niewiadoma występuje tylko w wyrażeniu logarytmowanym lub w podstawie logarytmu. Nierównościami logarytmicznymi są na przykład:

$$\log_3(x+6) > \log_3(4x-1) \qquad \log_{\frac{1}{2}}(x+2) > 1 \qquad \log_2(\log_3 x) > 4$$

Z monotoniczności funkcji logarytmicznej wynika następujące twierdzenie.

> ***Twierdzenie 1.***
> a) Jeśli $a \in (0, 1)$ i $x_1, x_2 \in \boldsymbol{R}_+$, to $\log_a x_1 < \log_a x_2 \Leftrightarrow x_1 > x_2$.
> b) Jeśli $a \in (1, +\infty)$ i $x_1, x_2 \in \boldsymbol{R}_+$, to $\log_a x_1 < \log_a x_2 \Leftrightarrow x_1 < x_2$.

Z twierdzenia tego będziemy korzystać, rozwiązując nierówności logarytmiczne.

Przykład 1.

Rozwiążemy nierówność $\log_{\frac{1}{3}}(4x-1) > 1$.

Określamy dziedzinę nierówności:

$$D = \left(\frac{1}{4}, +\infty\right)$$

Najpierw liczbę 1 przedstawimy w postaci logarytmu przy podstawie $\frac{1}{3}$, a następnie skorzystamy z twierdzenia 1a. Mamy:

$$\log_{\frac{1}{3}}(4x-1) > \log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{3}$$

Ponieważ podstawa logarytmu $\left(\frac{1}{3}\right)$ jest liczbą z przedziału $(0, 1)$, więc porównując wyrażenia logarytmowane, zmieniamy znak nierówności na przeciwny. Otrzymujemy:

$$4x - 1 < \frac{1}{3}, \text{ skąd}$$

$$x < \frac{1}{3}$$

Teraz uwzględniamy dziedzinę nierówności.

$$\begin{cases} x < \dfrac{1}{3} \\ x \in \left(\dfrac{1}{4}, +\infty\right) \end{cases} \Leftrightarrow \quad x \in \left(\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{3}\right)$$

Zbiorem rozwiązań nierówności $\log_{\frac{1}{3}}(4x-1) > 1$ jest przedział $\left(\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{3}\right)$.

Przykład 2.

Rozwiążemy nierówność $\log_2(x^2 - x) < \log_2 12 - \log_2 6$.

Najpierw wyznaczymy dziedzinę nierówności:

$x^2 - x > 0 \Leftrightarrow x(x-1) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$, zatem

$D = (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$

Korzystając z praw działań na logarytmach, prawą stronę nierówności zapisujemy w postaci logarytmu przy podstawie 2, czyli

$$\log_2 12 - \log_2 6 = \log_2 \frac{12}{6} = \log_2 2$$

Otrzymujemy:

$\log_2(x^2 - x) < \log_2 2$

Teraz korzystamy z twierdzenia 1b.
Ponieważ podstawa logarytmu (2) jest liczbą z przedziału $(1, +\infty)$, więc porównując liczby logarytmowane, <u>znak nierówności pozostawiamy bez zmiany</u>. Otrzymujemy:

$x^2 - x < 2$, skąd

$x^2 - x - 2 < 0$

Zbiorem rozwiązań nierówności kwadratowej jest przedział

$(-1, 2)$ (sprawdź!).

Należy jeszcze uwzględnić dziedzinę nierówności. Zatem:

$$\begin{cases} x \in (-\infty, \ 0) \cup (1, +\infty) \\ x \in (-1, \ 2) \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-1, 0) \cup (1, 2)$$

Zbiorem rozwiązań nierówności $\log_2(x^2 - x) < \log_2 12 - \log_2 6$ jest zbiór $(-1, 0) \cup (1, 2)$.

Przykład 3.

Rozwiążemy nierówność $\log_{\frac{1}{3}} x \cdot \log_4 x > 8\log_4 \dfrac{1}{9}$.

Dziedziną nierówności jest zbiór $(0, +\infty)$.

Obie strony nierówności podzielimy przez liczbę

$$\log_4 \frac{1}{9}$$

Zauważ, że $\log_4 \frac{1}{9} < 0$, bo funkcja $y = \log_4 x$ dla argumentów z przedziału $(0, 1)$ przyjmuje wartości ujemne. Mamy:

$$\log_{\frac{1}{3}} x \cdot \frac{\log_4 x}{\log_4 \frac{1}{9}} < 8$$

Ze wzoru na zamianę podstawy logarytmu $\left(\frac{\log_a b}{\log_a c} = \log_c b\right)$ wyrażenie

$$\frac{\log_4 x}{\log_4 \frac{1}{9}}$$

zapiszemy jako

$$\log_{\frac{1}{9}} x,$$

a następnie – po zastosowaniu drugi raz wzoru na zamianę podstawy logarytmu – w postaci

$$\frac{1}{2} \log_{\frac{1}{3}} x$$

Otrzymujemy nierówność:

$$\frac{1}{2}\log^2_{\frac{1}{3}} x < 8, \text{ skąd}$$

$$\log^2_{\frac{1}{3}} x < 16$$

Obie strony nierówności są nieujemne, więc nierówność można zapisać w postaci:

$$\left|\log_{\frac{1}{3}} x\right| < 4, \text{ czyli}$$

$$\log_{\frac{1}{3}} x > -4 \quad \wedge \quad \log_{\frac{1}{3}} x < 4$$

$$\log_{\frac{1}{3}} x > \log_{\frac{1}{3}} 81 \wedge \log_{\frac{1}{3}} x < \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{81}$$

Po skorzystaniu z twierdzenia 1a mamy:

$$\left(x < 81 \wedge x > \frac{1}{81}\right) \Leftrightarrow x \in \left(\frac{1}{81}, 81\right)$$

Dziedziną nierówności jest zbiór $(0, +\infty)$.

Zatem zbiorem rozwiązań danej nierówności jest przedział liczbowy $\left(\frac{1}{81}, 81\right)$.

Przykład 4.

Rozwiążemy nierówność $\dfrac{\log_3 x + 1}{\log_3 x - 1} \leqslant \log_3 9$.

Wyznaczymy najpierw dziedzinę nierówności:

$$\begin{cases} x > 0 \\ \log_3 x - 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \log_3 x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 3 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (0, 3) \cup (3, +\infty)$$

Zatem $D = \boldsymbol{R}_+ - \{3\}$.
Nierówność tę rozwiążemy, wprowadzając zmienną pomocniczą t, gdzie $t = \log_3 x$.
Otrzymujemy nierówność wymierną:

$$\frac{t+1}{t-1} \leqslant 2, \text{ skąd}$$

$$\frac{t+1}{t-1} - 2 \leqslant 0$$

$$\frac{3-t}{t-1} \leqslant 0 \quad / \cdot (t-1)^2$$

$(3 - t)(t - 1) \leqslant 0$ i $t \neq 1$, zatem

$t \in (-\infty, 1) \cup \langle 3, +\infty)$

Otrzymujemy:

$t < 1 \ \vee \ t \geqslant 3$, czyli

$\log_3 x < 1 \ \vee \ \log_3 x \geqslant 3$

$\log_3 x < \log_3 3 \ \vee \ \log_3 x \geqslant \log_3 27$, skąd

$x < 3 \ \vee \ x \geqslant 27$

$x \in (-\infty, 3) \cup \langle 27, +\infty)$

Po uwzględnieniu dziedziny, $D = \boldsymbol{R}_+ - \{3\}$, stwierdzamy, że daną nierówność spełnia każda liczba ze zbioru $(0, 3) \cup \langle 27, +\infty)$.

Przykład 5.

Rozwiążemy nierówność $\log_x (x + 2) > \log_{\frac{1}{x}} 0{,}25$.

Najpierw wyznaczymy dziedzinę nierówności:

$$\left(x > 0 \ \wedge \ x \neq 1 \ \wedge \ x + 2 > 0 \ \wedge \frac{1}{x} > 0 \ \wedge \frac{1}{x} \neq 1\right) \Leftrightarrow (x > 0 \ \wedge \ x \neq 1) \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow x \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$, czyli

$D = (0, 1) \cup (1, +\infty)$

Prawą stronę nierówności zapiszemy w postaci logarytmu przy podstawie x. Mamy:

$$\log_{\frac{1}{x}} 0{,}25 = -\log_x 0{,}25 = \log_x 4.$$

Nierówność przyjmuje postać

$$\log_x(x+2) > \log_x 4$$

Ze względu na podstawę logarytmu rozważamy dwa przypadki (jednocześnie uwzględniamy dziedzinę).

I przypadek

Jeśli $x \in (0, 1)$, to na mocy twierdzenia 1a otrzymujemy:

$$\log_x(x+2) > \log_x 4$$

$$x + 2 < 4$$

$$x < 2$$

Zatem $x \in (0, 1) \wedge x \in (-\infty, 2)$, więc

$$x \in (0, 1)$$

II przypadek

Jeśli $x \in (1, +\infty)$, to na mocy twierdzenia 1b mamy:

$$\log_x(x+2) > \log_x 4$$

$$x + 2 > 4$$

$$x > 2$$

Stąd $x \in (1, +\infty) \wedge x \in (2, +\infty)$, czyli

$$x \in (2, +\infty).$$

Sumujemy otrzymane rozwiązania.

Zbiorem rozwiązań nierówności $\log_x(x+2) > \log_{\frac{1}{x}} 0{,}25$ jest zbiór $(0, 1) \cup (2, +\infty)$.

Przykład 6.

Rozwiążemy nierówność $\log_2(\log_4 x) + \log_4(\log_2 x) \leqslant -4$.

Dziedzinę nierówności wyznaczamy, rozwiązując układ warunków:

$$\begin{cases} x > 0 \\ \log_4 x > 0 \\ \log_2 x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (1, +\infty), \text{ zatem}$$

$$D = (1, +\infty)$$

Zauważmy, że:

$$\log_4 x = \frac{1}{\log_x 4} = \frac{1}{2\log_x 2} = \frac{1}{2}\log_2 x$$

Zatem nierówność możemy przedstawić w postaci:

$$\log_2\left(\frac{1}{2}\cdot\log_2 x\right) + \frac{1}{2}\cdot\log_2\left(\log_2 x\right) \leqslant -4$$

Na podstawie twierdzenia 1a (str. 40) wiemy, że:

$$\log_2\left(\frac{1}{2}\cdot\log_2 x\right) = \log_2\frac{1}{2} + \log_2\left(\log_2 x\right) = -1 + \log_2(\log_2 x),\ \text{stąd}$$

$$-1 + \log_2(\log_2 x) + \frac{1}{2}\cdot\log_2\left(\log_2 x\right) \leqslant -4$$

$$\frac{3}{2}\log_2(\log_2 x) \leqslant -3 \quad /: \frac{3}{2}$$

$$\log_2(\log_2 x) \leqslant -2,\ \text{zatem}$$

$$\log_2(\log_2 x) \leqslant \log_2\frac{1}{4}$$

$$\log_2 x \leqslant \frac{1}{4}$$

$$\log_2 x \leqslant \log_2 2^{\frac{1}{4}}$$

$$x \leqslant \sqrt[4]{2}$$

Po uwzględnieniu dziedziny otrzymujemy odpowiedź.

Zbiorem rozwiązań nierówności jest przedział $\left(1, \sqrt[4]{2}\right\rangle$.

Sprawdź, czy rozumiesz

1. Rozwiąż nierówności:

   a) $\log_2 \frac{3-x}{x} < 0$ b) $\log_{\frac{1}{2}}(x^2-5x+6) > -1$

2. Rozwiąż nierówność $(\log_2 x)^2 + \log_2 x - 2 \leqslant 0$.
3. Rozwiąż nierówność $\log_x(x+1) + \log_x(2-x) < 0$.
4. Rozwiąż nierówność $\log_2 x \cdot \log_{\frac{1}{3}} x \leqslant \log_{\frac{1}{3}} 16$.
5. Rozwiąż nierówność $\log_9(\log_3 x) + \log_3(\log_{27} x) \leqslant 2$.

Równania i nierówności logarytmiczno-wykładniczo-potęgowe

Rozwiązywanie tego rodzaju równań i nierówności zilustrujemy przykładami.

Przykład 1.

Rozwiążemy równanie $27^{\log x} - 7 \cdot 9^{\log x} - 21 \cdot 3^{\log x} + 27 = 0$.

Dziedziną równania jest zbiór liczb rzeczywistych dodatnich, $D = \mathbf{R}_+$.
Przedstawimy równanie w dogodniejszej postaci:

$$(3^3)^{\log x} - 7 \cdot (3^2)^{\log x} - 21 \cdot 3^{\log x} + 27 = 0$$

$$(3^{\log x})^3 - 7 \cdot (3^{\log x})^2 - 21 \cdot 3^{\log x} + 27 = 0$$

Wprowadzamy zmienną pomocniczą t, $t = 3^{\log x}$, i otrzymujemy równanie wielomianowe

$$t^3 - 7t^2 - 21t + 27 = 0$$

Równanie to ma trzy rozwiązania: $t_1 = -3$, $t_2 = 9$, $t_3 = 1$ (sprawdź!).
Otrzymujemy:

$$3^{\log x} = -3 \ \vee \ 3^{\log x} = 9 \ \vee \ 3^{\log x} = 1$$

Pierwsze równanie jest sprzeczne. Rozwiązujemy pozostałe dwa.

$$3^{\log x} = 3^2 \ \vee \ 3^{\log x} = 3^0, \text{ stąd}$$

$$\log x = 2 \ \vee \ \log x = 0, \text{ czyli}$$

$$x = 100 \ \vee \ x = 1$$

Obie liczby należą do dziedziny.
Równanie ma dwa rozwiązania: 1 oraz 100.

Przykład 2.

Rozwiążemy równanie $\log_2(4 \cdot 3^x - 6) - \log_2(9^x - 6) = 1$.

Na podstawie definicji logarytmu ustalamy dziedzinę równania.

$$\begin{cases} 4 \cdot 3^x - 6 > 0 \\ 9^x - 6 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^x > \dfrac{3}{2} \\ 9^x > 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^x > \dfrac{3}{2} \\ 3^{2x} > 6 \end{cases}$$

Strony otrzymanych nierówności są dodatnie. Logarytmujemy obie strony obu nierówności przy podstawie 3, otrzymując w ten sposób układ warunków równoważnych (twierdzenie 1b, str. 58)

$$\begin{cases} \log_3 3^x > \log_3 \dfrac{3}{2} \\ \log_3 3^{2x} > \log_3 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \log_3 \dfrac{3}{2} \\ 2x > \log_3 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \log_3 \dfrac{3}{2} \\ x > \log_3 \sqrt{6} \end{cases} \Leftrightarrow x > \log_3 \sqrt{6}$$

Dziedziną równania jest zbiór $\left(\log_3 \sqrt{6}, +\infty\right)$.
Przystępujemy do rozwiązania równania.

$$\log_2(4 \cdot 3^x - 6) - \log_2(9^x - 6) = 1$$

$$\log_2 \frac{4 \cdot 3^x - 6}{9^x - 6} = \log_2 2$$

$$\frac{4 \cdot 3^x - 6}{9^x - 6} = 2$$

$$4 \cdot 3^x - 6 = 2 \cdot 9^x - 12 \quad / : 2$$

$$(3^x)^2 - 2 \cdot 3^x - 3 = 0$$

Otrzymane równanie wykładnicze rozwiązujemy przez podstawienie zmiennej pomocniczej t, $t = 3^x$.

$t^2 - 2t - 3 = 0$, skąd

$$t = 3 \ \vee \ t = -1$$

Zatem

$3^x = 3 \ \vee \ 3^x = -1$ (równanie sprzeczne)

$$x = 1$$

Liczba 1 należy do dziedziny równania $\left(1 = \log_3 3,\ \text{zaś}\ \log_3 3 > \log_3 \sqrt{6}\right)$.
Rozwiązaniem równania jest liczba 1.

Przykład 3.

Rozwiążemy równanie $\sqrt{x^{\log\sqrt{x}}} = 10$.

Określamy dziedzinę równania.

$$D = \boldsymbol{R}_+$$

Skorzystamy z własności potęg i logarytmów, aby zapisać równanie w prostszej postaci. Mamy:

$$\sqrt{x^{\log\sqrt{x}}} = 10$$

$$\left(x^{\log x^{\frac{1}{2}}}\right)^{\frac{1}{2}} = 10$$

Na podstawie twierdzenia o potęgowaniu potęgi otrzymujemy:

$$x^{\frac{1}{2}\log x^{\frac{1}{2}}} = 10$$

W wykładniku potęgi korzystamy z twierdzenia 1c, str. 40. Mamy:

$$x^{\log\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}} = 10$$

$$x^{\log x^{\frac{1}{4}}} = 10$$

Obie strony równania są dodatnie, więc po zlogarytmowaniu obu stron przy podstawie 10 otrzymujemy równanie równoważne danemu (twierdzenie 1, str. 52):

$$\log x^{\log x^{\frac{1}{4}}} = \log 10$$

Ponownie korzystamy z twierdzenia 1c, str. 40 i otrzymujemy:

$$\log x^{\frac{1}{4}} \cdot \log x = 1$$

$$\frac{1}{4}\log^2 x = 1$$

$$\log^2 x = 4$$

$$\log x = -2 \ \vee\ \log x = 2$$

$$x = 0{,}01 \quad \vee \quad x = 100$$

Obie liczby należą do dziedziny równania.
Równanie ma dwa rozwiązania 0,01 oraz 100.

Przykład 4.

Rozwiążemy nierówność $\sqrt{\log_{\frac{1}{2}} x + 3} > \log_{\frac{1}{2}} x + 1$.

Wyznaczamy dziedzinę nierówności:

$$\begin{cases} x > 0 \\ \log_{\frac{1}{2}} x + 3 \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \log_{\frac{1}{2}} x \geqslant -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \log_{\frac{1}{2}} x \geqslant \log_{\frac{1}{2}} 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \leqslant 8 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (0, 8\rangle$$

Zatem $D = (0, 8\rangle$.

Rozważymy dwa przypadki.

I. $\log_{\frac{1}{2}} x + 1 \geq 0 \wedge x \in D$, czyli $x \in (0, 2\rangle$ oraz

II. $\log_{\frac{1}{2}} x + 1 < 0 \wedge x \in D$, skąd $x \in (2, 8\rangle$.

<u>I przypadek</u>
Jeśli $x \in (0, 2\rangle$, to obie strony nierówności są nieujemne. Zatem po podniesieniu obu stron nierówności do kwadratu otrzymamy nierówność równoważną danej. Mamy:

$$\left(\sqrt{\log_{\frac{1}{2}} x+3}\right)^2 > \left(\log_{\frac{1}{2}} x+1\right)^2$$

$$\log_{\frac{1}{2}} x+3 > \log^2_{\frac{1}{2}} x + 2\log_{\frac{1}{2}} x+1$$

$$\log^2_{\frac{1}{2}} x + \log_{\frac{1}{2}} x - 2 < 0$$

Otrzymaną nierówność rozwiązujemy przez wprowadzenie zmiennej t, $t = \log_{\frac{1}{2}} x$. Mamy:

$t^2 + t - 2 < 0$, skąd $t \in (-2, 1)$, czyli $t > -2 \wedge t < 1$, zatem

$$\log_{\frac{1}{2}} x > -2 \wedge \log_{\frac{1}{2}} x < 1$$

$$\log_{\frac{1}{2}} x > \log_{\frac{1}{2}} 4 \wedge \log_{\frac{1}{2}} x < \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2}$$

$x < 4 \wedge x > \frac{1}{2}$, czyli

$$x \in \left(\frac{1}{2}, 4\right)$$

Po uwzględnieniu założenia $x \in (0, 2\rangle$ otrzymujemy: $x \in \left(\frac{1}{2}, 2\right\rangle$.

<u>II przypadek</u>
Jeśli $x \in (2, 8\rangle$, to lewa strona nierówności jest nieujemna, a prawa ujemna, więc nierówność tę spełnia każda liczba z przedziału $(2, 8\rangle$.

Sumujemy zbiory otrzymane w obu przypadkach.

$$x \in \left(\frac{1}{2}, 2\right\rangle \cup (2, 8\rangle \Leftrightarrow x \in \left(\frac{1}{2}, 8\right\rangle$$

Zbiorem rozwiązań nierówności jest przedział $\left(\frac{1}{2}, 8\right\rangle$.

Sprawdź, czy rozumiesz

1. Rozwiąż równanie $2{,}5^{\log_3 x} + 0{,}4^{\log_3 x} = 2{,}9$.
2. Rozwiąż równanie $x^{1+\log_3 x} = 9x^2$.
3. Rozwiąż nierówność $\log_2(9^{x-1}+7) > 2 + \log_2(3^{x-1}+1)$.
4. Rozwiąż nierówność $\sqrt{2-\log x} \geqslant \log x$.

Zastosowanie równań i nierówności logarytmicznych w rozwiązywaniu zadań

Przykład 1.

Wyznaczymy wszystkie wartości parametru m $(m > 0)$, dla których układ równań

$$\begin{cases} 2\log_{0,5} m \cdot x + y = 1 \\ 2 \cdot x + \log_{0,5} m \cdot y = 0 \end{cases} \quad \text{spełnia para liczb } (x, y) \text{ taka, że } \frac{x}{y} \leqslant 1\frac{1}{2}.$$

Układ równań liniowych rozwiążemy metodą wyznacznikową. Obliczamy wyznaczniki:

$$W = \begin{vmatrix} 2\log_{0,5} m & 1 \\ 2 & \log_{0,5} m \end{vmatrix} = 2\log^2{}_{0,5}m - 2 = 2(\log^2{}_{0,5}m - 1) =$$

$$= 2(\log_{0,5}m - 1)(\log_{0,5}m + 1)$$

$$W_x = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \log_{0,5} m \end{vmatrix} = \log_{0,5}m \qquad W_y = \begin{vmatrix} 2\log_{0,5} m & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2$$

Układ równań jest oznaczony wtedy i tylko wtedy, gdy wyznacznik główny jest różny od zera.

$$W \neq 0 \Leftrightarrow (\log_{0,5}m \neq 1 \wedge \log_{0,5}m \neq -1 \wedge m > 0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (m \neq 0,5 \wedge m \neq 2 \wedge m > 0) \Leftrightarrow m \in \boldsymbol{R}_+ - \{0,5; 2\}$$

Jeśli $m \in \boldsymbol{R}_+ - \{0,5; 2\}$, to układ równań spełnia para liczb (x, y), gdzie

$$x = \frac{\log_{0,5} m}{2\left(\log_{0,5}^2 m - 1\right)} \quad \text{i} \quad y = \frac{-2}{2\left(\log_{0,5}^2 m - 1\right)}$$

Z warunków zadania $\frac{x}{y} \leqslant 1\frac{1}{2}$, czyli

$$-\frac{\log_{0,5} m}{2} \leqslant \frac{3}{2} \quad / \cdot (-2)$$

$$\log_{0,5}m \geqslant -3$$

$$\log_{0,5}m \geqslant \log_{0,5}8, \text{ skąd}$$

$$m \leqslant 8$$

Otrzymujemy:

$$(m \in \boldsymbol{R}_+ - \{0,5; 2\} \wedge m \leqslant 8) \Leftrightarrow m \in (0, 8\rangle - \{0,5; 2\}$$

Dany układ równań liniowych spełnia taka para (x, y), że $\frac{x}{y} \leqslant 1\frac{1}{2}$ wtedy, gdy $m \in \left(0, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, 2\right) \cup (2, 8\rangle$.

Przykład 2.

W prostokątnym układzie współrzędnych zaznaczymy zbiór wszystkich punktów płaszczyzny, których współrzędne (x, y) spełniają równanie: $\log_2 x \cdot \log_2 y - 2 = \log_2 \frac{x^2}{y}$.

Zauważamy, że to równanie ma sens wtedy i tylko wtedy, gdy

$x > 0$ i $y > 0$

Zatem dziedziną równania jest zbiór

$D = \{(x, y)\colon\ x > 0 \text{ i } y > 0\}$

Korzystając ze wzorów na logarytmy, przekształcamy równanie do dogodniejszej postaci:

$$\log_2 x \cdot \log_2 y - 2 = \log_2 x^2 - \log_2 y$$

$$\log_2 x \cdot \log_2 y - 2 - 2\log_2 x + \log_2 y = 0$$

Otrzymane po lewej stronie równania wyrażenie zapiszemy w postaci iloczynu. Zastosujemy metodę grupowania wyrazów.

$$(\log_2 x \cdot \log_2 y + \log_2 y) - (2 + 2\log_2 x) = 0$$

$$\log_2 y(\log_2 x + 1) - 2(\log_2 x + 1) = 0$$

$$(\log_2 x + 1)(\log_2 y - 2) = 0$$

Z własności iloczynu otrzymujemy:

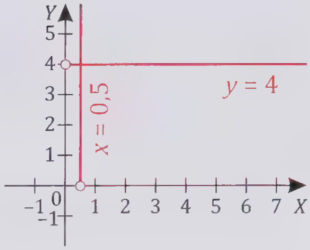
$$\log_2 x + 1 = 0 \ \vee\ \log_2 y - 2 = 0$$

$$\log_2 x = -1 \qquad \vee\ \log_2 y = 2$$

Korzystając z definicji logarytmu, mamy:

$$x = \frac{1}{2} \ \vee\ y = 4$$

Po uwzględnieniu dziedziny otrzymujemy zbiór, który jest sumą dwóch półprostych. Zbiór ten ilustruje rysunek obok.



Przykład 3.

Wyznaczymy granicę ciągu (a_n), jeśli wiadomo, że $a_n = x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n$, oraz dla każdej liczby n, $n \in \boldsymbol{N}_+ - \{1\}$ spełniony jest warunek:

$$\begin{cases} \log_3 x_1 = -1 \\ \log_3 x_n - \log_3 x_{n-1} = -1 \end{cases}$$

Zauważamy, że wyrazy $x_1, x_2, \ldots, x_n$ są dodatnie, co wynika bezpośrednio z definicji logarytmu. Ponadto, z warunku $\begin{cases} \log_3 x_1 = -1 \\ \log_3 x_n - \log_3 x_{n-1} = -1 \end{cases}$, gdzie $n \in N_+ - \{1\}$, oraz własności logarytmów otrzymujemy:

$$\bigwedge_{n \in N_+ - \{1\}} \left(x_1 = \frac{1}{3} \ \text{ i } \ \log_3 \frac{x_n}{x_{n-1}} = -1 \right), \text{ czyli}$$

$$\bigwedge_{n \in N_+ - \{1\}} \left(x_1 = \frac{1}{3} \ \text{ i } \ \frac{x_n}{x_{n-1}} = \frac{1}{3} \right)$$

Możemy wnioskować, że liczby $x_1, x_2, \ldots, x_n$, w podanej kolejności, tworzą ciąg geometryczny, o pierwszym wyrazie $x_1 = \frac{1}{3}$ i ilorazie $q = \frac{1}{3}$. Zatem n-ty wyraz ciągu (a_n) jest sumą n kolejnych początkowych wyrazów ciągu geometrycznego (x_n). Stąd

$$a_n = x_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}, \text{ czyli } a_n = \frac{1}{3} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n}{1 - \frac{1}{3}}$$

$$a_n = \frac{1}{2} \cdot \left[1 - \left(\frac{1}{3} \right)^n \right]$$

Obliczamy granicę ciągu (a_n):

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} \left[1 - \left(\frac{1}{3} \right)^n \right] = \frac{1}{2} \quad \left(\text{bo } \left(\frac{1}{3} \right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \right)$$

Granicą ciągu (a_n) jest liczba $\frac{1}{2}$.

Przykład 4.

Rozwiążemy równanie $\dfrac{2}{\log\left(0{,}5 + \cos^2 x\right)} = \log_{\sin 2x} 10$.

Wyznaczamy dziedzinę równania:

$$\begin{cases} \log\left(0{,}5+\cos^2 x\right) \neq 0 \\ \sin 2x > 0 \\ \sin 2x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos^2 x \neq 0{,}5 \\ 2k\pi < 2x < \pi + 2k\pi, \ k \in C \\ 2x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \ k \in C \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \\ x \in \left(k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi \right), k \in C \\ x \neq \frac{\pi}{4} + k\pi \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in \left(k\pi, \frac{\pi}{4} + k\pi \right) \cup \left(\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi \right), k \in C.$$

Dziedziną równania jest suma zbiorów mających postać

$\left(k\pi, \frac{\pi}{4} + k\pi\right) \cup \left(\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$, gdzie $k \in \boldsymbol{C}$.

Korzystając po prawej stronie równania ze wzoru na zamianę podstawy logarytmu, otrzymujemy:

$$\frac{2}{\log\left(0{,}5 + \cos^2 x\right)} = \frac{1}{\log \sin 2x}, \text{ stąd}$$

$$2\log \sin 2x = \log(0{,}5 + \cos^2 x)$$

Na podstawie twierdzenia 1c, str. 40 oraz twierdzenia 1., str. 52 mamy:

$$\log(\sin 2x)^2 = \log(0{,}5 + \cos^2 x)$$

$$\sin^2 2x = 0{,}5 + \cos^2 x$$

Mnożymy obie strony równania przez 2, następnie od obu stron odejmujemy 2 i korzystamy ze wzoru $2\cos^2 x - 1 = \cos 2x$. Otrzymujemy równanie:

$$2\sin^2 2x - 2 = \cos 2x$$

Ale $\sin^2 2x = 1 - \cos^2 2x$, więc równanie ma postać

$$2(1 - \cos^2 2x) - 2 = \cos 2x$$

$$2\cos^2 2x + \cos 2x = 0, \text{ skąd}$$

$$\cos 2x(2\cos 2x + 1) = 0$$

$$\cos 2x = 0 \quad \vee \quad \cos 2x = -\frac{1}{2}$$

$$2x = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \vee \quad 2x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \vee 2x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \qquad k \in \boldsymbol{C}$$

$$x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \quad \vee \quad x = -\frac{\pi}{3} + k\pi \vee x = \frac{\pi}{3} + k\pi \qquad k \in \boldsymbol{C}$$

Po uwzględnieniu dziedziny równania stwierdzamy, że rozwiązaniami równania są liczby mające postać $\frac{\pi}{3} + k\pi$, gdzie $k \in \boldsymbol{C}$.

Sprawdź, czy rozumiesz

1. Rozwiąż nierówność $\log_9 x + \log_9{}^2 x + \log_9{}^3 x + \ \ldots \leqslant \frac{1}{3}$.
2. W prostokątnym układzie współrzędnych zaznacz zbiór wszystkich punktów płaszczyzny, których współrzędne (x, y) spełniają warunek $\log_{x-2} y = 2$.
3. Rozwiąż równanie $\log_5 \operatorname{tg} x = 2\log_5 2 \cdot \log_4(2\sin x)$.
4. Wyznacz wszystkie wartości x, dla których liczby $\log 3$, $\log(10^x + 6)$, $\log(10^{x+1} - 3)$, w podanej kolejności, tworzą ciąg arytmetyczny.

Zastosowanie funkcji wykładniczej i funkcji logarytmicznej do rozwiązywania zadań umieszczonych w kontekście praktycznym

Przykład 1.

Zauważono na podstawie eksperymentu, że liczba bakterii pewnej ich kultury podwaja się każdego dnia. Wyniki badań przedstawiono w tabeli.

Czas [dni]	0	1	2	3	4
Liczba bakterii (w przybliżeniu)	100	200	400	800	1600

Początkowa liczba bakterii równa 100 po jednym dniu wzrosła do 200, po dwóch dniach wynosiła już 400 itd. Jeśli oznaczymy przez t – czas (w dniach) obserwacji kolonii bakterii, a przez $f(t)$ – przybliżoną liczbę bakterii po dniu t, to zależność tę możemy opisać wzorem $f(t) = c \cdot a^t$, gdzie $a > 0$ i $t \geqslant 0$.

a) Określimy wzór funkcji f dla powyższego eksperymentu.

b) Obliczymy przybliżoną liczbę bakterii tej kolonii po $1\frac{1}{4}$ dnia.

c) Obliczymy, w którym dniu obserwacji liczba bakterii była równa 12 800.

Ad a) Skoro dla t równego 0 liczba bakterii wynosiła (w przybliżeniu) 100, to

$f(0) = c \cdot a^0 = 100$, skąd $c = 100$

Liczba bakterii każdego dnia podwaja się, więc $a = 2$. Zatem wzór funkcji f ma postać:

$f(t) = 100 \cdot 2^t$, gdzie $t \in \langle 0, +\infty)$

Ad b) Po upływie $1\frac{1}{4}$ dnia (1 dnia i 6 godzin) liczba bakterii była równa:

$$f\left(1\frac{1}{4}\right) = 100 \cdot 2^{\frac{5}{4}} = 100 \cdot \left(\sqrt[4]{2}\right)^5 \approx 238$$

Ad c) Kultura bakterii liczyła (w przybliżeniu) 12 800 sztuk po czasie t, więc

$100 \cdot 2^t = 12\,800 \quad /: 100$

$2^t = 128$

$2^t = 2^7$

$t = 7$

Liczba bakterii wyniosła 12 800 po upływie 7. dnia eksperymentu.

Przykład 2.

Pan Kowalski złożył w banku pewną kwotę K_0 (zł) na procent składany w wysokości 6% rocznie przy kapitalizacji kwartalnej. Obliczymy, po ilu kwartałach kwota ta podwoi się. Uwzględnimy 18-procentowy podatek od odsetek.

Po zainwestowaniu kwoty K_0 przy rocznej stopie procentowej 6% i kwartalnych okresach kapitalizacji, po x kwartałach, po odliczeniu 18-procentowego podatku od odsetek pan Kowalski będzie miał na koncie kwotę K,

$$K = K_0\left(1 + \frac{0{,}06}{4} \cdot 0{,}82\right)^x$$

Ponieważ $K = 2K_0$, zatem

$$2K_0 = K_0(1 + 0{,}015 \cdot 0{,}82)^x \quad /: K_0$$

$$2 = (1{,}0123)^x$$

Po zlogarytmowaniu obu stron równania (obie strony są dodatnie) mamy:

$$\log 2 = \log (1{,}0123)^x$$

$$\log 2 = x\log 1{,}0123$$

$$x = \frac{\log 2}{\log 1{,}0123}$$

$\log 2 \approx 0{,}30103$; $\log 1{,}0123 \approx 0{,}00531$; stąd

$$x \approx 56{,}70$$

Po 57 kwartałach, czyli po 14 latach i 3 miesiącach kwota złożona w banku się podwoi.

Przykład 3.

Lekarstwa, które przyjmuje człowiek, są stopniowo eliminowane przez organizm. Ilość leku (w przybliżeniu), jaka pozostaje w organizmie, zależy od wielkości dawki leku d (mg) oraz czasu t (h) liczonego od momentu zażycia lekarstwa i wyraża się wzorem $P(t) = d \cdot (0{,}7)^t$, gdzie $t \geqslant 0$.
Załóżmy , że chory przyjął 20 mg leku.

a) Oszacujemy, ile mg leku znajduje się w organizmie chorego po upływie 6 godzin od momentu zażycia lekarstwa.
b) Wyznaczymy, ile procent zażytego leku jest eliminowane z organizmu w ciągu każdej godziny.
c) Obliczymy, jaka najmniejsza liczba godzin musi upłynąć, aby w organizmie chorego pozostało co najwyżej 0,56495 mg leku.

Ad a) Dla dawki d leku równej 20 mg wzór funkcji P ma postać:

$$P(t) = 20 \cdot (0{,}7)^t$$

Aby obliczyć, ile mg leku pozostało w organizmie chorego po upływie 6 godzin od zażycia leku, wystarczy obliczyć wartość funkcji P dla argumentu 6. Stąd

$$P(6) = 20 \cdot (0{,}7)^6 = 20 \cdot 0{,}117649 \approx 2{,}35$$

Po 6 godzinach w organizmie pozostanie jeszcze około 2,35 mg leku.

Ad b) Zauważmy, że po upływie każdej godziny w organizmie człowieka pozostaje 0,7 masy (mg) leku z poprzedniej godziny. Oznacza to, że w ciągu każdej godziny 30% leku pozostającego w organizmie jest neutralizowane.

Ad c) Masa leku pozostająca w organizmie chorego ma być mniejsza lub równa 0,56495 mg. Możemy zatem zapisać:

$$20 \cdot (0{,}7)^t \leqslant 0{,}56495 \quad /: 20$$

$$(0{,}7)^t \leqslant 0{,}0282476.$$

Logarytmujemy obie strony nierówności (obie strony są dodatnie) przy podstawie 0,7 i korzystając z własności funkcji logarytmicznej (funkcja malejąca, bo $0{,}7 \in (0, 1)$), mamy:

$$\log_{0,7}(0{,}7)^t \geqslant \log_{0,7}0{,}0282476$$

$$t \geqslant \log_{0,7}0{,}0282476$$

Ale $\log_{0,7}0{,}0282476 \approx 10$, zatem

$$t \geqslant 10$$

Musi upłynąć co najmniej 10 godzin od momentu zażycia leku.

Szybkość samorzutnego rozpadu jąder atomowych jest cechą danego izotopu promieniotwórczego i zależy od liczby jąder w danej próbce. Najczęściej stosowaną miarą szybkości rozpadu promieniotwórczego jest okres połowicznego zaniku określającego czas, w ciągu którego rozpada się połowa początkowej liczby jąder. Jeśli w chwili początkowej $t = 0$ liczba jąder wynosiła N_0, to liczbę jąder, które nie rozpadły się do chwili t, można obliczyć ze wzoru:

$$N = N_0 \cdot e^{-\lambda t}, \text{ gdzie } e \approx 2{,}72,$$

λ – stała rozpadu promieniotwórczego niezależna od czasu t.

Stała rozpadu zależy od indywidualnych właściwości jądra promieniotwórczego, przede wszystkim od liczby porządkowej Z i masy atomowej A. Jak widać ze wzoru $N = N_0 \cdot e^{-\lambda t}$, liczba atomów, które nie uległy rozpadowi, maleje w czasie wykładniczo.

Przykład 4.

Czas połowicznego rozpadu izotopu strontu $^{90}_{38}Sr$ wynosi 20 lat. Obliczymy, ile procent pierwotnej liczby jąder pozostanie po upływie: a) 10 lat, b) 70 lat.

Obliczymy najpierw stałą rozpadu izotopu strontu. Ponieważ czas połowicznego rozpadu wynosi 20 lat ($T = 20$), więc po upływie 20 lat pozostanie połowa początkowej liczby jąder, czyli $\frac{N_0}{2}$. Otrzymujemy równanie:

$$\frac{N_0}{2} = N_0 \cdot e^{-20\lambda}$$

Stąd mamy: $\frac{1}{2} = e^{-20\lambda}$. Obie strony równania są dodatnie, dlatego po zlogarytmowaniu stron równania przy podstawie e otrzymujemy:

$$\ln \frac{1}{2} = \ln e^{-20\lambda}$$

$$\ln 2^{-1} = -20\lambda \ln e$$

$$-\ln 2 = -20\lambda$$

$$\lambda = \frac{\ln 2}{20}.$$

Stała rozpadu izotopu strontu λ ma wartość $\frac{\ln 2}{20}$.

Obliczmy teraz, ile procent jąder pozostanie po upływie 10 lat:

$$N = N_0 \cdot e^{-\lambda t},$$

$$N = N_0 \cdot e^{-\frac{\ln 2}{20} \cdot 10} = N_0 \cdot e^{-\frac{1}{2}\ln 2} = N_0 \cdot e^{\ln \frac{\sqrt{2}}{2}} = N_0 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}. \text{ Stąd}$$

$$N \approx 0{,}707 \cdot N_0$$

Po upływie 10 lat pozostanie około 70,7% liczby jąder izotopu strontu.
Podobnie można obliczyć, ile procent jąder pozostanie po upływie 70 lat:

$$N = N_0 \cdot e^{-\frac{\ln 2}{20} \cdot 70} = N_0 \cdot e^{-\frac{7\ln 2}{2}} = N_0 \cdot e^{\ln \sqrt{\frac{1}{128}}} = \sqrt{\frac{1}{128}} \cdot N_0 \approx 0{,}0884 \cdot N_0$$

Po upływie 70 lat pozostanie około 8,84% liczby jąder izotopu strontu.

Sprawdź, czy rozumiesz

1. Naukowcy zauważyli, że z powodu zmian środowiska naturalnego pewien gatunek zwierząt liczący obecnie 1000 sztuk może wyginąć. Oszacowali, że po t latach gatunek ten będzie liczył (w przybliżeniu)

   $N(t) = 1000 \cdot (0{,}9)^t$ sztuk

   a) Oblicz, ile osobników tego gatunku będzie po 5 latach.
   b) Po ilu latach liczba osobników tego gatunku będzie mniejsza niż 250?

2. Elementy analizy matematycznej

Powtórzenie i uzupełnienie wiadomości o granicach ciągów

W tym rozdziale rozpatrywać będziemy tylko nieskończone ciągi liczbowe.

W klasie drugiej poznałeś sformułowanie „prawie wszystkie wyrazy ciągu" odnoszące się do ciągów nieskończonych. Oznacza ono „wszystkie wyrazy ciągu poza skończoną liczbą wyrazów tego ciągu". Przypomnijmy definicję granicy ciągu.

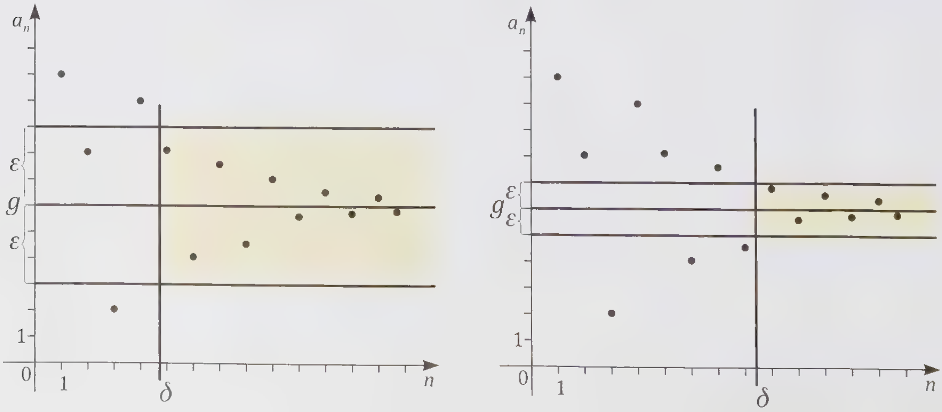
Definicja 1.
Liczba g jest **granicą** ciągu nieskończonego (a_n) wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej liczby dodatniej ε (epsilon) prawie wszystkie wyrazy ciągu (a_n) znajdują się w odległości mniejszej niż ε od liczby g.

Jeśli liczba rzeczywista g jest granicą ciągu (a_n), to zapisujemy: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = g$ lub $a_n \to g$, jeśli $n \to \infty$. Mówimy wówczas, że **ciąg** (a_n) jest **zbieżny** do granicy g.

Prawie wszystkie wyrazy ciągu rozumiemy jako „wszystkie wyrazy ciągu od pewnego miejsca". Zatem wersja równoważna definicji 1. jest następująca:

Definicja 1'.
Liczba g jest **granicą** ciągu nieskończonego (a_n) wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej liczby dodatniej ε istnieje taka liczba δ (delta), że dla każdej liczby naturalnej n większej od δ zachodzi nierówność $|a_n - g| < \varepsilon$.

Zapis symboliczny: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = g \Leftrightarrow \bigwedge\limits_{\varepsilon>0} \bigvee\limits_{\delta} \bigwedge\limits_{n>\delta} |a_n - g| < \varepsilon$



Przykład 1.

Na podstawie powyższej definicji wykażemy, że nieskończony ciąg (a_n), gdzie $a_n = \dfrac{3n-2}{1+n}$, jest zbieżny do 3.

Niech $\varepsilon > 0$. Mamy wykazać, że istnieje taka liczba δ, że dla każdej liczby naturalnej n większej od δ spełniona jest nierówność $|a_n - 3| < \varepsilon$. Rozpatrujemy wyrażenie $|a_n - 3|$. Otrzymujemy:

$$|a_n - 3| = \left|\frac{3n-2}{1+n} - 3\right| = \left|\frac{3n-2}{1+n} - \frac{3+3n}{1+n}\right| = \left|\frac{-5}{1+n}\right| = \frac{5}{1+n} < \frac{5}{n}$$

Mamy zatem:

$$|a_n - 3| = \frac{5}{1+n} < \frac{5}{n} < \varepsilon, \quad \text{stąd} \quad n > \frac{5}{\varepsilon}, \; \delta = \frac{5}{\varepsilon}$$

Pokazaliśmy, że dla każdej liczby dodatniej ε istnieje taka liczba $\delta \left(\text{np.}\, \delta = \dfrac{5}{\varepsilon}\right)$, że dla każdej liczby naturalnej n większej od δ prawdziwa jest nierówność $|a_n - 3| < \varepsilon$, co dowodzi, że $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 3$.

Przypominamy, że każdy ciąg zbieżny ma tylko jedną granicę. Wiesz także, że:

1) Jeśli ciąg (a_n) jest stały i $a_n = a$, to ciąg (a_n) jest zbieżny i $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

2) Jeśli $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ i $a_n \geqslant 0$ dla każdej liczby n, gdzie $n \in \mathbf{N}_+$, to $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{a}$.

3) Jeśli $|q| < 1$, to ciąg nieskończony (a_n), gdzie $a_n = q^n$ jest zbieżny i $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$.

Obliczanie granic ciągów zbieżnych ułatwia nam następujące twierdzenie.

Twierdzenie 1. (o działaniach arytmetycznych na granicach ciągów zbieżnych)

Jeśli $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ i $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, to istnieją granice ciągów $(a_n + b_n)$, $(a_n - b_n)$, $(a_n \cdot b_n)$ oraz $\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right)$ przy dodatkowym założeniu, że $b \neq 0$ i $b_n \neq 0$ dla każdej liczby naturalnej dodatniej n, i prawdziwe są następujące równości:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a + b$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n - b_n) = a - b$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{a_n}{b_n}\right) = \dfrac{a}{b}$

Przykład 2.

Obliczymy granice:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(2-\frac{1}{n^2}\right)\left(5+\frac{3}{n}\right)\right]$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{7\cdot 4^{n+1}-8}{2\cdot 4^n+2^n}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n-\sqrt{n^2+5n}\right)$

Ad a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(2-\frac{1}{n^2}\right)\left(5+\frac{3}{n}\right)\right]=\lim\limits_{n\to\infty}\left(2-\frac{1}{n^2}\right)\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\left(5+\frac{3}{n}\right)=(2-0)\cdot(5+0)=10$

Ad b) Najpierw dzielimy licznik i mianownik ułamka $\frac{7\cdot 4^{n+1}-8}{2\cdot 4^n+2^n}$ przez 4^n, następnie korzystamy z własności granic.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{7\cdot 4^{n+1}-8}{2\cdot 4^n+2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{7\cdot 4-\frac{8}{4^n}}{2+\left(\frac{1}{2}\right)^n}=\frac{28-0}{2+0}=14$$

Ad c) Wyrażenie $\left(n-\sqrt{n^2+5n}\right)$ mnożymy i dzielimy przez wyrażenie $\left(n+\sqrt{n^2+5n}\right)$, następnie stosujemy wzór skróconego mnożenia na różnicę kwadratów oraz dzielimy licznik i mianownik przez n. Na koniec stosujemy twierdzenia o granicach ciągów zbieżnych.

$$\lim_{n\to\infty}\left(n-\sqrt{n^2+5n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left[\left(n-\sqrt{n^2+5n}\right)\frac{n+\sqrt{n^2+5n}}{n+\sqrt{n^2+5n}}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-n^2-5n}{n+\sqrt{n^2+5n}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{-5}{1+\sqrt{1+\frac{5}{n}}}=\frac{-5}{1+\sqrt{1+0}}=\frac{-5}{2}$$

W klasie drugiej poznałeś również twierdzenie o trzech ciągach. Przypomnijmy je.

Twierdzenie 2. (o trzech ciągach)
Jeśli dane są trzy ciągi nieskończone (a_n), (b_n), (c_n), $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}c_n=g$ oraz istnieje taka liczba δ, że dla każdej liczby naturalnej n większej od δ prawdziwa jest nierówność $a_n\leqslant b_n\leqslant c_n$, to $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=g$.

Przykład 3.

Obliczymy granicę $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin n}{n}$.

Wiemy, że

$-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$, jeśli $x \in \mathbf{R}$

Zatem dla każdej liczby naturalnej dodatniej n prawdziwa jest nierówność:

$$\frac{-1}{n} \leqslant \frac{\sin n}{n} \leqslant \frac{1}{n}$$

Ponadto

$$\lim_{n\to\infty}\frac{-1}{n} = 0 \text{ oraz } \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$$

Na mocy twierdzenia o trzech ciągach $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin n}{n} = 0$.

Teraz udowodnimy następujące twierdzenie.

Twierdzenie 3.

Jeśli $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, to $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = |a|$.

Dowód: W klasie pierwszej (zobacz podręcznik str. 80, twierdzenie 1.) dowiedziałeś się, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y prawdziwa jest nierówność podwójna

(*) $|x| - |y| \leqslant |x + y| \leqslant |x| + |y|$

Niech nieskończony ciąg (a_n) będzie zbieżny do granicy a.

Przyjmijmy: $x = a,\ y = a_n - a$.

Uwzględniając (*), otrzymujemy:

$$|a| - |a_n - a| \leqslant |a_n| \leqslant |a| + |a_n - a|, \quad \text{skąd}$$

(**) $\quad -|a_n - a| \leqslant |a_n| - |a| \leqslant |a_n - a|$

Ponieważ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, więc dla każdej liczby dodatniej ε istnieje taka liczba δ, że jeśli $n > \delta$, to

(***) $\quad |a_n - a| < \varepsilon$, czyli $-|a_n - a| > -\varepsilon$

Zatem z nierówności (**) i (***) wynika, że

$$-\varepsilon < |a_n| - |a| < \varepsilon,$$

a to znaczy, że dla $n > \delta$ spełniona jest nierówność

$$\big||a_n| - |a|\big| < \varepsilon, \quad \text{czyli}$$

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = |a|,$$

co kończy dowód.

Przykład 4.

Obliczymy granicę $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{5n^3-125}{(10-2n)^3}\right|$.
Mamy:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5n^3-125}{(10-2n)^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{5n^3-125}{n^3\left(\frac{10}{n}-2\right)^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{5-\frac{125}{n^3}}{\left(\frac{10}{n}-2\right)^3}=-\frac{5}{8}$$

Zatem na mocy twierdzenia 3. otrzymujemy:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{5n^3-125}{(10-2n)^3}\right|=\left|-\frac{5}{8}\right|=\frac{5}{8}$$

UWAGA: Twierdzenie odwrotne do ostatniego twierdzenia nie jest zdaniem prawdziwym. Z tego, że ciąg $(|a_n|)$ jest zbieżny, nie musi wynikać, że ciąg (a_n) jest zbieżny. Na przykład jeśli $a_n=(-1)^n$, $n\in N_+$, to $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=\lim\limits_{n\to\infty}1=1$, natomiast ciąg (a_n) nie jest zbieżny.

Prawdziwe jest natomiast twierdzenie.

Twierdzenie 4.

Jeśli $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=0$, to $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

Spróbuj udowodnić to twierdzenie.

W klasie drugiej poznałeś również ciągi rozbieżne do plus nieskończoności $(+\infty)$ oraz ciągi rozbieżne do minus nieskończoności $(-\infty)$. Przypomnijmy:

Definicja 2.

Ciąg nieskończony (a_n) nazywamy **ciągiem rozbieżnym do plus nieskończoności** (odpowiednio **ciągiem rozbieżnym do minus nieskończoności**) wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej liczby M istnieje taka liczba δ, że dla każdej liczby naturalnej $n>\delta$ zachodzi nierówność $a_n>M$ (odpowiednio $a_n<M$).

Zapis symboliczny:

$$\lim_{n\to\infty}a_n=+\infty \Leftrightarrow \bigwedge_{M}\bigvee_{\delta}\bigwedge_{n>\delta}a_n>M \qquad \lim_{n\to\infty}a_n=-\infty \Leftrightarrow \bigwedge_{M}\bigvee_{\delta}\bigwedge_{n>\delta}a_n<M$$

Twierdzenie 5.

Dane są nieskończone ciągi (a_n) i (b_n), dla których $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$. Wówczas:

1) jeśli $b > 0$, to $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = +\infty$ 2) jeśli $b < 0$, to $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = -\infty$.

Prawdziwe jest również analogiczne twierdzenie wtedy, gdy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$ oraz $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, $b \neq 0$.

Przykład 5.

Obliczymy granice:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(5n^4 + 18n^3 - 17n + 1\right)$ b) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{-5n^3 + 3n - 2}{(2n-1)^2}$

Ad a) Wyłączamy n^4 poza nawias i otrzymujemy:

$$\lim_{n\to\infty}\left(5n^4 + 18n^3 - 17n + 1\right) = \lim_{n\to\infty}\left[\overset{+\infty}{\boxed{n^4}} \cdot \overset{5}{\boxed{\left(5 + \frac{18}{n} - \frac{17}{n^3} + \frac{1}{n^4}\right)}}\right] = +\infty$$

Ad b) Dzielimy licznik i mianownik ułamka przez n^2. Następnie wyłączamy w liczniku n poza nawias. Mamy:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{-5n^3 + 3n - 2}{(2n-1)^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{-5n + \frac{3}{n} - \frac{2}{n^2}}{\left(2 - \frac{1}{n}\right)^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{\overset{+\infty}{\boxed{n}} \cdot \overset{-5}{\boxed{\left(-5 + \frac{3}{n^2} - \frac{2}{n^3}\right)}}}{\underset{4}{\boxed{\left(2 - \frac{1}{n}\right)^2}}} = -\infty$$

Twierdzenie 6.

Jeśli dany jest ciąg nieskończony (a_n), dla którego $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, to $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{|a_n|} = +\infty$.

Sprawdź, czy rozumiesz

1. Wykaż, że granicą nieskończonego ciągu a_n, gdzie $a_n = \dfrac{12n^2}{n + 3n^2}$, jest liczba 4.
2. Na podstawie twierdzenia o trzech ciągach wyznacz granicę $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\cos(2n)}{n^2}$.
3. Podaj przykład ciągu (a_n) rozbieżnego do minus nieskończoności. Następnie dobierz taki ciąg zbieżny (b_n), żeby ciąg $(a_n \cdot b_n)$:
   a) był rozbieżny do plus nieskończoności b) był zbieżny.

Granica funkcji w punkcie

W poprzednim temacie przypomnieliśmy pojęcie granicy ciągu. Badaliśmy, do czego dążą wyrazy ciągu (a_n), jeśli n dąży do plus nieskończoności. Teraz zajmiemy się uogólnieniem pojęcia granicy na przypadek innych funkcji. Wykorzystamy do tego pojęcie granicy ciągu.

Niech dana będzie funkcja f, określona „wokół" punktu x_0. Będziemy badać, do jakiej liczby (granicy) „dążą" wartości $f(x)$ funkcji f, jeśli argumenty x są „coraz bliższe" liczby x_0. Doprecyzujmy: żeby móc mówić o granicy funkcji f w punkcie x_0, funkcja f musi być określona „wokół" punktu x_0, czyli w pewnym sąsiedztwie punktu x_0.

Sąsiedztwem punktu x_0 o promieniu δ $(\delta > 0)$ nazywamy zbiór $(x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$ i oznaczamy $S(x_0)$ lub $S(x_0, \delta)$. Przedział $(x_0 - \delta, x_0)$ będziemy nazywać **sąsiedztwem lewostronnym** punktu x_0 o promieniu δ $(\delta > 0)$ i będziemy oznaczać $S_-(x_0)$ lub $S_-(x_0, \delta)$. Podobnie przedział $(x_0, x_0 + \delta)$ będziemy nazywać **sąsiedztwem prawostronnym** i oznaczać $S_+(x_0)$ lub $S_+(x_0, \delta)$.
A czy funkcja ma być określona w samym punkcie x_0? Dla zbadania, czy istnieje granica funkcji w punkcie x_0, nie ma żadnego znaczenia, czy funkcja jest określona w punkcie x_0, czy też nie.

Rozważmy teraz pewien ciąg (a_n) o wyrazach należących do sąsiedztwa $S(x_0)$ i takiego, że

$$\lim_{n\to\infty} a_n = x_0$$

Niech teraz ciąg wartości $\left(f\left(a_n\right)\right)$ będzie zbieżny do liczby g, czyli

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = g$$

Czy to wystarczy, żeby liczbę g uznać za granicę funkcji f w punkcie x_0? Otóż nie. Może się zdarzyć, że dla innego ciągu o wyrazach należących do $S(x_0)$ i zbieżnego do x_0 odpowiadający mu ciąg wartości funkcji nie jest zbieżny lub jest zbieżny do granicy g_1 $(g_1 \neq g)$. W takim przypadku granica funkcji f w punkcie x_0 nie jest określona.

Rozważmy teraz funkcję

$$f(x) = \frac{(x-3)^2}{|x-3|} - 2, \text{ gdzie } x \in \boldsymbol{R} - \{3\}.$$

Funkcja f jest określona w dowolnym sąsiedztwie punktu $x_0 = 3$. Zbadamy, czy istnieje granica funkcji f w punkcie $x_0 = 3$. Weźmy sąsiedztwo punktu 3 o promieniu 2, czyli $S(3) = (1, 3) \cup (3, 5)$. Rozpatrzmy trzy ciągi nieskończone (a_n), (b_n), (c_n), gdzie

$$a_n = 3 + \frac{1}{n}, \quad b_n = 3 - \frac{1}{n}, \quad c_n = 3 + \frac{(-1)^n}{n}.$$

Zauważ, że wyrazy ciągu (a_n) leżą w prawostronnym sąsiedztwie punktu 3 (w przedziale $(3, 5)$), wyrazy ciągu (b_n) – w lewostronnym sąsiedztwie punktu 3 (w przedziale $(1, 3)$), a wyrazy ciągu (c_n) – na przemian: w lewostronnym i prawostronnym sąsiedztwie punktu 3. Ponadto

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} c_n = 3$$

Wyznaczmy ciągi wartości funkcji f odpowiednio dla ciągów (a_n), (b_n), (c_n). Mamy:

$$f(a_n) = \frac{\left(3+\frac{1}{n}-3\right)^2}{\left|3+\frac{1}{n}-3\right|} - 2 = \frac{\frac{1}{n^2}}{\left|\frac{1}{n}\right|} - 2 = \frac{1}{n} - 2$$

$$f(b_n) = \frac{\left(3-\frac{1}{n}-3\right)^2}{\left|3-\frac{1}{n}-3\right|} - 2 = \frac{\left(-\frac{1}{n}\right)^2}{\left|-\frac{1}{n}\right|} - 2 = \frac{1}{n} - 2$$

$$f(c_n) = \frac{\left(3+\frac{(-1)^n}{n}-3\right)^2}{\left|3+\frac{(-1)^n}{n}-3\right|} - 2 = \frac{\frac{1}{n^2}}{\left|\frac{1}{n}\right|} - 2 = \frac{1}{n} - 2$$

Stąd

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{n\to\infty} f(b_n) = \lim_{n\to\infty} f(c_n) = \lim_{n\to\infty}\left(\underbrace{\boxed{\frac{1}{n}}}_{\to 0} - 2\right) = -2$$

W każdym przypadku ciąg wartości funkcji jest zbieżny do liczby –2. Jednak na tej podstawie w dalszym ciągu nie możemy stwierdzić, że granica funkcji f w punkcie 3 jest równa –2. Sprawdzenie zbieżności dla dużo większej liczby ciągów nie daje podstaw do wyciągnięcia wniosku dotyczącego granicy funkcji w danym punkcie.

W przypadku istnienia granicy funkcji w punkcie x_0 powinniśmy stwierdzić, że ciąg wartości funkcji $(f(a_n))$ jest zbieżny do granicy g <u>dla każdego</u> ciągu (a_n) o wyrazach należących do $S(x_0)$ i zbieżnego do x_0.

Przeprowadzimy rozumowanie ogólne.

Niech (x_n) będzie ciągiem o wyrazach należących do $S(3)$ takim, że $\lim_{n\to\infty} x_n = 3$. Wówczas

$$f(x_n) = \frac{(x_n-3)^2}{|x_n-3|} - 2 = \frac{|x_n-3|\cdot\cancel{|x_n-3|}^{\,1}}{\cancel{|x_n-3|}_{\,1}} - 2 = |x_n-3| - 2$$

Z założenia wiemy, że

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 3,$ to znaczy, że

$\lim\limits_{n\to\infty} (x_n - 3) = 0,$ a więc (na mocy twierdzenia 3 ze str. 79)

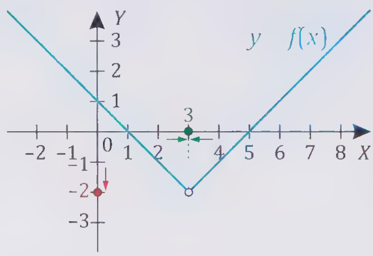
$\lim\limits_{n\to\infty} |x_n - 3| = 0,$ stąd

$\lim\limits_{n\to\infty} (|x_n - 3| - 2) = -2,$ zatem

$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} (|x_n - 3| - 2) = -2$

Powyższe rozumowanie jest prawdziwe w przypadku <u>dowolnego</u> ciągu (x_n) zbieżnego do 3 o wyrazach różnych od 3. Tym samym pokazaliśmy, że funkcja f ma w punkcie 3 granicę równą -2.

Rysunek poniżej przedstawia wykres funkcji f:



Możemy przyjąć następującą definicję:

Definicja 1.
Niech funkcja f będzie określona w pewnym sąsiedztwie $S(x_0)$.
Granicą funkcji f w punkcie x_0 jest liczba g – co zapisujemy $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = g$ – wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego ciągu (x_n) takiego, że $x_n \in S(x_0)$ oraz $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, prawdziwa jest równość $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = g$.

Zapis symboliczny: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = g \overset{def}{\Leftrightarrow} \bigwedge\limits_{(x_n)} \left[\left(x_n \in S(x_0) \wedge \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0\right) \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = g\right]$

Definicję powyższą nazywa się definicją Heinego granicy funkcji w punkcie. Edward Heine (wym. hajne), niemiecki matematyk, żył w latach 1821–1881, był profesorem uniwersytetu w Bonn i Halle, zajmował się różnymi działami analizy matematycznej.

Przykład 1.

Na podstawie definicji 1. obliczymy $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, jeśli:

a) $f(x) = -2x + 10$ i $x_0 = 4$

b) $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 2}{x + 1}$ i $x_0 = -1$

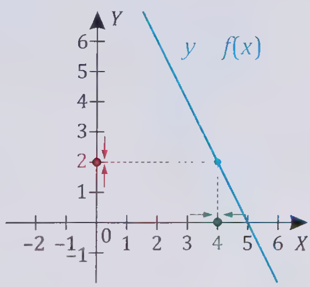
c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{0{,}5(x^2 - 9)}{x - 3}, & \text{jeśli } x \neq 3 \\ 4, & \text{jeśli } x = 3 \end{cases}$ i $x_0 = 3$

Ad a) Dziedziną funkcji f jest zbiór $\boldsymbol{R}$. Funkcja jest więc określona w sąsiedztwie $S(4)$. Weźmy dowolny ciąg (x_n) o wyrazach należących do sąsiedztwa $S(4)$, zbieżny do liczby 4, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 4$. Mamy:

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} (-2x_n + 10) = -2\lim_{n\to\infty} x_n + 10 = -2 \cdot 4 + 10 = 2,$$

a to znaczy, że

$$\lim_{x\to 4} f(x) = 2$$



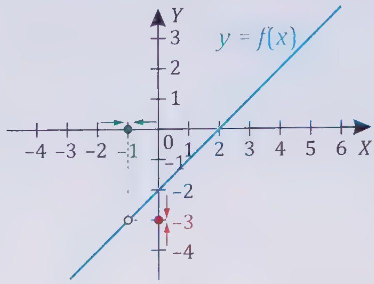
Ad b) Dziedziną funkcji f jest zbiór $\boldsymbol{R} \setminus \{-1\}$. Funkcja f jest określona w sąsiedztwie $S(-1)$. Weźmy dowolny ciąg (x_n) o wyrazach należących do sąsiedztwa $S(-1)$, zbieżny do liczby -1, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -1$. Wówczas mamy:

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{\overset{\to 0}{\boxed{x_n^2 - x_n - 2}}}{\underset{\to 0}{\boxed{x_n + 1}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{(x_n + 1)}^{1}(x_n - 2)}{\cancel{(x_n + 1)}_{1}} = \lim_{n\to\infty} (x_n - 2) = -1 - 2 = -3$$

Zatem

$$\lim_{x\to -1} f(x) = -3$$

Zauważ, że obliczając granicę, mogliśmy skrócić ułamek przez $x_n + 1$, bowiem dla dowolnej liczby naturalnej n jest $x_n \neq -1$ (czyli nie dzielimy przez zero!).

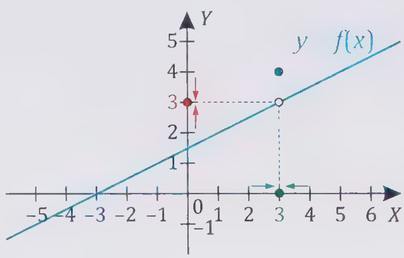


Ad c) Dziedziną funkcji f jest zbiór $\boldsymbol{R}$, więc funkcja jest określona w sąsiedztwie $S(3)$. Weźmy dowolny ciąg (x_n) o wyrazach należących do sąsiedztwa $S(3)$, zbieżny do liczby 3, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 3$. Wówczas

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{\boxed{0{,}5\left(x_n^2 - 9\right)} \to 0}{\boxed{x_n - 3} \to 0} = \lim_{n\to\infty} \frac{0{,}5(x_n+3)\cancel{(x_n-3)}^{1}}{\cancel{(x_n-3)}_{1}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[0{,}5(x_n+3)\right] = 0{,}5(3+3) = 3, \text{ zatem}$$

$$\lim_{x\to 3} f(x) = 3$$



Nie zawsze istnieje granica funkcji f w danym punkcie x_0, mimo że funkcja f jest określona w pewnym sąsiedztwie punktu x_0. Z definicji 1. wynika, że aby to udowodnić, wystarczy wskazać dwa różne ciągi (a_n) i (b_n), które spełniają warunki:

1) wyrazy obu ciągów należą do sąsiedztwa $S(x_0)$ i $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = x_0$ oraz
2) $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) \neq \lim\limits_{n\to\infty} f\left(b_n\right)$.

Przykład 2.

Wykażemy, że nie istnieje granica funkcji $f(x) = \dfrac{|x|^3 + x}{|x|}$ w punkcie $x_0 = 0$.

Dziedziną funkcji f jest zbiór $\boldsymbol{R} - \{0\}$. Funkcja f jest więc określona w sąsiedztwie $S(0)$. Rozważmy ciąg (a_n), gdzie $a_n = \dfrac{1}{n}$, $n \in \boldsymbol{N}_+$. Mamy:

$$a_n \in S(0) \text{ i } \lim_{n\to\infty} a_n = 0, \text{ ponadto } a_n > 0, \text{ jeśli } n \in \boldsymbol{N}_+, \text{ więc } |a_n| = a_n$$

Obliczamy:

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|^3 + a_n}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left|\frac{1}{n}\right|^3 + \frac{1}{n}}{\left|\frac{1}{n}\right|} = \lim_{n\to\infty}\left(\overset{\nearrow 0}{\boxed{\frac{1}{n^2}}} + 1\right) = 1$$

Weźmy teraz ciąg (b_n), gdzie $b_n = \frac{-1}{n}$, $n \in \boldsymbol{N}_+$. Mamy:

$b_n \in S(0)$ i $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$, ponadto $b_n < 0$, jeśli $n \in \boldsymbol{N}_+$, więc $|b_n| = -b_n$

Obliczamy:

$$\lim_{n\to\infty} f(b_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{|b_n|^3 + b_n}{|b_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left|\frac{-1}{n}\right|^3 + \frac{(-1)}{n}}{\left|\frac{-1}{n}\right|} = \lim_{n\to\infty}\left(\overset{\nearrow 0}{\boxed{\frac{1}{n^2}}} - 1\right) = -1$$

Wskazaliśmy dwa różne ciągi (a_n), (b_n), które spełniają warunki:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 0 \text{ oraz}$$

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) \neq \lim_{n\to\infty} f(b_n)$$

To znaczy, że granica funkcji $f(x) = \frac{|x|^3 + x}{|x|}$ w punkcie $x_0 = 0$ nie istnieje.

Sprawdź, czy rozumiesz

1. Na podstawie definicji Heinego granicy funkcji w punkcie wykaż, że granicą funkcji f w punkcie x_0 jest liczba g, jeśli:

   a) $f(x) = -2x + 5$, $x_0 = 1$, $g = 3$

   b) $f(x) = \frac{x^2 + x}{2x}$, $x_0 = 0$, $g = \frac{1}{2}$

   c) $f(x) = \frac{16 - x^2}{x - 4}$, $x_0 = 4$, $g = -8$

   d) $f(x) = \frac{|x|^3 - x^2}{|x|}$, $x_0 = 0$, $g = 0$

2. Wykaż, że nie istnieje granica funkcji f w punkcie x_0, jeśli

   a) $f(x) = \frac{|3x|}{x}$, $x_0 = 0$

   b) $f(x) = \frac{x - 5}{|x - 5|}$, $x_0 = 5$

Obliczanie granic funkcji w punkcie

Obliczanie granic funkcji w punkcie ułatwiają twierdzenia wynikające bezpośrednio z własności granic ciągów oraz z definicji Heinego granicy funkcji w punkcie.

Twierdzenie 1.

Jeżeli funkcja f jest określona w pewnym sąsiedztwie $S(x_0)$ oraz:

a) funkcja f jest stała, tzn. $f(x) = c$, jeśli $x \in S(x_0)$, to istnieje granica funkcji f w punkcie x_0 i $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = c$;

b) $f(x) = x$, jeśli $x \in S(x_0)$, to istnieje granica funkcji f w punkcie x_0 i $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = x_0$.

Twierdzenie 2.

Jeżeli istnieją granice $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x)$ oraz c jest dowolną liczbą rzeczywistą, to istnieją również granice: $\lim\limits_{x \to x_0}[c \cdot f(x)]$, $\lim\limits_{x \to x_0}[f(x) + g(x)]$, $\lim\limits_{x \to x_0}[f(x) - g(x)]$, $\lim\limits_{x \to x_0}[f(x) \cdot g(x)]$, $\lim\limits_{x \to x_0}\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]$ (przy dodatkowym założeniu, że $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) \neq 0$) i prawdziwe są równości:

a) $\lim\limits_{x \to x_0}[c \cdot f(x)] = c \cdot \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$

b) $\lim\limits_{x \to x_0}[f(x) + g(x)] = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) + \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$

c) $\lim\limits_{x \to x_0}[f(x) - g(x)] = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) - \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$

d) $\lim\limits_{x \to x_0}[f(x) \cdot g(x)] = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$

e) $\lim\limits_{x \to x_0}\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right] = \dfrac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)}$

Twierdzenie 3.

Jeśli $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = g$, gdzie $g > 0$, to $\lim\limits_{x \to x_0} \sqrt{f(x)} = \sqrt{g}$.

Przykład 1.

Obliczymy $\lim\limits_{x\to -2}(x^4+5x-10)$.

Z twierdzenia 1b wynika, że $\lim\limits_{x\to-2} x=-2$, zatem

$$\lim_{x\to-2} x^4=\left(\lim_{x\to-2} x\right)^4=(-2)^4 \qquad \text{(twierdzenie 2d)}$$

$$\lim_{x\to-2}(5x)=5\cdot\lim_{x\to-2} x=5\cdot(-2) \qquad \text{(twierdzenie 2a)}$$

$$\lim_{x\to-2} 10=10 \qquad \text{(twierdzenie 1a)}$$

Tak więc

$$\lim_{x\to-2}(x^4+5x-10)=(-2)^4+5\cdot(-2)-10=-4$$

Bez trudu można zauważyć, że granicą funkcji wielomianowej $y=x^4+5x-10$, jeśli x dąży do -2, jest wartość tej funkcji dla argumentu -2. Podobnie jest dla innych wielomianów.

Wniosek: Granicą funkcji wielomianowej $y=W(x)$ w punkcie a jest wartość, jaką ta funkcja przyjmuje dla argumentu a, czyli

$$\lim_{x\to a} W(x)=W(a)$$

Przykład 2.

Obliczymy $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2x+12}{x^2-6x+3}$.

Zauważ, że jeśli x dąży do 1, to mianownik ułamka <u>nie dąży</u> do zera,

$$\lim_{x\to1}(x^2-6x+3x)=-2$$

Możemy zatem zastosować twierdzenie 2e. Mamy:

$$\lim_{x\to1}\frac{2x+12}{x^2-6x+3}=\frac{\lim\limits_{x\to1}(2x+12)}{\lim\limits_{x\to1}(x^2-6x+3)}$$

Dalej postępujemy jak w przykładzie 1.

$$\frac{\lim\limits_{x\to1}(2x+12)}{\lim\limits_{x\to1}(x^2-6x+3)}=\frac{2\cdot1+12}{1^2-6\cdot1+3}=\frac{14}{-2}=-7, \text{ czyli}$$

$$\lim_{x\to1}\frac{2x+12}{x^2-6x+3}=-7$$

Prawdziwy jest następujący wniosek.

Wniosek: Jeśli dane są wielomiany $W_1(x)$, $W_2(x)$ oraz $W_2(a) \neq 0$, to granica funkcji wymiernej $y = \frac{W_1(x)}{W_2(x)}$ w punkcie a jest równa $\frac{W_1(a)}{W_2(a)}$, czyli

$$\lim_{x \to a} \frac{W_1(x)}{W_2(x)} = \frac{W_1(a)}{W_2(a)}$$

Przykład 3.

Obliczymy granice:

a) $\lim\limits_{x \to -3} \frac{x^2 + 2x - 3}{x^3 + x^2 - 9x - 9}$ b) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt{3x+4} - 2}{6x}$

Ad a) Jeśli x dąży do -3, to wartość wielomianu w mianowniku dąży do zera (sprawdź!). Nie możemy więc teraz zastosować twierdzenia 2e. Ponadto, jeśli x dąży do -3, to również wartość wielomianu w liczniku dąży do zera (sprawdź!). Rozłóżmy te wielomiany na czynniki:

$$\lim_{x \to -3} \frac{x^2 + 2x - 3}{x^3 + x^2 - 9x - 9} = \lim_{x \to -3} \frac{{}^{1}\cancel{(x+3)}(x-1)}{\underset{1}{\cancel{(x+3)}}(x-3)(x+1)}$$

Skrócenie ułamka przez wyrażenie $(x + 3)$ jest możliwe, ponieważ x należy do sąsiedztwa liczby -3, zatem x jest różny od -3. Dalej postępujemy jak w przykładzie 2.

$$\lim_{x \to -3} \frac{x-1}{(x-3)(x+1)} = \frac{-4}{-6 \cdot (-2)} = \frac{-1}{3}, \text{ czyli}$$

$$\lim_{x \to -3} \frac{x^2 + 2x - 3}{x^3 + x^2 - 9x - 9} = \frac{-1}{3}$$

Ad b) Podobnie jak w przykładzie a) zarówno licznik, jak i mianownik ułamka dążą do zera, jeśli x dąży do zera. W tym przypadku przekształcamy ułamek w ten sposób, że mnożymy jego licznik i mianownik przez wyrażenie $\left(\sqrt{3x+4} + 2\right)$. To umożliwi nam zastosowanie wzoru skróconego mnożenia na różnicę kwadratów. Mamy:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{3x+4} - 2}{6x} = \lim_{x \to 0} \frac{\left(\sqrt{3x+4} - 2\right)\left(\sqrt{3x+4} + 2\right)}{6x\left(\sqrt{3x+4} + 2\right)} = \lim_{x \to 0} \frac{\left(\sqrt{3x+4}\right)^2 - 2^2}{6x\left(\sqrt{3x+4} + 2\right)} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{3x}{6x\left(\sqrt{3x+4} + 2\right)} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{2\left(\underbrace{\boxed{\sqrt{3x+4}}}_{2} + 2\right)} = \frac{1}{8}$$

Konsekwencją twierdzenia o trzech ciągach jest twierdzenie o trzech funkcjach.

Twierdzenie 3. (o trzech funkcjach)
Jeżeli funkcje f, g, h są określone w pewnym sąsiedztwie $S(x_0)$ i dla dowolnej liczby x z tego sąsiedztwa spełniona jest nierówność $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$ oraz istnieją granice funkcji f i h w punkcie x_0 i $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} h(x) = a$, to istnieje granica funkcji g w punkcie x_0 i $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = a$.

Przykład 4.

Obliczymy $\lim\limits_{x \to 0}\left(2x \cdot \sin\frac{1}{x}\right)$.

Do obliczenia tej granicy wykorzystamy twierdzenie o trzech funkcjach. Zauważmy najpierw, że jeśli $x \in \boldsymbol{R} - \{0\}$, to

$$-1 \leqslant \sin\frac{1}{x} \leqslant 1, \quad \text{stąd}$$

$$-2|x| \leqslant 2x \cdot \sin\frac{1}{x} \leqslant 2|x|$$

Mamy:

$\lim\limits_{x \to 0} x = 0$, więc

$\lim\limits_{x \to 0}(-2|x|) = \lim\limits_{x \to 0}(2|x|) = 0$,

zatem na mocy twierdzenia o trzech funkcjach $\lim\limits_{x \to 0}\left(2x \cdot \sin\frac{1}{x}\right) = 0$.

Sprawdź, czy rozumiesz

1. Oblicz granice:

   a) $\lim\limits_{x \to 1}(-2x^2 + 3x + 4)$
   b) $\lim\limits_{x \to -2}\sqrt{x - x^2 + 15}$
   c) $\lim\limits_{x \to -1}\left(\frac{2}{x} - 4x^3\right)$
   d) $\lim\limits_{x \to 4}\frac{x^2 - 5x}{x + 2}$

2. Oblicz granice:

   a) $\lim\limits_{x \to 0}\frac{x^2 - 6x}{x}$
   b) $\lim\limits_{x \to -1}\frac{x^2 + 2x + 1}{x + 1}$
   c) $\lim\limits_{x \to 2}\frac{x^2 - 4}{x^2 - 5x + 6}$
   d) $\lim\limits_{x \to 1}\frac{\sqrt{x + 3} - 2}{x - 1}$

3. Na podstawie twierdzenia o trzech funkcjach oblicz granicę $\lim\limits_{x \to 0}\left(\frac{1}{3}x \cdot \sin 5x\right)$.

Granice jednostronne funkcji w punkcie

Rozważmy funkcję $f(x)=\sqrt{1-x^2}$. Dziedziną tej funkcji jest przedział $\langle -1, 1\rangle$. Dla każdej liczby x_0 z przedziału $(-1, 1)$ możemy obliczyć granicę $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$. Inaczej jest w przypadku punktów -1 i 1. Funkcja f jest określona tylko w prawostronnym sąsiedztwie -1 i tylko w lewostronnym sąsiedztwie 1. Możemy więc badać granicę funkcji f przy x dążącym do -1 tylko przez wartości większe od -1 (czyli przy x dążącym do -1 z prawej strony). Podobnie możemy badać granicę funkcji f przy x dążącym do 1 tylko przez wartości mniejsze od 1 (czyli przy x dążącym do 1 z lewej strony). Prowadzi to nas do pojęcia granic jednostronnych.

Definicja 1.

Niech funkcja f będzie określona w pewnym prawostronnym sąsiedztwie $S_+(x_0)$. **Granicą prawostronną funkcji f w punkcie** x_0 jest liczba g – co zapisujemy $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=g$ – wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego ciągu (x_n) o wyrazach należących do $S_+(x_0)$ i takiego, że $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, prawdziwa jest równość $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=g$.

Zapis symboliczny: $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=g \overset{def}{\Leftrightarrow} \bigwedge\limits_{(x_n)} \left[\left(x_n\in S_+(x_0)\wedge \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0\right) \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=g\right]$

Definicja 2.

Niech funkcja f będzie określona w pewnym lewostronnym sąsiedztwie $S_-(x_0)$. **Granicą lewostronną funkcji f w punkcie** x_0 jest liczba g – co zapisujemy $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=g$ – wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego ciągu (x_n) o wyrazach należących do $S_-(x_0)$ i takiego, że $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, prawdziwa jest równość $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=g$.

Zapis symboliczny: $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=g \overset{def}{\Leftrightarrow} \bigwedge\limits_{(x_n)} \left[\left(x_n\in S_-(x_0)\wedge \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0\right) \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=g\right]$

Wracając do funkcji $f(x)=\sqrt{1-x^2}$, gdzie $x\in\langle -1, 1\rangle$, z początku tematu, możemy zapisać

$$\lim_{x\to -1^+}\sqrt{1-x^2}=0 \qquad \text{oraz} \qquad \lim_{x\to 1^-}\sqrt{1-x^2}=0$$

Na stronie 86 wykazaliśmy, że nie istnieje granica funkcji $f(x) = \dfrac{|x|^3 + x}{|x|}$ w punkcie 0. Teraz udowodnimy, że w punkcie 0 istnieją (różne) granice jednostronne.

Niech (x_n) będzie dowolnym ciągiem o wyrazach należących do $S_+(0)$ i takim, że $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. Wszystkie wyrazy ciągu (x_n) są dodatnie, więc $|x_n| = x_n$, gdzie $n \in \boldsymbol{N}_+$.
Obliczamy:

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{|x_n|^3 + x_n}{|x_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n^{\ 3} + x_n}{x_n} = \lim_{n\to\infty} (x_n^{\ 2} + 1) = 1$$

Zatem

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$$

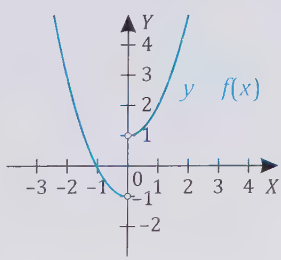
Niech teraz (x_n) będzie dowolnym ciągiem o wyrazach należących do $S_-(0)$ i takim, że $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. Wszystkie wyrazy ciągu (x_n) są ujemne, więc $|x_n| = -x_n$, gdzie $n \in \boldsymbol{N}_+$.
Mamy:

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{|x_n|^3 + x_n}{|x_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{(-x_n)^3 + x_n}{-x_n} = \lim_{n\to\infty} (x_n^{\ 2} - 1) = -1,$$

co znaczy, że

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = -1$$

Rysunek poniżej przedstawia wykres funkcji f:



Prawdziwe jest następujące twierdzenie.

Twierdzenie 1.
Niech funkcja f będzie określona w pewnym sąsiedztwie $S(x_0)$.
Granica funkcji f w punkcie x_0 istnieje i jest równa g wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją granice: lewostronna i prawostronna tej funkcji w punkcie x_0 i granice te są równe g, czyli

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = g \Leftrightarrow \left[\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x) = g\right].$$

Przykład 1.

Zbadamy istnienie granicy funkcji f w punkcie x_0, wyznaczając odpowiednie granice jednostronne, jeśli:

a) $f(x) = \dfrac{|x+5|}{x+1}$, $x_0 = -5$

b) $f(x) = \begin{cases} 3x-1, & \text{jeśli } x > 2 \\ \dfrac{x^2+x-6}{x-2}, & \text{jeśli } x < 2 \end{cases}$, $x_0 = 2$

Ad a) W lewostronnym sąsiedztwie punktu –5 funkcja f określona jest wzorem

$f(x) = \dfrac{-x-5}{x+1}$,

zatem

$$\lim_{x\to-5^-} f(x) = \lim_{x\to-5^-} \frac{-x-5}{x+1} = \frac{0}{-4} = 0$$

W prawostronnym sąsiedztwie punktu –5 funkcja f opisana jest wzorem

$f(x) = \dfrac{x+5}{x+1}$,

więc

$$\lim_{x\to-5^+} f(x) = \lim_{x\to-5^+} \frac{x+5}{x+1} = \frac{0}{-4} = 0$$

Obie granice jednostronne funkcji f w punkcie 5 istnieją i są równe 0, zatem granica funkcji f w punkcie –5 istnieje i jest równa 0, czyli $\lim\limits_{x\to -5} f(x) = 0$.

Ad b) Postępujemy podobnie:

$$\lim_{x\to2^-} f(x) = \lim_{x\to2^-} \frac{\boxed{x^2+x-6}}{\boxed{x-2}} = \lim_{x\to2^-} \frac{\cancel{(x-2)}^{1}(x+3)}{\cancel{(x-2)}_{1}} = \lim_{x\to2} (x+3) = 5$$

$$\lim_{x\to2^+} f(x) = \lim_{x\to2} (3x-1) = 5$$

W tym przypadku również obie granice jednostronne funkcji f w punkcie 2 istnieją i są równe 5, więc granica funkcji f w punkcie 2 istnieje i jest równa 5, czyli $\lim\limits_{x\to2} f(x) = 5$.

Przykład 2.

Obliczymy granice jednostronne funkcji $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3+x^{2n}}{1+x^{2n}}$, gdzie $x \in \langle -1, 1\rangle$, w punktach –1 i 1. Otrzymane wartości porównamy z wartościami funkcji w tych punktach. Naszkicujemy wykres funkcji f.

Obliczamy wartości funkcji

$$f(-1)=\lim_{n\to\infty}\frac{3+(-1)^{2n}}{1+(-1)^{2n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3+1}{1+1}=2 \qquad f(1)=\lim_{n\to\infty}\frac{3+1^{2n}}{1+1^{2n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3+1}{1+1}=2$$

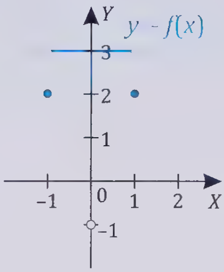
Zauważmy, że jeśli $x\in(-1,1)$, to

$x^{2n}\to 0$, o ile $n\to\infty$, stąd otrzymujemy, że

jeśli $x\in(-1,1)$, to $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3+x^{2n}}{1+x^{2n}}=\dfrac{3}{1}=3$

Teraz możemy zapisać wzór funkcji f w prostszej postaci

$$f(x)=\begin{cases}2, & \text{jeśli } x\in\{-1,1\}\\ 3, & \text{jeśli } x\in(-1,1)\end{cases}$$



$$\lim_{x\to-1^+}f(x)=3 \qquad \lim_{x\to1^-}f(x)=3$$

Granice jednostronne funkcji f w punktach -1 i 1 są różne od wartości funkcji w tych punktach.

$$\lim_{x\to-1^+}f(x)=3\neq 2=f(-1)$$

$$\lim_{x\to1^-}f(x)=3\neq 2=f(1)$$

Wykres funkcji f przedstawiony jest obok.

Sprawdź, czy rozumiesz

1. Oblicz granice lewostronne:

   a) $\lim\limits_{x\to2^-}\sqrt{2-x}$ b) $\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{|x|}{5x}$

   c) $\lim\limits_{x\to-1^-}\sqrt{x^2-1}$ d) $\lim\limits_{x\to5^-}\dfrac{x^2-4x-5}{x-5}$

   Czy istnieją w tych punktach granice prawostronne?

2. Wykaż, że

   a) $\lim\limits_{x\to1^+}4^{|x-1|-x}=\lim\limits_{x\to1^-}4^{|x-1|-x}$ b) $\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{|x-2|}{2-x}\neq\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{|x-2|}{2-x}$

3. Wykaż, że funkcja f określona wzorem $f(x)=\begin{cases}x^2-5, & \text{jeśli } x<3\\ -x+7, & \text{jeśli } x>3\end{cases}$

   ma granicę w punkcie 3.

Granice funkcji w nieskończoności

Rozważmy funkcję $f(x) = \frac{2x+5}{x-1}$, $x \in \boldsymbol{R} - \{1\}$. Niech (x_n) będzie ciągiem o wyrazach różnych od 0 i różnych od 1; ponadto niech $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$. Wówczas $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = 0$. Obliczamy $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$. Mamy:

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{2x_n+5}{x_n-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2+\frac{5}{x_n}}{1-\frac{1}{x_n}} = 2$$

Powiemy, że funkcja f ma w plus nieskończoności granicę równą 2 i zapisujemy to tak:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 2$$

Definicja 1.

Niech funkcja f będzie określona w przedziale $(a, +\infty)$, gdzie $a \in \boldsymbol{R}$.
Funkcja f ma w plus nieskończoności $(+\infty)$ granicę g – co zapisujemy $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = g$ – wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego ciągu (x_n) o wyrazach należących do przedziału $(a, +\infty)$ i takiego, że $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$, prawdziwa jest równość $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = g$.

Zapis symboliczny:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = g \Leftrightarrow \bigwedge_{(x_n)} \left[\left(x_n \in (a, +\infty) \wedge \lim_{n\to\infty} x_n = +\infty \right) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = g \right]$$

Podobnie określamy granicę funkcji w minus nieskończoności.

Definicja 2.

Niech funkcja f będzie określona w przedziale $(-\infty, a)$, gdzie $a \in \boldsymbol{R}$.
Funkcja f ma w minus nieskończoności $(-\infty)$ granicę g – co zapisujemy $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = g$ – wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego ciągu (x_n) o wyrazach należących do przedziału $(-\infty, a)$ i takiego, że $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$, prawdziwa jest równość $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = g$.

Zapis symboliczny:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = g \Leftrightarrow \bigwedge_{(x_n)} \left[\left(x_n \in (-\infty, a) \wedge \lim_{n\to\infty} x_n = -\infty \right) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = g \right]$$

Korzystając z definicji 2., spróbuj wykazać, że $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2x+5}{x-1} = 2$.

Prawdziwe jest następujące twierdzenie.

Twierdzenie 1.

Jeżeli istnieją granice $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ oraz c jest dowolną liczbą rzeczywistą, to istnieją granice: $\lim\limits_{x\to+\infty}[c\cdot f(x)]$, $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)+g(x)]$, $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-g(x)]$, $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)\cdot g(x)]$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]$ (przy dodatkowym założeniu, że $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)\neq 0$)

oraz prawdziwe są równości:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}[c\cdot f(x)] = c\cdot \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)+g(x)] = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) + \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-g(x)] = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)\cdot g(x)] = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)}{\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)}$

Twierdzenie 2.

Jeśli $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = g$, gdzie $g > 0$, to $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{f(x)} = \sqrt{g}$.

Analogiczne twierdzenia są prawdziwe dla granicy funkcji w minus nieskończoności.

Przykład 1.

Obliczymy:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{6x^3+5x^2-7}{x^4+3x^2+1}$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2x^3-7x^2+x+9}{-5x^3+x+21}$

Ad a) Abyśmy mogli skorzystać z twierdzenia 1., dzielimy licznik i mianownik ułamka $\frac{6x^3+5x^2-7}{x^4+3x^2+1}$ przez x^4 (czyli przez x w najwyższej potędze, w jakiej jest w mianowniku).

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{6x^3+5x^2-7}{x^4+3x^2+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{6}{x}+\frac{5}{x^2}-\frac{7}{x^4}}{1+\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^4}} = \frac{0}{1} = 0$$

Ad b) Dzielimy licznik i mianownik wyrażenia przez x^3.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^3-7x^2+x+9}{-5x^3+x+21}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2-\frac{7}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{9}{x^3}}{-5+\frac{1}{x^2}+\frac{21}{x^3}}=-\frac{2}{5}$$

Przykład 2.

Obliczymy:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-7x+1}{\sqrt{x^2+1}}$ b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-7x+1}{\sqrt{x^2+1}}$

Ad a) Mamy:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{-7x+1}{\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-7x+1}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-7x+1}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$$

Ponieważ $x\to+\infty$, więc $|x|=x$, zatem

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{-7x+1}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-7x+1}{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\overbrace{\boxed{-7+\frac{1}{x}}}^{\to -7}}{\underbrace{\boxed{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}}_{\to 1}}=-7$$

Tak więc $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-7x+1}{\sqrt{x^2+1}}=-7.$

Ad b) Rozpoczynamy podobnie jak w punkcie a).

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{-7x+1}{\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-7x+1}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$$

W tym przypadku $x\to-\infty$, więc $|x|=-x$, zatem

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{-7x+1}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-7x+1}{-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\overbrace{\boxed{-7+\frac{1}{x}}}^{\to -7}}{\underbrace{\boxed{-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}}_{\to -1}}=7$$

Otrzymaliśmy $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-7x+1}{\sqrt{x^2+1}}=7.$

Przykład 3.

Wykażemy, że $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sin x}{x}=0$ i $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sin x}{x}=0$.

Do dowodu wykorzystamy twierdzenie o trzech funkcjach. Sformułowaliśmy je dla granicy funkcji w punkcie, ale można wykazać, że jest ono prawdziwe również dla granic funkcji w $+\infty$ oraz w $-\infty$.

Dla dowolnej liczby rzeczywistej x różnej od 0 mamy:

$$-1 \leqslant \sin|x| \leqslant 1$$

Ponieważ $|x|>0$, więc

$$(*) \qquad \frac{-1}{|x|} \leqslant \frac{\sin|x|}{|x|} \leqslant \frac{1}{|x|}$$

Jeśli $x>0$, to $\frac{\sin|x|}{|x|}=\frac{\sin x}{x}$.

Jeśli $x<0$, to $\frac{\sin|x|}{|x|}=\frac{\sin(-x)}{-x}=\frac{-\sin x}{-x}=\frac{\sin x}{x}$.

Zatem nierówność (*) możemy zapisać w postaci $\frac{-1}{|x|} \leqslant \frac{\sin x}{x} \leqslant \frac{1}{|x|}$.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{|x|}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{|x|}=0, \qquad \text{stąd}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin x}{x}=0$$

Podobnie $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-1}{|x|}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{|x|}=0$, więc

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sin x}{x}=0$$

Sprawdź, czy rozumiesz

1. Wykaż na podstawie definicji, że

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3}{x-1}=0$ b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3x-4}{x+2}=3$

2. Oblicz granice:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+1}{x^2-3x}$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x^2+5x}{x^2+1}$ c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2+6\cdot\frac{x-1}{2x+7}\right)$

3. Oblicz granice:

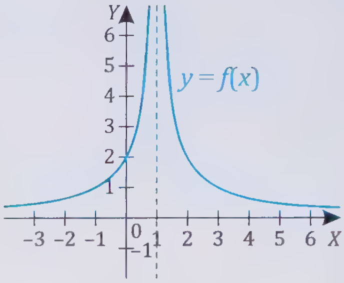
a) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{6x^3+1}{2x-4x^3}$ b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{|x|+1}{3-x}$ c) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{2x^2-5x}}{x}$

Granica niewłaściwa funkcji

Rozważmy funkcję $f(x) = \dfrac{2}{|x-1|}$, $x \in \mathbf{R} - \{1\}$. Niech (x_n) będzie dowolnym ciągiem o wyrazach należących do sąsiedztwa punktu 1 i takim, że $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$. Wówczas (na podstawie twierdzenia 6. ze str. 81) otrzymujemy:

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{|x_n - 1|} = +\infty$$

Obrazowo możemy powiedzieć, że jeśli argumenty funkcji f zbliżają się do 1, to wartości funkcji f rosną do plus nieskończoności (zobacz szkic wykresu funkcji $y = f(x)$ umieszczony obok).



Prowadzi nas to do pojęcia granicy niewłaściwej funkcji w punkcie.

Definicja 1.

Niech funkcja f będzie określona w sąsiedztwie $S(x_0)$.
Funkcja f ma w punkcie x_0 granicę niewłaściwą plus nieskończoność $(+\infty)$ – co zapisujemy $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ – wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego ciągu (x_n) o wyrazach należących do sąsiedztwa $S(x_0)$ i takiego, że $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, prawdziwa jest równość $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = +\infty$.

Zapis symboliczny:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty \overset{def}{\Leftrightarrow} \bigwedge_{(x_n)} \left[\left(x_n \in S(x_0) \wedge \lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \right) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = +\infty \right]$$

Wracając do przykładu z początku tematu, możemy napisać:

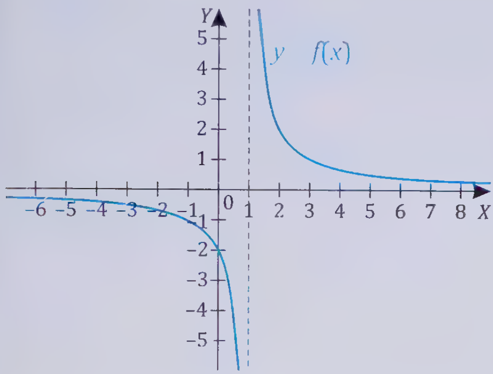
$$\lim_{x\to 1} \frac{2}{|x-1|} = +\infty$$

Podobnie definiuje się granicę niewłaściwą funkcji w punkcie równą minus nieskończoność $(-\infty)$.

O granicach niewłaściwych możemy mówić również w przypadku granic jednostronnych oraz granicy w plus nieskończoności lub w minus nieskończoności.

Przykład 1.

a) Dany jest wykres funkcji $f(x) = \dfrac{2}{x-1}$, gdzie $x \in \boldsymbol{R} - \{1\}$.



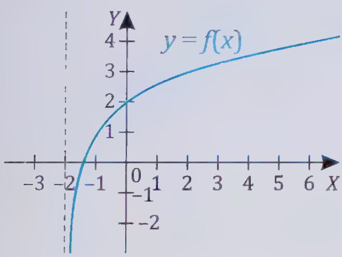
Funkcja f ma w punkcie 1 prawostronną granicę niewłaściwą $+\infty$ i lewostronną granicę niewłaściwą $-\infty$, czyli

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{2}{x-1} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{2}{x-1} = +\infty$$

Granice jednostronne są różne, więc w punkcie 1 granica funkcji f nie istnieje.

b) Dany jest wykres funkcji $f(x) = \log_2(x+2)$, gdzie $x \in (-2, +\infty)$.



Funkcja f ma w punkcie -2 prawostronną granicę niewłaściwą $-\infty$, czyli

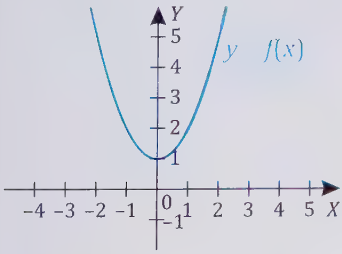
$$\lim_{x \to -2^+} \log_2(x+2) = -\infty$$

Zauważ, że w przypadku funkcji

$f(x) = \log_2(x+2)$, gdzie $x \in (-2, +\infty)$,

możemy mówić tylko o granicy prawostronnej w punkcie -2, bowiem funkcja f jest określona tylko w prawostronnym sąsiedztwie tego punktu.

c) Dany jest wykres funkcji $f(x) = x^2 + 1$, gdzie $x \in \boldsymbol{R}$.



Funkcja $f(x) = x^2 + 1$, gdzie $x \in \boldsymbol{R}$, ma w plus nieskończoności granicę niewłaściwą plus nieskończoność oraz w minus nieskończoności ma granicę niewłaściwą plus nieskończoność, czyli

$$\lim_{x \to +\infty} (x^2 + 1) = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} (x^2 + 1) = +\infty$$

UWAGA: Granice zdefiniowane powyżej nazywa się granicami niewłaściwymi (lub nieskończonymi) w przeciwieństwie do omówionych w poprzednich tematach granic właściwych (zwanych też granicami skończonymi).

Prawdziwe jest następujące twierdzenie.

Twierdzenie 1.

Niech funkcje f i g będą określone w sąsiedztwie punktu x_0 oraz $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$, gdzie $a \in \boldsymbol{R}$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = +\infty$. Wówczas:

a) $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) + g(x)] = +\infty$

b) $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) - g(x)] = -\infty$

c) jeśli $a > 0$, to $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) \cdot g(x)] = +\infty$

d) jeśli $a < 0$, to $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) \cdot g(x)] = -\infty$

Analogiczne twierdzenie jest prawdziwe dla granic jednostronnych oraz dla granic w plus nieskończoności i w minus nieskończoności.

UWAGA:

1) Jeśli $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ i $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = +\infty$, to granica $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) - g(x)]$ może być właściwa, niewłaściwa lub może nie istnieć. Podobnie jest w przypadku granicy $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$.

2) Jeśli $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$ i $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = +\infty$ (lub $-\infty$), to granica $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) \cdot g(x)]$ może być właściwa, niewłaściwa lub może nie istnieć.

Analogiczna uwaga jest prawdziwa w przypadku granic jednostronnych lub granic w plus nieskończoności i w minus nieskończoności.

Przykład 2.

Obliczymy granice:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^5 - 3x^2)$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^4 - 3x + 5}{-x^3 + 4x^2 + 7}$

Ad a) Ponieważ

$$\lim_{x \to +\infty} x^5 = +\infty \quad \text{oraz} \quad \lim_{x \to +\infty} 3x^2 = +\infty,$$

więc nie możemy od razu stwierdzić, czy istnieje i ile jest równa granica $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^5 - 3x^2)$. Najpierw wyłączmy przed nawias x^5:

$$x^5 - 3x^2 = x^5\left(1 - \frac{3}{x^3}\right)$$

Zauważmy, że czynnik x^5 dąży do $+\infty$, a wyrażenie $\left(1-\frac{3}{x^3}\right)$ dąży do 1. Zatem – na mocy twierdzenia 1c – otrzymujemy:

$$\lim_{x\to+\infty}(x^5-3x^2)=\lim_{x\to+\infty}\left[x^5\cdot\left(1-\frac{3}{x^3}\right)\right]=+\infty$$

Ad b) Dzielimy licznik i mianownik ułamka $\frac{x^4-3x+5}{-x^3+4x^2+7}$ przez x^3. Otrzymane wyrażenie zapisujemy w postaci iloczynu:

$$\frac{x^4-3x+5}{-x^3+4x^2+7}=\frac{x-\frac{3}{x^2}+\frac{5}{x^3}}{-1+\frac{4}{x}+\frac{7}{x^3}}=\left(x-\frac{3}{x^2}+\frac{5}{x^3}\right)\cdot\frac{1}{-1+\frac{4}{x}+\frac{7}{x^3}}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(x-\frac{3}{x^2}+\frac{5}{x^3}\right)=-\infty \quad \text{oraz} \quad \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{-1+\frac{4}{x}+\frac{7}{x^3}}=-1\text{, więc}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^4-3x+5}{-x^3+4x^2+7}=+\infty$$

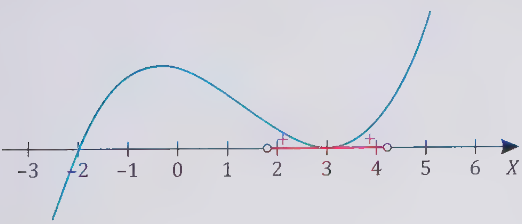
Przykład 3.

Obliczymy $\lim_{x\to3}\frac{2x-7}{(x-3)^2(x+2)}$.

Zauważ, że jeśli x dąży do 3, to licznik ułamka dąży do -1, jest więc ujemny. Mianownik ułamka dąży do 0. Szkicujemy wykres funkcji $y=W(x)$, gdzie $W(x)$ jest wielomianem

$$W(x)=(x-3)^2(x+2)$$

z mianownika danego ułamka. Dla zwiększenia czytelności rysunku pomijamy oś OY.



Ze szkicu odczytujemy, że w sąsiedztwie punktu 3 wartości wielomianu są dodatnie. Zatem jeśli x dąży do 3, to wartości wyrażenia $(x-3)^2(x+2)$ dążą do 0 poprzez wartości dodatnie, co zapisujemy:

$$(x-3)^2(x+2)\to0^+$$

Stąd

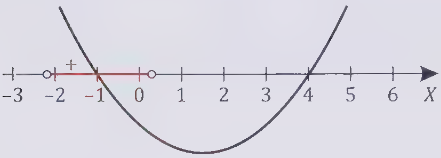
$$\frac{1}{(x-3)^2(x+2)}\to+\infty, \quad \text{więc}$$

$$\lim_{x\to3}\frac{2x-7}{(x-3)^2(x+2)}=\lim_{x\to3}\left[\boxed{(2x-7)}^{\nearrow -1}\cdot\boxed{\frac{1}{(x-3)^2(x+2)}}^{\nearrow +\infty}\right]=-\infty$$

Przykład 4.

Obliczymy granice jednostronne: $\lim\limits_{x\to -1^-} \dfrac{5x^2+2x-1}{x^2-3x-4}$ i $\lim\limits_{x\to -1^+} \dfrac{5x^2+2x-1}{x^2-3x-4}$.

Rozważmy najpierw granicę lewostronną. Jeśli x dąży do -1 z lewej strony, to licznik ułamka $\dfrac{5x^2+2x-1}{x^2-3x-4}$ dąży do 2, a mianownik dąży do 0. Szkicujemy wykres funkcji kwadratowej $y = x^2 - 3x - 4$ (z mianownika ułamka):



Ze szkicu odczytujemy, że jeśli $x \to -1^-$, to $(x^2-3x-4) \to 0^+$, więc

$$\frac{1}{x^2-3x-4} \to +\infty$$

Zatem

$$\lim_{x\to -1^-} \frac{5x^2+2x-1}{x^2-3x-4} = \lim_{x\to -1^-}\left[\overset{2}{\boxed{(5x^2+2x-1)}}\cdot \overset{+\infty}{\boxed{\frac{1}{x^2-3x-4}}}\right] = +\infty$$

Podobnie możemy stwierdzić, że jeśli $x \to -1^+$, to $(x^2-3x-4) \to 0^-$, więc

$$\frac{1}{x^2-3x-4} \to -\infty$$

Mamy:

$$\lim_{x\to -1^+} \frac{5x^2+2x-1}{x^2-3x-4} = \lim_{x\to -1^+}\left[\overset{2}{\boxed{(5x^2+2x-1)}}\cdot \overset{-\infty}{\boxed{\frac{1}{x^2-3x-4}}}\right] = -\infty$$

Granice jednostronne funkcji $y = \dfrac{5x^2+2x-1}{x^2-3x-4}$ w punkcie -1 są różne. To znaczy, że nie istnieje granica tej funkcji w punkcie -1.

Przykład 5.

Wyznaczymy granice: $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+\sin x)$ oraz $\lim\limits_{x\to-\infty}(x+\sin x)$.

Wyłączamy x poza nawias:

$$\lim_{x\to+\infty}(x+\sin x) = \lim_{x\to+\infty}\left[x\cdot\left(1+\frac{\sin x}{x}\right)\right]$$

Wiemy (zobacz przykład 3. ze str 99), że jeśli

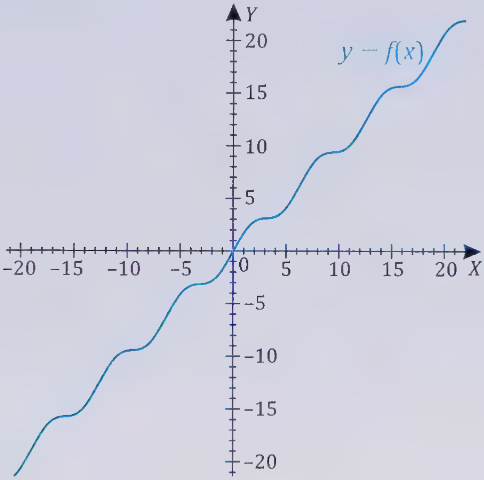
$$x \to +\infty, \text{ to } \frac{\sin x}{x} \to 0, \quad \text{stąd}$$

$$\lim_{x\to+\infty}(x+\sin x)=\lim_{x\to+\infty}\left[x\cdot\left(1+\frac{\sin x}{x}\right)\right]=+\infty$$

Podobnie otrzymujemy $\lim_{x\to-\infty}(x+\sin x)=-\infty$.

Rysunek poniżej przedstawia wykres funkcji

$f(x)=x+\sin x,\quad x\in \boldsymbol{R}$



Sprawdź, czy rozumiesz

1. Oblicz:

a) $\lim_{x\to0}\frac{x-1}{x^2}$ b) $\lim_{x\to2}\frac{3}{(x-2)^2}$ c) $\lim_{x\to3}\frac{-4}{|x-3|}$

2. Oblicz

a) $\lim_{x\to-1^+}\frac{2}{x+1}$ b) $\lim_{x\to-1^-}\frac{2}{x+1}$ c) $\lim_{x\to2^+}\frac{-3}{\sqrt{x-2}}$

d) $\lim_{x\to-1^+}\frac{2x+1}{x^2-1}$ e) $\lim_{x\to-2^-}\frac{x^3}{x^2+2x}$ f) $\lim_{x\to-3^+}\frac{x+2}{(x+3)(1-x)}$

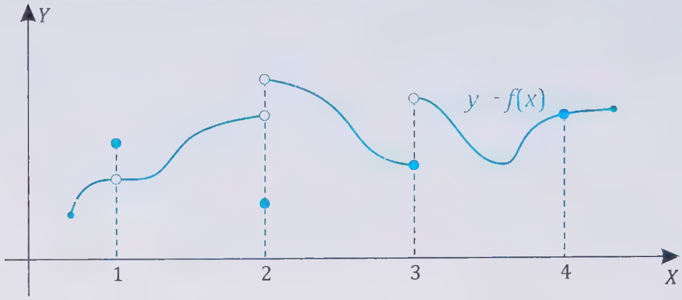
3. Oblicz:

a) $\lim_{x\to-\infty}(-2x^3+100x)$ b) $\lim_{x\to+\infty}(-x+\sin x)$ c) $\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2-121}$

d) $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-1000}{x}$ e) $\lim_{x\to-\infty}\frac{9-x^2}{3+x}$ f) $\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^4+x}}{x-1}$

Ciągłość funkcji w punkcie

Na rysunku poniżej przedstawiony jest wykres funkcji f. Wyróżniono na nim cztery punkty.



Zauważmy, że w punktach 1, 2, 3, 4 funkcja f jest określona oraz

a) w punkcie 1 granica funkcji f istnieje i jest różna od wartości funkcji w tym punkcie, czyli

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1} f(x) \quad \text{oraz}$$

$$\lim_{x\to 1} f(x) \neq f(1)$$

b) w punkcie 2 granice jednostronne funkcji f są różne (nie istnieje granica funkcji f w punkcie 2) i są one różne od wartości funkcji w tym punkcie, czyli

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) \neq \lim_{x\to 2^+} f(x) \quad \text{oraz}$$

$$\lim_{x\to 2} f(x) \neq f(2) \text{ i } \lim_{x\to 2^+} f(x) \neq f(2)$$

c) w punkcie 3 granice jednostronne funkcji f są różne, a wartość funkcji w tym punkcie jest równa granicy lewostronnej, czyli

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) \neq \lim_{x\to 3^+} f(x) \quad \text{oraz}$$

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = f(3)$$

d) w punkcie 4 granica funkcji f istnieje (granice jednostronne w tym punkcie są równe) i jest ona równa wartości funkcji w tym punkcie, czyli

$$\lim_{x\to 4^-} f(x) = \lim_{x\to 4^+} f(x) = \lim_{x\to 4} f(x) \quad \text{oraz}$$

$$\lim_{x\to 4} f(x) = f(4)$$

W przypadku d) powiemy, że funkcja f jest ciągła w punkcie 4. Natomiast w punktach 1, 2, 3 funkcja f nie jest ciągła.

Do badania ciągłości funkcji w punkcie x_0 nie wystarcza fakt, że funkcja jest określona w sąsiedztwie $S(x_0)$. Funkcja ma być też określona w samym punkcie x_0, czyli ma być określona w zbiorze $S(x_0) \cup \{x_0\}$. Zbiór $S(x_0) \cup \{x_0\}$ nazywamy **otoczeniem punktu x_0** i oznaczamy $U(x_0)$.

Analogicznie zbiór $S_-(x_0) \cup \{x_0\}$ nazywamy **otoczeniem lewostronnym punktu x_0** i oznaczamy $U_-(x_0)$, a zbiór $S_+(x_0) \cup \{x_0\}$ nazywamy **otoczeniem prawostronnym punktu x_0** i oznaczamy $U_+(x_0)$.

Definicja 1.

Niech funkcja f będzie określona w pewnym otoczeniu $U(x_0)$.
Funkcja f jest **ciągła w punkcie** x_0 wtedy i tylko wtedy, gdy:

1) istnieje właściwa granica $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ oraz
2) prawdziwa jest równość $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Punkt x_0 należący do dziedziny funkcji f, w którym funkcja nie jest ciągła, nazywamy **punktem nieciągłości** funkcji f.

Przykład 1.

Zbadamy, czy funkcja $f(x) = \begin{cases} 4x - 7, & \text{jeśli } x < 4 \\ \dfrac{2x+1}{x-3}, & \text{jeśli } x \geqslant 4 \end{cases}$ jest ciągła w punkcie 4.

Funkcja f jest określona w punkcie 4. Sprawdzamy najpierw, czy istnieje granica funkcji f w punkcie 4.

$$\lim_{x \to 4^-} f(x) = \lim_{x \to 4^-}(4x - 7) = 9 \qquad \text{oraz} \qquad \lim_{x \to 4^+} f(x) = \lim_{x \to 4^+} \frac{2x+1}{x-3} = 9$$

Ponieważ $\lim\limits_{x \to 4^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 4^+} f(x) = 9$, więc istnieje granica funkcji f w punkcie 4 i jest ona równa 9.

Obliczamy $f(4)$. Mamy:

$$f(4) = \frac{2 \cdot 4 + 1}{4 - 3} = 9$$

Otrzymaliśmy, że $\lim\limits_{x \to 4} f(x) = f(4)$. Zatem funkcja f jest ciągła w punkcie 4.

Przykład 2.

Zbadamy, czy funkcja $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-1}{\sqrt{|x|} - 1}, & \text{jeśli } x \in \boldsymbol{R} - \{-1, 1\} \\ 2, & \text{jeśli } x \in \{-1, 1\} \end{cases}$

jest ciągła w punktach 1 i -1.

Dziedziną funkcji f jest zbiór liczb rzeczywistych $\boldsymbol{R}$. Najpierw badamy ciągłość funkcji f w punkcie 1. Zauważ, że jeśli x dąży do 1, to licznik i mianownik ułamka $\frac{x-1}{\sqrt{|x|}-1}$ dążą do 0. Obliczamy

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\sqrt{|x|}-1} = \lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\sqrt{x}-1} = \lim_{x\to 1}\frac{\overset{1}{\cancel{\left(\sqrt{x}-1\right)}}\left(\sqrt{x}+1\right)}{\cancel{\left(\sqrt{x}-1\right)}_{1}} =$$

$$= \lim_{x\to 1}\Big(\underbrace{\boxed{\sqrt{x}}}_{1}+1\Big) = 2$$

Ponieważ $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 2$ i $f(1) = 2$, więc funkcja f jest ciągła w punkcie 1.

Teraz zbadamy ciągłość funkcji f w punkcie -1. Jeśli x dąży do -1, to licznik ułamka $\frac{x-1}{\sqrt{|x|}-1}$ dąży do -2, a mianownik dąży do 0. Możemy się spodziewać, że granice jednostronne będą niewłaściwe. Sprawdzamy:

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^+}\frac{\overset{-2}{\boxed{x-1}}}{\underset{0^-}{\boxed{\sqrt{|x|}-1}}} = \lim_{x\to -1^-}\left[\overset{-2}{\boxed{(x-1)}}\cdot\underset{-\infty}{\boxed{\frac{1}{\sqrt{|x|}-1}}}\right] = +\infty$$

(Naszkicuj wykres funkcji $y = \sqrt{|x|}-1$ i zobacz, jak zmieniają się wartości tej funkcji w sąsiedztwie punktu -1).
Nie musimy dalej liczyć: już wiemy, że nie istnieje (właściwa) granica funkcji f w punkcie -1. To znaczy, że -1 jest punktem nieciągłości funkcji f.

Funkcja f jest ciągła w punkcie 1 i nie jest ciągła w punkcie -1.

Przykład 3.

Zbadamy, czy istnieje taka wartość parametru a, $a \in \boldsymbol{R}$, dla której funkcja $y = f(x)$ jest ciągła w punkcie -2, gdzie

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+7x+10}{x^2-4}, & \text{jeśli } x < -2 \\ \dfrac{1+a}{-a}, & \text{jeśli } x = -2 \\ \dfrac{ax+5a}{x^2+12}, & \text{jeśli } x > -2 \end{cases}$$

Najpierw sprawdzimy, kiedy istnieje granica funkcji f w punkcie -2.

- $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -2^-} \dfrac{\boxed{x^2+7x+10}}{\boxed{x^2-4}} = \lim\limits_{x\to -2} \dfrac{(x+2)(x+5)}{(x+2)(x-2)} = \lim\limits_{x\to -2^-} \dfrac{x+5}{x-2} = \dfrac{-3}{4}$

- $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -2^+} \dfrac{ax+5a}{x^2+12} = \dfrac{3a}{16}$

$$\frac{-3}{4} = \frac{3a}{16}, \quad \text{stąd} \quad a = -4$$

Granica funkcji f w punkcie -2 istnieje wtedy, gdy $a = -4$ i wówczas $\lim\limits_{x\to -2} f(x) = -\dfrac{3}{4}$.
Obliczamy $f(-2)$ dla wyznaczonej wartości a:

$$f(-2) = \frac{1+(-4)}{-(-4)} = -\frac{3}{4} = \lim_{x\to -2} f(x)$$

Funkcja f jest ciągła w punkcie -2 wtedy, gdy $a = -4$.

Wróćmy jeszcze do funkcji f z początku tego tematu. Granica lewostronna funkcji f w punkcie 3 jest równa wartości tej funkcji w punkcie 3, czyli

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = f(3)$$

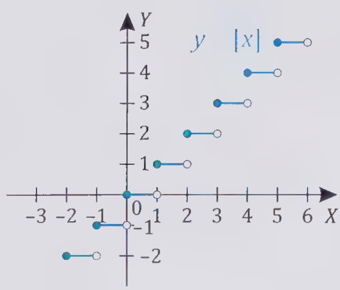
W takim przypadku powiemy, że funkcja f jest lewostronnie ciągła w punkcie 3 (i nie jest prawostronnie ciągła). Możemy więc przyjąć następującą definicję.

Definicja 2.

Niech funkcja f będzie określona w lewostronnym (odpowiednio prawostronnym) otoczeniu punktu x_0.
Funkcja f jest lewostronnie (odpowiednio prawostronnie) **ciągła w punkcie x_0** wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje granica $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ $\left(\text{odpowiednio } \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)\right)$ oraz prawdziwa jest równość $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0)$ $\left(\text{odpowiednio } \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0)\right)$.

Przykład 4.

Funkcja $y = [x]$ (symbol $[x]$ oznacza część całkowitą liczby x) jest prawostronnie ciągła w każdym punkcie będącym liczbą całkowitą. W każdym innym punkcie funkcja ta jest ciągła (zobacz rysunek obok).



Przykład 5.

Wykażemy, że funkcja $f(x)=\begin{cases}2x-3, & \text{jeśli } x\in \boldsymbol{W}\\ -x+18, & \text{jeśli } x\in \boldsymbol{R}-\boldsymbol{W}\end{cases}$ jest ciągła w punkcie 7.

Wyznaczymy najpierw granicę funkcji f w punkcie 7.
Niech (x_n) będzie dowolnym ciągiem zbieżnym do 7. Możliwe są trzy przypadki:
I. prawie wszystkie wyrazy ciągu (x_n) są wymierne
II. prawie wszystkie wyrazy ciągu (x_n) są niewymierne
III. w ciągu (x_n) jest nieskończenie wiele wyrazów wymiernych i nieskończenie wiele wyrazów niewymiernych.

<u>I przypadek</u>: Możemy przyjąć, że wszystkie wyrazy ciągu (x_n) są wymierne (ewentualne wyrazy niewymierne możemy odrzucić; jest ich skończenie wiele, więc nie mają wpływu na zbieżność ciągu), czyli

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 7,\ x_n\in \boldsymbol{W}, \text{ jeśli } n\in \boldsymbol{N}_+, \text{ stąd } \lim_{n\to\infty} f(x_n)=\lim_{n\to\infty}(2x_n-3)=14-3=11$$

<u>II przypadek</u>: Podobnie możemy przyjąć, że wszystkie wyrazy ciągu (x_n) są niewymierne, czyli

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 7,\ x_n\in \boldsymbol{R}-\boldsymbol{W}, \text{ jeśli } n\in \boldsymbol{N}_+, \text{ stąd } \lim_{n\to\infty} f(x_n)=\lim_{n\to\infty}(-x_n+18)=-7+18=11$$

<u>III przypadek</u>: Ciąg (x_n) „rozkładamy" na dwa ciągi (nazywamy je podciągami ciągu (x_n)): (x'_n) i (x''_n) – pierwszy utworzony ze wszystkich wyrazów wymiernych ciągu (x_n), drugi utworzony ze wszystkich wyrazów niewymiernych ciągu (x_n). Ponieważ z założenia $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 7$, więc również $\lim\limits_{n\to\infty} x'_n = 7$ i $\lim\limits_{n\to\infty} x''_n = 7$. Ponadto z I przypadku wynika, że $\lim\limits_{n\to\infty} f(x'_n)=11$, a z II przypadku wynika, że $\lim\limits_{n\to\infty} f(x''_n)=11$, zatem w każdym otoczeniu liczby 11 znajdują się prawie wszystkie wyrazy ciągu $f(x'_n)$ i prawie wszystkie wyrazy ciągu $f(x''_n)$, czyli prawie wszystkie wyrazy ciągu $f(x_n)$.

To znaczy, że $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=11$.

Z I, II i III przypadku wynika, że dla dowolnego ciągu (x_n), dla którego $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 7$, mamy $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=11$, a to znaczy, że granica $\lim\limits_{x\to 7} f(x)$ istnieje i jest równa 11.
Obliczamy $f(7)$: $f(7)=2\cdot 7-3=11$, stąd

$$\lim_{x\to 7} f(x)=f(7)$$

Funkcja f jest ciągła w punkcie 7. Punkt 7 jest jedynym punktem, w którym funkcja f jest ciągła.

Prawdziwe są następujące twierdzenia.

Twierdzenie 1.

Funkcje: wielomianowe, wymierne, potęgowe, logarytmiczne i trygonometryczne są ciągłe w każdym punkcie, w którym są określone.

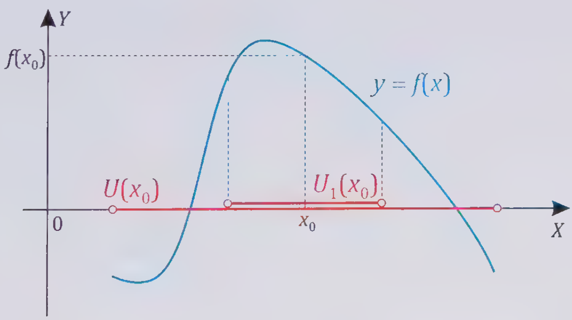
Twierdzenie 2.

Jeśli funkcje f i g są ciągłe w punkcie x_0, to w tym punkcie ciągłe też są funkcje $f+g,\ f-g,\ f\cdot g,\ \dfrac{f}{g}$ (przy dodatkowym założeniu, że $g(x_0)\neq 0$).

Twierdzenie 3. (o lokalnym zachowaniu znaku)

Jeżeli funkcja f określona w pewnym otoczeniu $U(x_0)$ punktu x_0 jest ciągła w punkcie x_0 oraz $f(x_0)>0$ (odpowiednio $f(x_0)<0$), to istnieje takie otoczenie $U_1(x_0)$ punktu x_0, że $U_1(x_0)\subset U(x_0)$ oraz $f(x)>0$ (odpowiednio $f(x)<0$) dla każdej liczby $x\in U_1(x_0)$.

Ilustrację tego twierdzenia (dla przypadku $f(x_0)>0$) przedstawia poniższy rysunek:



Sprawdź, czy rozumiesz

1. Wykaż, że funkcja $f(x)=\begin{cases}-x+4, & \text{jeśli } x<3\\ 1, & \text{jeśli } x=3\\ x^2-8, & \text{jeśli } x>3\end{cases}$ jest ciągła w punkcie 3.

2. Zbadaj, czy funkcja f jest ciągła w punkcie 1, jeśli:

a) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-x^2}{x-1}, & \text{jeśli } x\neq 1\\ 2, & \text{jeśli } x=1\end{cases}$

b) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-x}{|x-1|}, & \text{jeśli } x<1\\ x^2, & \text{jeśli } x\geqslant 1\end{cases}$

Ciągłość funkcji w zbiorze

Niech funkcja $f(x) = 2x^3 + 3x$ będzie określona w przedziale $(-2, 3)$. Łatwo wykazać, że funkcja f jest ciągła w każdym punkcie należącym do przedziału $(-2, 3)$. Powiemy wówczas, że funkcja f jest ciągła w przedziale $(-2, 3)$.

> ***Definicja 1.***
> Funkcja jest **ciągła w przedziale otwartym** (a, b) wtedy i tylko wtedy, gdy jest ciągła w każdym punkcie tego przedziału.

Rozważmy funkcję

$$g(x) = 2x^3 + 3x, \text{ gdzie } x \in \langle -2, 3 \rangle$$

Funkcja f jest ciągła w przedziale otwartym $(-2, 3)$. Nie możemy mówić o ciągłości funkcji g w punktach -2 i 3, bowiem funkcja g nie jest określona w otoczeniu tych punktów. Możemy natomiast mówić o ciągłości jednostronnej w tych punktach (prawostronnej w punkcie -2 i lewostronnej w punkcie 3).

> ***Definicja 2.***
> Funkcja jest **ciągła w przedziale domkniętym** $\langle a, b \rangle$, jeśli jest ciągła w przedziale (a, b) oraz jest prawostronnie ciągła w punkcie a i lewostronnie ciągła w punkcie b.

Podobnie określamy ciągłość w innych przedziałach. Powiemy, że funkcja jest ciągła w zbiorze będącym sumą kilku przedziałów liczbowych wtedy, gdy jest ciągła w każdym z tych przedziałów. Na przykład funkcja $f(x) = \frac{1}{x}$ jest ciągła w każdym z przedziałów $(-\infty, 0)$, $(0, +\infty)$, wobec tego jest ciągła w zbiorze $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

> ***Twierdzenie 1.***
> Funkcje: wielomianowe, wymierne, potęgowe, wykładnicze, logarytmiczne i trygonometryczne są ciągłe w swych dziedzinach.

Oczywiście funkcje wskazane w twierdzeniu 1. są również ciągłe w przedziałach będących podzbiorami ich dziedzin.

Funkcję, która jest ciągła w całej dziedzinie, nazywamy krótko **funkcją ciągłą**.

Przykład 1.

Wykażemy, że funkcja $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x+4}{x-3}, & \text{jeśli } x\in(-\infty,1)\\ -4x+1, & \text{jeśli } x\in\langle 1,4)\\ -x^2+1, & \text{jeśli } x\in\langle 4,+\infty)\end{cases}$ jest ciągła w zbiorze liczb rzeczywistych.

Funkcja f jest ciągła w przedziałach otwartych: $(-\infty, 1)$, $(1, 4)$ i $(4, +\infty)$ (uzasadnij to!). Zatem wystarczy wykazać, że funkcja ta jest ciągła w „punktach granicznych": 1 i 4.

Wyznaczamy granice jednostronne funkcji f w punkcie 1:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}\frac{2x+4}{x-3}=-3$$

oraz

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}(-4x+1)=-3$$

Zatem istnieje granica $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$, która jest równa -3. Obliczamy wartość funkcji f dla argumentu 1:

$$f(1)=-3$$

Z powyższych rozważań wynika, że funkcja f jest ciągła w punkcie 1. Przechodzimy teraz do sprawdzenia ciągłości tej funkcji w punkcie 4. Obliczamy:

$$\lim_{x\to 4^-} f(x)=\lim_{x\to 4^-}(-4x+1)=-15 \qquad \text{oraz}$$

$$\lim_{x\to 4^+} f(x)=\lim_{x\to 4^+}(-x^2+1)=-15$$

Stąd $\lim\limits_{x\to 4} f(x)=-15$. Ponadto $f(4)=-4^2+1=-15$.

Ponieważ $f(4)=\lim\limits_{x\to 4} f(x)=-15$, więc funkcja f jest ciągła w punkcie 4.

Otrzymaliśmy, że funkcja f jest ciągła w zbiorze liczb rzeczywistych.

Przykład 2.

Przedsiębiorca sprzedaje pewien towar. Jeśli nabywca kupi do 20 kg tego towaru, to płaci on stałą cenę 10 dolarów za każdy kilogram. Jeśli natomiast zakup przekracza 20 kg, to wartość zakupu x kg wyraża się wzorem $\sqrt{ax^2+14\,400}$. Wartość $w(x)$ (w dolarach) zakupionych x kg towaru opisuje zatem funkcja

$$w(x)=\begin{cases}10x, & \text{jeśli } 0<x\leqslant 20\\ \sqrt{ax^2+14\,400}, & \text{jeśli } x>20\end{cases}$$

a) Wyznaczymy a tak, aby wartość zakupionego towaru zmieniała się w sposób ciągły.

b) Zapiszemy wzór funkcji $y=c(x)$ opisującej cenę jednego kilograma przy zakupie x kg towaru.

c) Wiadomo, że przy zakupach większych niż 20 kg cena kilograma towaru maleje wraz ze wzrostem liczby zakupionych kilogramów. Poniżej jakiej wartości nie spadnie cena jednego kilograma towaru (niezależnie od liczby zakupionych kilogramów)?

Ad a) Wyznaczymy a tak, aby funkcja $y = w(x)$ była ciągła w punkcie 20. Mamy

$$\lim_{x\to 20^-} w(x) = \lim_{x\to 20^-} 10x = 200 \qquad w(20) = 200$$

$$\lim_{x\to 20^+} w(x) = \lim_{x\to 20^+} \sqrt{ax^2 + 14\,400} = \sqrt{400a + 14\,400}, \qquad \text{stąd}$$

$200 = \sqrt{400a + 14\,400}$ (obie strony równania są dodatnie, podnosimy je do kwadratu)

$40\,000 = 400a + 14\,400,$ więc $a = 64$

Jeśli $a = 64$, to funkcja w jest ciągła w punkcie 20; oczywiście jest też ciągła w przedziałach $(0, 20)$ i $(20, +\infty)$, zatem jest ciągła w całej dziedzinie.

Ad b) Aby wyznaczyć cenę 1 kg towaru przy zakupie x kg, wystarczy wartość zakupionego towaru podzielić przez liczbę kilogramów, zatem $c(x) = \dfrac{w(x)}{x}$, czyli

$$c(x) = \begin{cases} 10, & \text{jeśli } 0 < x \leqslant 20 \\ \dfrac{\sqrt{64x^2 + 14\,400}}{x}, & \text{jeśli } x > 20 \end{cases}$$

Ad c) Aby obliczyć wartość, poniżej której nie spadnie cena 1 kg towaru, wyznaczamy granicę

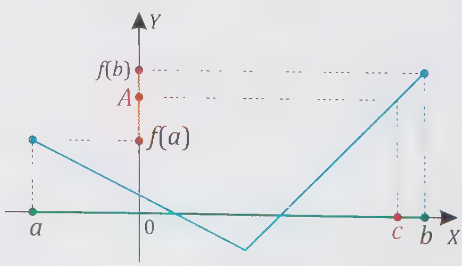
$$\lim_{x\to+\infty} c(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{64x^2 + 14\,400}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{64 + \frac{14\,400}{x^2}} = \sqrt{64} = 8$$

Cena 1 kg towaru nie spadnie poniżej 8 dolarów.

W drugiej części tematu omówimy dwie ważne własności funkcji ciągłych.

Twierdzenie 2. (Darboux)

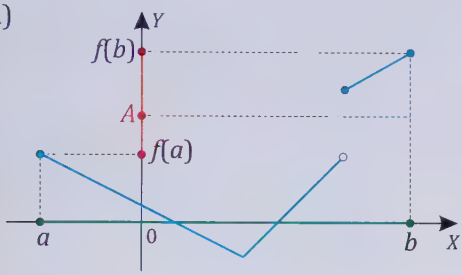
Jeżeli funkcja f jest ciągła w przedziale domkniętym $\langle a, b\rangle$ oraz $f(a) \neq f(b)$, natomiast A jest dowolną liczbą pomiędzy liczbami $f(a)$ oraz $f(b)$, to istnieje taka liczba c, $c \in (a, b)$, dla której $f(c) = A$.



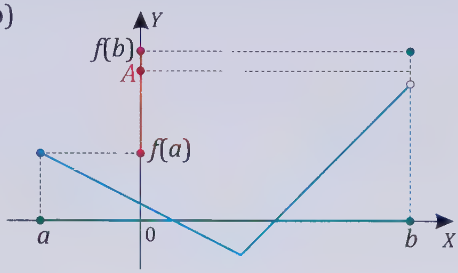
Jean Gaston Darboux [wym. żã gastą darbu] był francuskim matematykiem żyjącym w latach 1842–1917. Zajmował się geometrią różniczkową, analizą matematyczną i mechaniką teoretyczną.

Zauważmy, że założenie o ciągłości funkcji f w całym przedziale $\langle a, b\rangle$ jest koniecznym warunkiem prawdziwości twierdzenia.

a)



b)



Na rysunku a) widzimy, że brak ciągłości tylko w jednym punkcie należącym do przedziału (a, b) może spowodować, że teza twierdzenia 2. nie będzie spełniona. Natomiast rysunek b) pokazuje, że istotna jest również ciągłość (jednostronna) na końcach przedziału $\langle a, b\rangle$.

Z twierdzenia 2. wynika wniosek, który bywa wykorzystywany do przybliżonego rozwiązywania równań.

Wniosek: Jeśli funkcja f jest ciągła w przedziale domkniętym $\langle a, b\rangle$ oraz $f(a)\cdot f(b) < 0$, to istnieje taka liczba c, $c \in (a, b)$, dla której $f(c) = 0$.

Przykład 3.

Wykażemy, że równanie $\frac{1}{2}x - 2 + \sin x = 0$ ma co najmniej jedno rozwiązanie należące do przedziału $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Rozważmy funkcję $f(x) = \frac{1}{2}x - 2 + \sin x$. Funkcja f jest funkcją ciągłą (jako suma funkcji ciągłych) w przedziale $\left\langle 0, \frac{\pi}{2}\right\rangle$. Ponadto

$$f(0) = -2, \quad -2 < 0 \qquad \text{oraz} \qquad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} - 2 + 1 = \frac{\pi - 2}{2}, \quad \frac{\pi - 2}{2} > 0$$

Zatem w przedziale $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ funkcja f przyjmuje dowolną wartość większą od -2 i jednocześnie mniejszą od $\frac{\pi - 2}{2}$. W szczególności przyjmuje wartość 0, a to znaczy, że równanie $\frac{1}{2}x - 2 + \sin x = 0$ ma co najmniej jedno rozwiązanie należące do przedziału $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Z twierdzenia 2. wynika również kolejny wniosek.

Wniosek: Każde równanie wielomianowe stopnia nieparzystego ma co najmniej jedno rozwiązanie rzeczywiste.

Szkic dowodu: Dowolne równanie wielomianowe stopnia n można zapisać w postaci:
(*) $\quad x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0 = 0,$
gdzie $a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_1, a_0$ są liczbami rzeczywistymi, $n \in \mathbf{N}_+$, n – liczba nieparzysta.

Oznaczmy $W(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$. Zauważ, że

$$\lim_{x\to-\infty} W(x) = \lim_{x\to-\infty}\left[\overbrace{x^n}^{-\infty}\overbrace{\left(1 + \frac{a_{n-1}}{x} + \ldots + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n}\right)}^{1}\right] = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} W(x) = \lim_{x\to+\infty}\left[\overbrace{x^n}^{+\infty}\overbrace{\left(1 + \frac{a_{n-1}}{x} + \ldots + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n}\right)}^{1}\right] = +\infty$$

Zatem istnieją takie liczby a i b, dla których $W(a) < 0$ i $W(b) > 0$, czyli funkcja $y = W(x)$ spełnia w przedziale $\langle a, b\rangle$ założenia wniosku ze str. 115. Tak więc istnieje liczba c, $c \in (a, b)$, dla której $W(c) = 0$, a to znaczy, że równanie (*) ma co najmniej jedno rozwiązanie.

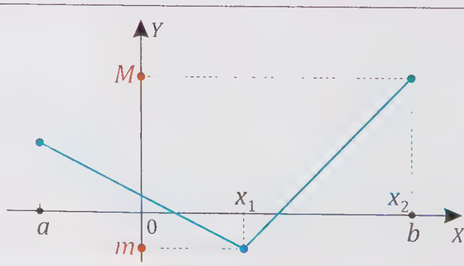
W klasie pierwszej poznałeś pojęcie największej i najmniejszej wartości funkcji. Przypomnijmy:

Funkcja liczbowa $f\colon X \to Y$ przyjmuje **największą wartość** y_0, $y_0 \in Y$, dla liczby x_0, $x_0 \in X$, wtedy i tylko wtedy, gdy $f(x_0) = y_0$ oraz dla każdej liczby x, $x \in X$, zachodzi nierówność $f(x) \le f(x_0)$.

Funkcja liczbowa $f\colon X \to Y$ przyjmuje **najmniejszą wartość** y_0, $y_0 \in Y$, dla liczby x_0, $x_0 \in X$, wtedy i tylko wtedy, gdy $f(x_0) = y_0$ oraz dla każdej liczby x, $x \in X$, zachodzi nierówność $f(x) \ge f(x_0)$.

Kolejne twierdzenie dotyczy przyjmowania wartości największej i wartości najmniejszej przez funkcję ciągłą, określoną w przedziale domkniętym.

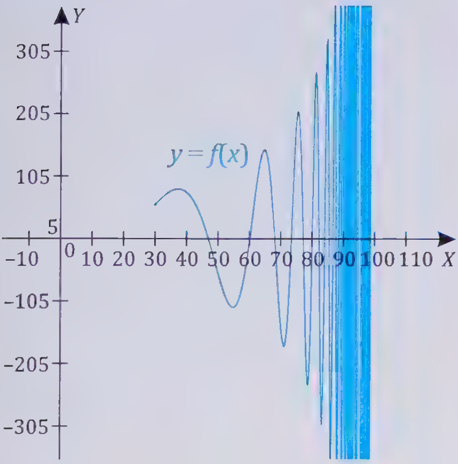
Twierdzenie 3. (Weierstrassa)
Jeżeli funkcja f jest ciągła w przedziale domkniętym $\langle a, b\rangle$, to przyjmuje w tym przedziale wartość największą M i najmniejszą m, to znaczy istnieją takie liczby x_1, x_2 należące do przedziału $\langle a, b\rangle$, dla których $f(x_1) = m$ i $f(x_2) = M$.



Karl Weierstrass (wym. wajersztras) był niemieckim matematykiem żyjącym w latach 1815–1897. Zajmował się analizą matematyczną, algebrą liniową, geometrią różniczkową.

W twierdzeniu 3. nie można zmienić przedziału domkniętego na żaden inny przedział. Nawet dla przedziału jednostronnie otwartego teza tego twierdzenia może nie być spełniona. Rozważmy bowiem funkcję

$$f(x) = 500 \cdot \frac{\sin\left(\frac{500}{x-100}\right)}{x-100}, \text{ gdzie } x \in \langle 30, 100)$$



Funkcja f jest ciągła i nie przyjmuje w przedziale $\langle 30, 100)$ ani wartości największej, ani wartości najmniejszej. Zbiorem wartości funkcji jest zbiór $\boldsymbol{R}$.

Fragment wykresu funkcji f przedstawia rysunek obok.

Z twierdzenia 2. i twierdzenia 3. wynika następujący wniosek:

Wniosek: Jeśli funkcja f jest ciągła w przedziale domkniętym $\langle a, b\rangle$ i m oraz M oznaczają odpowiednio najmniejszą i największą wartość funkcji f w tym przedziale, natomiast A jest dowolną liczbą spełniającą nierówność $m \leqslant A \leqslant M$, to istnieje taka liczba c, $c \in \langle a, b\rangle$, dla której $f(c) = A$.

Sprawdź, czy rozumiesz

1. Które spośród danych funkcji są ciągłe? Odpowiedź uzasadnij.

$$f(x) = \frac{x+1}{x-1}, x \neq 1 \qquad g(x) = \begin{cases} x, & \text{jeśli } x < 1 \\ \frac{1}{x}, & \text{jeśli } x \geqslant 1 \end{cases} \qquad h(x) = \begin{cases} \frac{x}{|x|}, & \text{jeśli } x \neq 0 \\ 1, & \text{jeśli } x = 0 \end{cases}$$

2. Dana jest funkcja $f(x) = \frac{10}{x^2 - 5x}$, gdzie $x \in \langle 1, 3\rangle$. Wyznacz zbiór wartości funkcji f.

3. Wykaż, że funkcja $f(x) = 2x^4 + 5x + 2$ ma w przedziale $(-1, 0)$ co najmniej jedno miejsce zerowe.

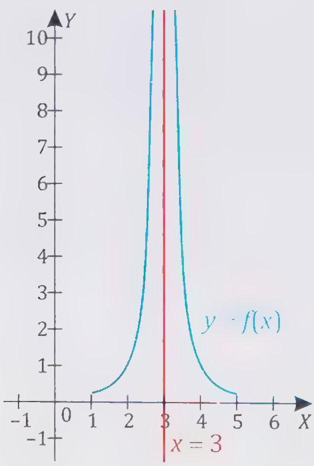
Asymptoty wykresu funkcji

Analizując wykresy pewnych funkcji (np. $f(x) = \frac{1}{x}$, gdzie $x \in \boldsymbol{R}$), można zaobserwować następującą prawidłowość: wraz ze wzrostem odległości punktów wykresu od początku układu współrzędnych odległości punktów wykresu od pewnej prostej (w przypadku funkcji f – prostej $y = 0$ oraz prostej $x = 0$) maleją (w nieskończoności) do zera. Jeśli taka sytuacja ma miejsce, to tę prostą nazwiemy asymptotą wykresu funkcji.

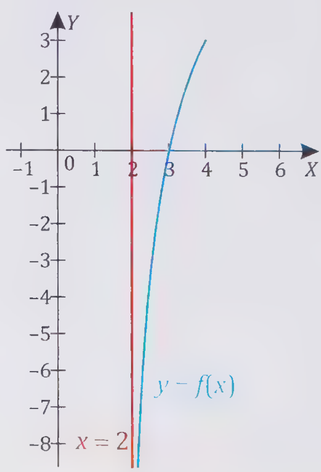
Możliwe są trzy przypadki.

<u>I przypadek</u>
Argumenty funkcji dążą do pewnej liczby x_0 (z lewej strony, z prawej strony lub z obu stron), a wtedy wartości funkcji dążą do $+\infty$ (lub $-\infty$).

a) $f(x) = \frac{1}{(x-3)^2}$, $x \in (1,3) \cup (3,5)$



b) $f(x) = 10\log(x-2)$, $x \in (2, 4)$

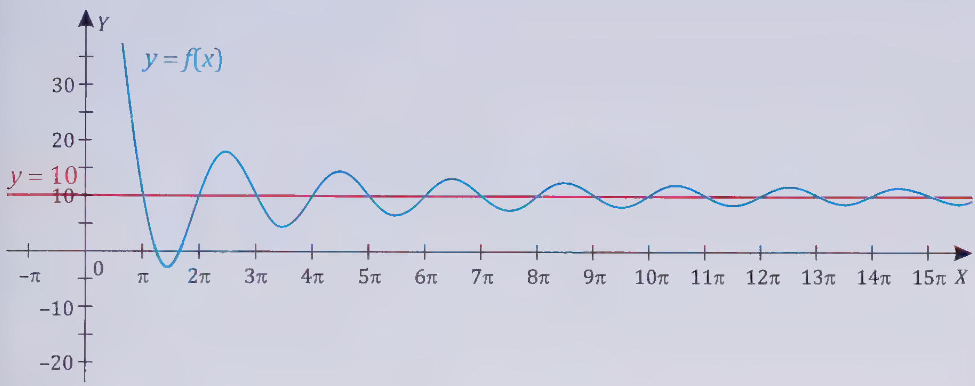


W tym przypadku mówimy o asymptocie pionowej (jednostronnej lub obustronnej); w punkcie a) prosta $x = 3$ jest asymptotą pionową obustronną, w punkcie b) prosta $x = 2$ jest asymptotą pionową prawostronną.

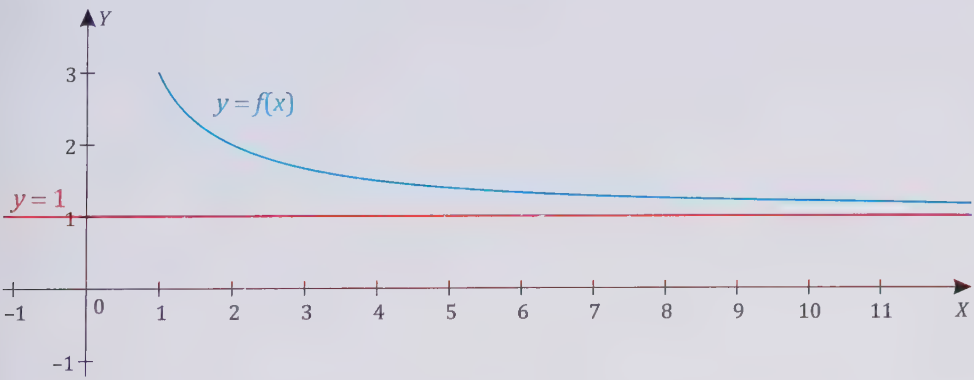
<u>II przypadek</u>

Argumenty funkcji dążą do granicy niewłaściwej $+\infty$ (lub $-\infty$), a wartości funkcji dążą do pewnej liczby.

c) $f(x) = \dfrac{60 \sin x}{x} + 10, \quad x > 2$



d) $f(x) = \dfrac{x+2}{x}, \quad x > 1$

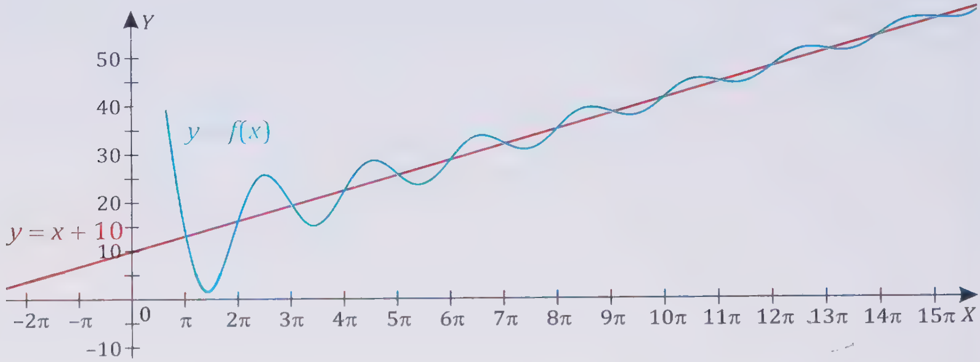


W tym przypadku mówimy o asymptocie poziomej (jednostronnej lub obustronnej); w punkcie c) prosta $y = 10$ jest asymptotą poziomą prawostronną, w punkcie d) prosta $y = 1$ jest również asymptotą poziomą prawostronną.

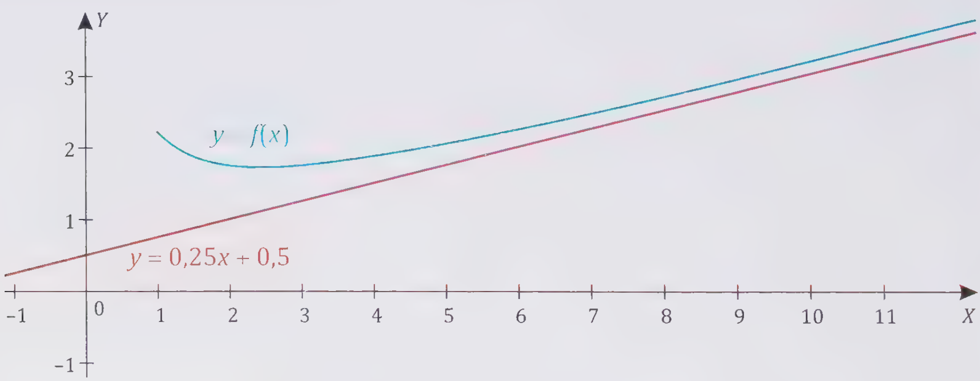
III przypadek

Argumenty funkcji dążą do granicy niewłaściwej (+∞ lub -∞) i wtedy wartości funkcji również dążą do granicy niewłaściwej (+∞ lub -∞) w pewien określony sposób.

e) $f(x) = \dfrac{60 \sin x}{x} + x + 10, \quad x > 2$



f) $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x + 6}{4x}, \quad x > 1$



W tym przypadku mówimy o asymptocie ukośnej (jednostronnej lub obustronnej); w punkcie e) prosta $y = x + 10$ jest asymptotą ukośną prawostronną, podobnie w punkcie f) prosta $y = 0{,}25x + 0{,}5$ jest asymptotą ukośną prawostronną.

Proste równoległe do osi OX oraz proste nierównoległe do osi układu współrzędnych można opisać równaniem mającym postać $y = ax + b$. Równanie takie będziemy nazywać równaniem kierunkowym (więcej o równaniach prostej powiemy w rozdziale 3.). Przypadek II i III omówimy więc łącznie – asymptotę poziomą będziemy traktować jako szczególny przypadek asymptoty ukośnej (mówiąc dokładniej: asymptotą ukośną opisaną równaniem kierunkowym, w którym współczynnik przy x jest równy zero, będziemy nazywać asymptotą poziomą).

Sprecyzujemy pojęcie asymptoty i omówimy sposoby wyznaczania asymptot.

Definicja 1.

Niech funkcja f będzie określona w prawostronnym (odpowiednio lewostronnym) sąsiedztwie punktu x_0. Prosta o równaniu $x = x_0$ jest **asymptotą pionową prawostronną** (odpowiednio **asymptotą pionową lewostronną**) wykresu funkcji f wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = -\infty \qquad \text{lub} \qquad \lim_{x\to x_0^+} f(x) = +\infty$$

$$\text{(odpowiednio } \lim_{x\to x_0^-} f(x) = -\infty \qquad \text{lub} \qquad \lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty\text{).}$$

Jeżeli prosta o równaniu $x = x_0$ jest jednocześnie asymptotą pionową lewostronną i prawostronną wykresu funkcji f, to nazywamy ją **asymptotą pionową obustronną** wykresu funkcji f lub krótko **asymptotą pionową** wykresu tej funkcji.

Przykład 1.

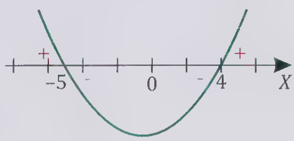
Zbadamy istnienie asymptot pionowych wykresu funkcji $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 12}{(x+5)(x-4)}$.

Dziedziną funkcji f jest zbiór $(-\infty, -5) \cup (-5, 4) \cup (4, +\infty)$. Asymptoty wykresu mogą mieć postać $x = x_0$, gdzie x_0 jest miejscem zerowym mianownika ułamka występującego we wzorze funkcji f. Tylko w puntach -5 oraz 4 granica funkcji f może być niewłaściwa.

Szkicujemy wykres funkcji $y = (x+5)(x-4)$ i obliczamy:

$$\lim_{x\to -5^-} f(x) = \lim_{x\to -5^-} \frac{\overbrace{\boxed{x^2 - x - 12}}^{\to 18}}{\underbrace{\boxed{(x+5)(x-4)}}_{\to 0^+}} = +\infty$$

$$\lim_{x\to -5^+} f(x) = \lim_{x\to -5^+} \frac{\overbrace{\boxed{x^2 - x - 12}}^{\to 18}}{\underbrace{\boxed{(x+5)(x-4)}}_{\to 0^-}} = -\infty$$



Prosta określona równaniem $x = -5$ jest asymptotą pionową obustronną wykresu funkcji f.

Obliczamy granice jednostronne funkcji f w punkcie 4:

$$\lim_{x\to 4} f(x) = \lim_{x\to 4} \frac{\overbrace{\boxed{x^2 - x - 12}}^{\to 0}}{\underbrace{\boxed{(x+5)(x-4)}}_{\to 0}} = \lim_{x\to 4} \frac{(x+3)(x-4)}{(x+5)(x-4)} = \lim_{x\to 4} \frac{\overbrace{\boxed{x+3}}^{\to 7}}{\underbrace{\boxed{x+5}}_{\to 9}} = \frac{7}{9}$$

Podobnie otrzymujemy $\lim\limits_{x\to 4^+} f(x) = \dfrac{7}{9}$.

Zatem prosta $x = 4$ nie jest asymptotą pionową wykresu funkcji (obie granice jednostronne są właściwe). Wykres funkcji f ma tylko jedną asymptotę pionową; jest to prosta o równaniu $x = -5$.

Omówimy teraz pojęcie asymptoty ukośnej. Wróćmy do przykładów z początku tematu. Podaliśmy tam (zobacz str. 120), że asymptotą ukośną wykresu funkcji

$$f(x)=\frac{60\sin x}{x}+x+10, \text{ gdzie } x>2,$$

jest prosta o równaniu

$$y=x+10$$

Łatwo zauważyć, że

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(x+10)]=0$$

Warunek ten znaczy, że różnica między wartościami funkcji $y=f(x)$ a odpowiadającymi im wartościami funkcji liniowej $y=x+10$ dążą do 0, jeśli x dąży do $+\infty$.

Podobnie jest w przypadku funkcji

$$f(x)=\frac{x^2+2x+6}{4x}, \text{ gdzie } x>1,$$

której wykres znajduje się na stronie120. Asymptotą ukośną tego wykresu jest prosta o równaniu $y=0{,}25x+0{,}5$. Mamy:

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(0{,}25x+0{,}5)]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^2+2x+6}{4x}-(0{,}25x+0{,}5)\right]=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+2x+6-x^2-2x}{4x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3}{2x}=0$$

Możemy przyjąć następującą definicję.

Definicja 2.

Niech funkcja f będzie określona w przedziale $(k, +\infty)$, (odpowiednio $(-\infty, k)$), $k\in \boldsymbol{R}$.

Prosta o równaniu $y=ax+b$ jest **asymptotą ukośną prawostronną** (odpowiednio **asymptotą ukośną lewostronną**) wykresu funkcji f wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(ax+b)]=0 \qquad \text{(odpowiednio } \lim_{x\to-\infty}[f(x)-(ax+b)]=0.$$

Jeśli prosta $y=ax+b$ jest jednocześnie asymptotą ukośną prawostronną i lewostronną wykresu funkcji f, to nazywamy ją **asymptotą ukośną obustronną** wykresu funkcji f lub krócej **asymptotą ukośną** wykresu tej funkcji.

Definicja 2. pozwala sprawdzić, czy prosta o danym równaniu jest asymptotą ukośną wykresu danej funkcji. O tym, w jaki sposób można wyznaczyć równanie takiej asymptoty, mówi kolejne twierdzenie.

Twierdzenie 1.
Prosta o równaniu $y = ax + b$ jest asymptotą ukośną prawostronną wykresu funkcji f wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją (właściwe) granice $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ i $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-ax]$ oraz

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = a \quad \text{i} \quad \lim_{x\to+\infty}[f(x)-ax] = b.$$

Twierdzenie ma postać równoważności, więc jego dowód składa się z dwóch części.

Część I.
Założenie: prosta $y = ax + b$ jest asymptotą ukośną prawostronną wykresu funkcji f

Teza: istnieją właściwe granice $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ i $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-ax]$

oraz $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = a$ i $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-ax] = b$

Dowód: Z założenia wynika (zobacz definicja 2.), że

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(ax+b)] = 0, \text{ zatem}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)-(ax+b)}{x} = 0$$

(licznik ułamka $\frac{f(x)-(ax+b)}{x}$ dąży do 0, a mianownik dąży do $+\infty$, więc cały ułamek dąży do 0).

Zauważmy, że $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{ax+b}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(a+\frac{b}{x}\right) = a$, wobec tego

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)-(ax+b)+(ax+b)}{x} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)-(ax+b)}{x} + \lim_{x\to+\infty}\frac{ax+b}{x} = 0 + a$$

Dwie ostatnie granice istnieją i są właściwe, więc na mocy twierdzenia 1b ze str. 97 istnieje granica $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ oraz $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = a$.

Podobnie otrzymujemy:

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-ax] = \lim_{x\to+\infty}[f(x)-(ax+b)+b] =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}[f(x)-(ax+b)] + \lim_{x\to+\infty} b = 0 + b$$

Dwie ostatnie granice istnieją i są właściwe, więc znów na mocy twierdzenia 1b ze str. 97 istnieje granica

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-ax] \quad \text{oraz} \quad \lim_{x\to+\infty}[f(x)-ax]=b.$$

Część II.

Założenie: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=a$ i $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-ax]=b$

Teza: prosta $y=ax+b$ jest asymptotą ukośną prawostronną wykresu funkcji f

Dowód: Zgodnie z definicją 2. wystarczy pokazać, że $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(ax+b)]=0$.
Mamy:

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(ax+b)]=\lim_{x\to+\infty}[f(x)-ax]-\lim_{x\to+\infty}b$$

Na mocy założenia istnieją właściwe granice $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-ax]$ oraz $\lim\limits_{x\to+\infty}b$. Zatem na mocy twierdzenia 1c ze str. 97 istnieje granica właściwa

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(ax+b)]$$

oraz

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(ax+b)]=\lim_{x\to+\infty}[f(x)-ax]-\lim_{x\to+\infty}b=b-b=0$$

Dowód twierdzenia 1. został zakończony.

Oczywiście prawdziwe jest analogiczne twierdzenie dla asymptot ukośnych lewostronnych.

Twierdzenie 2.
Prosta o równaniu $y=ax+b$ jest asymptotą ukośną lewostronną wykresu funkcji f wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją (właściwe) granice $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ i $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-ax]$ oraz

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=a \quad \text{i} \quad \lim_{x\to-\infty}[f(x)-ax]=b.$$

Przykład 2.

Wyznaczymy asymptoty ukośne wykresów funkcji:

a) $f(x)=\dfrac{x^2+4x+5}{6-3x}$ b) $f(x)=\dfrac{4x^2+x}{|x|+1}$

Ad a) $D_f = \boldsymbol{R} - \{2\}$. Zbadamy najpierw istnienie asymptoty ukośnej prawostronnej. Obliczamy:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+4x+5}{(6-3x)x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+4x+5}{6x-3x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}}{\frac{6}{x}-3}=-\frac{1}{3}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-\left(-\frac{1}{3}x\right)\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^2+4x+5}{6-3x}+\frac{x}{3}\right]=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^2+4x+5}{6-3x}+\frac{x(2-x)}{3(2-x)}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{6x+5}{6-3x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{6+\frac{5}{x}}{\frac{6}{x}-3}=-2$$

Prosta $y=-\frac{1}{3}x-2$ jest asymptotą ukośną prawostronną wykresu funkcji f.

Sprawdzamy teraz, czy istnieje asymptota ukośna lewostronna wykresu funkcji f:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+4x+5}{(6-3x)x}=-\frac{1}{3}\quad\text{oraz}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-\left(-\frac{1}{3}x\right)\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x^2+4x+5}{6-3x}+\frac{x}{3}\right]=-2$$

Otrzymaliśmy, że prosta $y=-\frac{1}{3}x-2$ jest asymptotą ukośną lewostronną wykresu funkcji f.

Ostatecznie prosta o równaniu $y=-\frac{1}{3}x-2$ jest asymptotą ukośną (obustronną) wykresu funkcji f.

Ad b) $D_f = \boldsymbol{R}$. Obliczamy:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{4x^2+x}{|x|+1}\cdot\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{4x^2+x}{(x+1)x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{4+\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}=4$$

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-4x]=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{4x^2+x}{|x|+1}-4x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{4x^2+x}{x+1}-\frac{4x(x+1)}{x+1}\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-3x}{x+1}=-3$$

Prosta o równaniu $y=4x-3$ jest asymptotą ukośną prawostronną wykresu funkcji f. Teraz szukamy asymptoty ukośnej lewostronnej:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{4x^2+x}{|x|+1}\cdot\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{4x^2+x}{-x+1}\cdot\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{4x^2+x}{-x^2+x}=$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{4 + \frac{1}{x}}{-1 + \frac{1}{x}} = -4$$

$$\lim_{x \to -\infty} [f(x) - (-4x)] = \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{4x^2 + x}{|x| + 1} + 4x \right) = \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{4x^2 + x}{-x + 1} + 4x \right) =$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{5x}{-x + 1} = -5$$

Prosta o równaniu $y = -4x - 5$ jest asymptotą ukośną lewostronną wykresu funkcji f.

Na koniec tego tematu omówimy szczególny przypadek asymptoty ukośnej, czyli asymptotę poziomą.

Zgodnie z tym, co powiedzieliśmy już o asymptocie poziomej (patrz str. 120), uwzględniając definicję 2., przyjmujemy, że prosta o równaniu $y = b$ jest:
- **asymptotą poziomą prawostronną** wykresu funkcji f tylko wtedy, gdy
  $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - b] = 0$, czyli $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b$
- **asymptotą poziomą lewostronną** wykresu funkcji f tylko wtedy, gdy
  $\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - b] = 0$, czyli $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b$

Prostą, która jest jednocześnie asymptotą poziomą prawostronną i lewostronną, nazywamy **asymptotą poziomą obustronną** lub krótko **asymptotą poziomą**.

Przykład 3.

Zbadamy, czy istnieją asymptoty poziome wykresu funkcji f, jeśli:

a) $f(x) = \dfrac{2x^2 - x + 3}{x^4 + x^2}$ b) $f(x) = \dfrac{2x^2 - x + 3}{4x^2 + 1}$ c) $f(x) = \dfrac{x^4 + x^2}{2x^2 - x + 3}$

Ad a) $D_f = \mathbf{R}$. Obliczamy:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2 - x + 3}{x^4 + x^2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{2}{x^2} - \frac{1}{x^3} + \frac{3}{x^4}}{1 + \frac{1}{x^2}} = 0$$

Podobnie otrzymujemy $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$.

Prosta o równaniu $y = 0$ jest asymptotą poziomą (obustronną) wykresu funkcji f.
Ad b) $D_f = \mathbf{R}$. Mamy:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2 - x + 3}{4x^2 + 1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2 - \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}}{4 + \frac{1}{x^2}} = \frac{1}{2}$$

Analogicznie otrzymujemy, że $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \frac{1}{2}$.

Prosta o równaniu $y = \frac{1}{2}$ jest asymptotą poziomą (obustronną) wykresu funkcji *f*.

Ad c) $D_f = \boldsymbol{R}$. Obliczamy:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^4 + x^2}{2x^2 - x + 3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 + 1}{2 - \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}} = +\infty$$

Podobnie $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

Wykres funkcji *f* nie ma asymptoty poziomej prawostronnej ani lewostronnej.

Zauważ, że wykres funkcji może mieć co najwyżej jedną asymptotę ukośną prawostronną (lewostronną). Jeśli więc stwierdzimy, że istnieje asymptota pozioma prawostronna (lewostronna), to nie ma potrzeby sprawdzać, czy istnieje inna asymptota ukośna prawostronna (lewostronna) (o współczynniku kierunkowym różnym od zera).

Sprawdź, czy rozumiesz

1. Czy istnieje asymptota pionowa (jednostronna) wykresu funkcji *f*? Jeśli tak, podaj jej równanie.

   a) $f(x) = \frac{3}{\sqrt{x+4}}$ b) $f(x) = \frac{2x-2}{|x-1|}$ c) $f(x) = \frac{5x}{\sqrt{x^2-1}}$

2. Wykaż, że istnieje asymptota pionowa obustronna wykresu funkcji *f*, i podaj jej równanie, jeśli:

   a) $f(x) = \frac{x^2}{x+5}$ b) $f(x) = \frac{4x}{(x+7)^2}$ c) $f(x) = \frac{x-1}{|x-2|}$

3. Zbadaj, czy istnieją asymptoty poziome (jednostronne) wykresu funkcji *f*. Jeśli tak, podaj ich równania.

   a) $f(x) = \frac{x+3}{x-2}$ b) $f(x) = \frac{\sqrt{x+3}}{x^2}$ c) $f(x) = \frac{(1+x)^2}{3-2x^2}$

4. Wyznacz równanie asymptoty ukośnej wykresu funkcji *f*, jeśli:

   a) $f(x) = \frac{3x^2}{x+2}$ b) $f(x) = \frac{1-2x^3}{x^2}$ c) $f(x) = \frac{(x-2)^2}{1-x}$

5. Wyznacz wszystkie asymptoty wykresu funkcji $f(x) = \frac{2x^2 + x}{x^2 - 3}$.

Pochodna funkcji w punkcie

Rozważmy następujące zagadnienie.

Wystrzelono do góry pocisk. Załóżmy, że odległość $s(t)$ pocisku (w metrach) od powierzchni ziemi w czasie t (sekund) wyraża wzór:

$$s(t) = 60t - 5t^2, \quad \text{gdzie } t \in \langle 0, 12\rangle.$$

Interesuje nas prędkość pocisku w czwartej sekundzie lotu. Obliczmy najpierw prędkość (średnią) między czwartą a piątą sekundą lotu pocisku. W tym celu wyznaczamy przyrost drogi $s(5) - s(4)$ i dzielimy go przez przyrost czasu

$$v_1 = \frac{s(5) - s(4)}{5 - 4} = \frac{175 - 160}{1} = 15 \text{ (m/s)}$$

Czy prędkość 15 m/s można uznać za prędkość w czwartej sekundzie? Otóż nie. Jeśli bowiem skrócimy przedział czasu, np. do 0,5 sekundy, to otrzymamy inną prędkość:

$$v_2 = \frac{s(4{,}5) - s(4)}{4{,}5 - 4} = \frac{168{,}75 - 160}{0{,}5} = 17{,}5 \text{ (m/s)}$$

Obliczmy jeszcze prędkości średnie dla krótszych przedziałów czasowych (równych 0,1 s, 0,01 s, 0,001 s):

$$v_3 = \frac{s(4{,}1) - s(4)}{4{,}1 - 4} = \frac{161{,}95 - 160}{0{,}1} = 19{,}5 \text{ (m/s)}$$

$$v_4 = \frac{s(4{,}01) - s(4)}{4{,}01 - 4} = \frac{160{,}1995 - 160}{0{,}01} = 19{,}95 \text{ (m/s)}$$

$$v_5 = \frac{s(4{,}001) - s(4)}{4{,}001 - 4} = \frac{160{,}019995 - 160}{0{,}001} = 19{,}995 \text{ (m/s)}$$

Możemy zauważyć, że jeśli skracamy przedział czasu, to otrzymane prędkości stają się coraz bliższe 20 m/s. Wykażemy, że rzeczywiście ta graniczna prędkość jest równa 20 m/s; uznamy ją za prędkość w czwartej sekundzie ruchu. Interesuje nas wyrażenie

$$(*) \qquad \lim_{x \to 4} \frac{s(x) - s(4)}{x - 4}$$

Jeśli oznaczymy $x - 4 = h$, to $x = 4 + h$ i $x \to 4$ wtedy i tylko wtedy, gdy $h \to 0$. Zatem wyrażenie (*) można zapisać równoważnie

$$(**) \qquad \lim_{h \to 0} \frac{s(4 + h) - s(4)}{h}$$

Obliczamy:

$$\lim_{h\to 0}\frac{s(4+h)-s(4)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\left[60(4+h)-5(4+h)^2\right]-160}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{20h-5h^2}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}(20-5h)=20\ (\mathrm{m/s})$$

Otrzymaliśmy, że w czwartej sekundzie ruchu pocisk miał prędkość 20 (m/s). Prędkość tę nazywamy prędkością chwilową (w odróżnieniu od wyznaczonych wcześniej prędkości średnich).

Rozważmy teraz sytuację ogólniejszą. Niech f będzie funkcją określoną w pewnym przedziale (a, b), $x_0 \in (a, b)$. Ponadto załóżmy, że h jest liczbą rzeczywistą różną od zera, $x_0 + h \in (a, b)$. Wówczas możemy zdefiniować „średnią szybkość zmiany wartości funkcji f w przedziale o końcach x_0 i $x_0 + h$" jako:

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

Natomiast granicę (o ile istnieje):

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

możemy określić jako „chwilową szybkość zmiany wartości funkcji f w punkcie x_0". Zależy ona tylko od funkcji f i punktu x_0 i nie zależy od h (w przeciwieństwie do „średniej szybkości zmiany wartości funkcji f w przedziale o końcach x_0 i $x_0 + h$").

W związku z powyższymi rozważaniami przyjmujemy następujące definicje:

Definicja 1.

Niech funkcja f będzie określona w pewnym otoczeniu $U(x_0)$, natomiast h będzie liczbą różną od 0, dla której $x_0 + h$ należy do otoczenia $U(x_0)$.
Ilorazem różnicowym funkcji f w punkcie x_0, odpowiadającym przyrostowi h argumentu, nazywamy liczbę $\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$.

Definicja 2.

Niech funkcja f będzie określona w pewnym otoczeniu $U(x_0)$, natomiast h będzie liczbą różną od 0, dla której $x_0 + h$ należy do otoczenia $U(x_0)$.
Pochodną funkcji f w punkcie x_0 będziemy nazywać granicę (o ile istnieje właściwa)

$$(*)\qquad \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

i oznaczać $f'(x_0)$, a o funkcji f powiemy, że ma pochodną w punkcie x_0 lub że jest różniczkowalna w punkcie x_0.

Krótko można zapisać:

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Pochodna funkcji f w punkcie x_0 to liczba równa granicy ilorazu różnicowego funkcji f przy h dążącym do zera (jeśli ta granica istnieje).

Jeśli granica (*) nie istnieje lub jest niewłaściwa, to powiemy, że funkcja f nie ma pochodnej w punkcie x_0 lub że nie jest różniczkowalna w punkcie x_0.

Za twórców rachunku różniczkowego (i całkowego – o którym nie będziemy mówić w tym podręczniku) uważa się angielskiego fizyka i matematyka Izaaka Newtona (1642–1727) oraz niemieckiego filozofa i matematyka Wilhelma Leibniza [wym. lajbnica] (1646–1716). Wyniki w tej dziedzinie osiągnęli różnymi metodami, niezależnie od siebie. Odkrycie rachunku różniczkowego i całkowego doprowadziło do powstania nowego działu matematyki – analizy matematycznej.

W podręcznikach matematyki, a także w wielu podręcznikach z nauk przyrodniczych, można spotkać jeszcze inne oznaczenia pochodnej funkcji f w punkcie x_0, a mianowicie:

$$\frac{df(x_0)}{dx} \quad \text{lub} \quad \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_0}$$

Jak zapewne pamiętasz, granica funkcji w punkcie istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją granice jednostronne tej funkcji w tym punkcie i są one równe. W związku z tym wprowadzamy następującą definicję.

Definicja 3.

Niech funkcja f będzie określona w pewnym prawostronnym otoczeniu $U_+(x_0)$, h będzie liczbą dodatnią, dla której $x_0 + h$ należy do otoczenia $U_+(x_0)$.
Pochodną prawostronną funkcji f w punkcie x_0 będziemy nazywać granicę (o ile istnieje właściwa) $\lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ i oznaczać $f'_+(x_0)$.

Analogicznie można zdefiniować **pochodną lewostronną funkcji f w punkcie** x_0, którą będziemy oznaczać $f'_-(x_0)$.

Prawdziwe jest następujące twierdzenie.

Twierdzenie 1.

Niech funkcja f będzie określona w pewnym otoczeniu punktu x_0.
Funkcja f ma pochodną w punkcie x_0 równą p ($p \in \boldsymbol{R}$) wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją pochodne jednostronne $f'_+(x_0)$ oraz $f'_-(x_0)$ i zachodzi równość

$$f'(x_0) = p \iff [f'_+(x_0) = f'_-(x_0) = p]$$

Przykład 1.

Obliczymy pochodną funkcji f w punkcie x_0, jeśli:

a) $f(x) = x^3 - 4x,\ x_0 = 5$ b) $f(x) = \sqrt{x-1},\ x_0 = 2$

Ad a) $D_f = \boldsymbol{R}$, więc funkcja f jest określona w (każdym) otoczeniu punktu 5. Niech h będzie dowolną liczbą rzeczywistą różną od 0, oczywiście $(5 + h) \in \boldsymbol{R}$. Obliczamy:

$$f(5+h) = (5+h)^3 - 4(5+h) = 125 + 75h + 15h^2 + h^3 - 20 - 4h =$$

$$= h^3 + 15h^2 + 71h + 105$$

$$f(5) = 5^3 - 4 \cdot 5 = 105$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(5+h) - f(5)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^3 + 15h^2 + 71h + 105 - 105}{h} = \lim_{h\to 0} (h^2 + 15h + 71) = 71.$$

Otrzymaliśmy $f'(5) = 71$.

Ad b) $D_f = \langle 1, +\infty)$, więc funkcja f jest określona w pewnym otoczeniu $U(2)$. Niech h będzie taką liczbą rzeczywistą różną od 0, że $(2 + h) \in U(2)$. Obliczamy:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{1+h} - \sqrt{1}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\left(\sqrt{1+h} - 1\right)\left(\sqrt{1+h} + 1\right)}{h\left(\sqrt{1+h} + 1\right)} =$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{1 + h - 1}{h\left(\sqrt{1+h} + 1\right)} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h\left(\sqrt{1+h} + 1\right)} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{1+h} + 1} = \frac{1}{2}$$

Tak więc $f'(2) = \frac{1}{2}$.

Przykład 2.

Zbadamy, czy istnieje pochodna funkcji f oraz pochodna funkcji g w punkcie x_0, jeśli:

a) $f(x) = |x|^3,\ x_0 = 0$ b) $g(x) = |x|,\ x_0 = 0$

Ad a) $D_f = \boldsymbol{R}$, więc funkcja f jest określona w (każdym) otoczeniu punktu 0. Wzór funkcji można zapisać w postaci:

$$f(x) = \begin{cases} -x^3, & \text{jeśli } x < 0 \\ x^3, & \text{jeśli } x \geqslant 0 \end{cases}$$

Wygodnie jest zbadać istnienie pochodnych jednostronnych w punkcie 0. Obliczamy:

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{h^3}{h}=\lim_{h\to 0^+}h^2=0,\quad \text{czyli } f'_+(0)=0$$

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{-h^3}{h}=\lim_{h\to 0^-}(-h^2)=0,\quad \text{czyli } f'_-(0)=0$$

Pochodne jednostronne są równe, zatem funkcja f jest różniczkowalna w punkcie 0 oraz $f'(0)=0$.

Ad b) $D_g=\mathbf{R}$. Podobnie jak w punkcie a) zbadamy istnienie pochodnych jednostronnych. Mamy:

$$g(x)=\begin{cases}-x, & \text{jeśli } x<0\\ x, & \text{jeśli } x\geqslant 0\end{cases}$$

Obliczamy:

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{g(0+h)-g(0)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{h}{h}=\lim_{h\to 0^+}1=1,\quad \text{czyli } g'_+(0)=1$$

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{g(0+h)-g(0)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{-h}{h}=\lim_{h\to 0^-}(-1)=-1,\quad \text{czyli } g'_-(0)=-1$$

Pochodne jednostronne istnieją, ale nie są równe, więc funkcja g nie jest różniczkowalna w punkcie 0.

Przykład 3.

Zbadamy, czy istnieją pochodne funkcji f i g w punkcie 1, jeśli:

a) $f(x)=\begin{cases}x^2-3, & \text{jeśli } x\leqslant 1\\ -\frac{2}{x}, & \text{jeśli } x>1\end{cases}$ b) $g(x)=\begin{cases}-x-1, & \text{jeśli } x\leqslant 1\\ -\frac{2}{x}, & \text{jeśli } x>1\end{cases}$

Ad a) Badamy istnienie pochodnych jednostronnych:

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{\frac{-2}{1+h}-(-2)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{2h}{h(1+h)}=$$

$$=\lim_{h\to 0^+}\frac{2}{1+h}=2,\quad \text{czyli } f'_+(1)=2$$

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{(1+h)^2-3-(-2)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{(2+h)h}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}(2+h)=2,\quad \text{czyli } f'_-(1)=2.$$

Tak więc $f'_+(1)=f'_-(1)=2$.
Pochodne jednostronne są równe, zatem funkcja f ma pochodną w punkcie 1 i $f'(1)=2$.

Ad b) Obliczamy

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{g(1+h)-g(1)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{\frac{-2}{1+h}-(-2)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{2}{1+h}=2\text{, czyli } g'_+(1)=2$$

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{g(1+h)-g(1)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{-(1+h)-1-(-2)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{-h}{h}=-1\text{, czyli } g'_-(1)=-1$$

Pochodne jednostronne istnieją, ale nie są równe; stąd funkcja g nie ma pochodnej w punkcie 1.

Analizując trzy ostatnie przykłady, możemy stwierdzić, że we wszystkich punktach, w których badaliśmy istnienie pochodnych, rozpatrywane funkcje były ciągłe (sprawdź to!). Jednak nie w każdym z tych punktów funkcje miały pochodne. Zatem z tego, że funkcja jest ciągła w jakimś punkcie, nie wynika, że ma w tym punkcie pochodną. A jeśli funkcja ma w jakimś punkcie pochodną, to czy w tym punkcie jest ciągła? Odpowiedź na to pytanie daje następujące twierdzenie.

Twierdzenie 2.
Jeśli funkcja f, określona w pewnym otoczeniu punktu x_0, ma pochodną w tym punkcie, to jest ciągła w tym punkcie.

Założenie: funkcja f jest określona w pewnym otoczeniu $U(x_0)$, istnieje $f'(x_0)$

Teza: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$

Dowód: Zauważmy, że jeśli $x\neq x_0$, to

$$f(x)=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}(x-x_0)+f(x_0)$$

Oznaczmy różnicę $x-x_0$ przez h, czyli $h=x-x_0$. Z założenia $x\neq x_0$, więc $h\neq 0$. Zatem $x=x_0+h$ i $x\to x_0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $h\to 0$.

Mamy:

$$f(x_0+h)=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\cdot h+f(x_0)$$

Z założenia o istnieniu pochodnej funkcji f w punkcie x_0 wynika, że granica $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ istnieje i jest równa $f'(x_0)$.

Ponadto $\lim\limits_{h\to 0}h=0$ oraz $\lim\limits_{h\to 0}f(x_0)=f(x_0)$, więc istnieje granica $\lim\limits_{h\to 0}f(x_0+h)$ (czyli $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$) oraz

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=\lim_{h\to 0}f(x_0+h)=\lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\cdot h+f(x_0)\right]=f'(x_0)\cdot 0+f(x_0)=f(x_0),$$

czyli

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0),$$

co kończy dowód.

Można powiedzieć, że ciągłość funkcji w punkcie jest warunkiem koniecznym istnienia pochodnej funkcji w tym punkcie. Jak już wiemy, nie jest to jednak warunek wystarczający.

Wniosek: Jeśli funkcja f, określona w pewnym otoczeniu punktu x_0, nie jest ciągła w punkcie x_0, to nie ma pochodnej w tym punkcie.

Przykład 4.

Wyznaczymy a i b tak, aby funkcja $f(x)=\begin{cases} ax+b, & \text{jeśli } x<-1 \\ x^2-4, & \text{jeśli } x\geqslant -1 \end{cases}$ miała pochodną w punkcie -1.

Funkcja f musi być ciągła w punkcie -1. Obliczamy:

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-}(ax+b) = -a+b$$

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+}(x^2-4) = -3, \qquad f(-1)=-3$$

Funkcja f będzie ciągła w punkcie -1 wtedy, gdy spełniona będzie równość

$$-a+b=-3$$

Obliczamy teraz pochodne jednostronne:

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h} = \lim_{h\to 0^+}\frac{(-1+h)^2-4-(-3)}{h} = \lim_{h\to 0^+}\frac{h^2-2h}{h} = \lim_{h\to 0^+}(h-2) = -2,$$

$$f'_+(-1)=-2$$

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h} = \lim_{h\to 0^-}\frac{a(-1+h)+b-(-3)}{h} = \lim_{h\to 0^-}\frac{-a+b+ah+3}{h}$$

Korzystamy teraz z warunku ciągłości funkcji f w punkcie -1:

$-a+b=-3$, zatem

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{-a+b+ah+3}{h} = \lim_{h\to 0^-}\frac{-3+ah+3}{h} = \lim_{h\to 0^-}\frac{ah}{h} = a$$

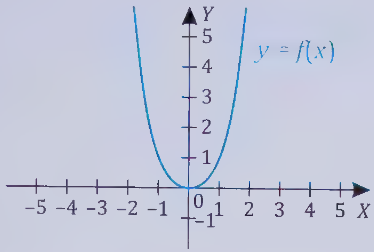
$$f'_-(-1)=a$$

Pochodne jednostronne są równe, skąd otrzymujemy

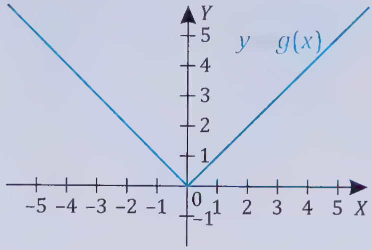
$a=-2$, zatem $b=-5$

Funkcja f jest różniczkowalna w punkcie -1 wtedy, gdy $a=-2$ i $b=-5$.

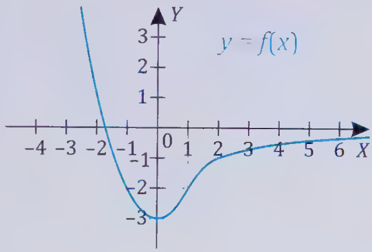
Zastanówmy się jeszcze, jak – mając zaprezentowany wykres funkcji ciągłej w danym punkcie x_0 – rozpoznać, czy w tym punkcie funkcja ma pochodną. Przyjrzyjmy się wykresom funkcji z przykładów 2., 3. i 4.



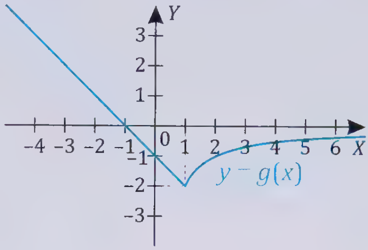
$f(x)=|x|^3,\ x_0=0$



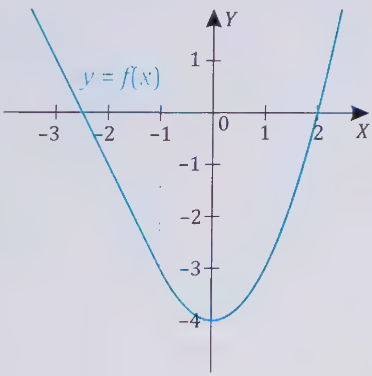
$g(x)=|x|,\ x_0=0$



$$f(x)=\begin{cases} x^2-3, & \text{jeśli } x\leqslant 1\\ \dfrac{-2}{x}, & \text{jeśli } x>1\end{cases},\quad x_0=1$$



$$g(x)=\begin{cases} -x-1, & \text{jeśli } x\leqslant 1\\ \dfrac{-2}{x}, & \text{jeśli } x>1\end{cases},\quad x_0=1$$



$$f(x)=\begin{cases} -2x-5, & \text{jeśli } x<-1\\ x^2-4, & \text{jeśli } x\geqslant -1\end{cases},\quad x_0=-1$$

Funkcja f nie ma pochodnej w punkcie x_0, w którym jest ciągła, jeśli wykres „nie przebiega gładko” w punkcie $(x_0, f(x_0))$, lecz „załamuje się” (występuje tzw. ostrze).

Sprawdź, czy rozumiesz

1. Wyznacz pochodną funkcji f w punkcie x_0, jeśli:

   a) $f(x)=4x-1,\ x_0=1$ b) $f(x)=-3x^2,\ x_0=-1$ c) $f(x)=\dfrac{2}{x},\ x_0=3$

2. Wykaż, że nie istnieje pochodna funkcji $f(x)=\begin{cases} x^2-1, & \text{jeśli } x<2\\ -x+5, & \text{jeśli } x\geqslant 2\end{cases}$ w punkcie 2.

Funkcja pochodna

Rozważmy funkcję $f(x) = \sqrt{x}$, gdzie $x \in \langle 0, +\infty)$. Możemy postawić pytanie, czy w każdym punkcie z przedziału $\langle 0, +\infty)$ funkcja f ma pochodną.

Oczywiście w przypadku punktu 0 możemy mówić co najwyżej o pochodnej prawostronnej (bowiem funkcja jest określona tylko w prawostronnym otoczeniu punktu 0). Rozważmy dwa przypadki.

<u>I przypadek</u> $x_0 \in (0, +\infty)$
Dla dowolnej liczby x_0 z przedziału $(0, +\infty)$ istnieje takie otoczenie $U(x_0)$, że $U(x_0) \subset (0, +\infty)$. Niech h będzie liczbą rzeczywistą, dla której $(x_0 + h) \in U(x_0)$. Wówczas:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x_0+h}-\sqrt{x_0}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\left(\sqrt{x_0+h}-\sqrt{x_0}\right)\left(\sqrt{x_0+h}+\sqrt{x_0}\right)}{h\left(\sqrt{x_0+h}+\sqrt{x_0}\right)} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{x_0+h-x_0}{h\left(\sqrt{x_0+h}+\sqrt{x_0}\right)} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h\left(\sqrt{x_0+h}+\sqrt{x_0}\right)} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{x_0+h}+\sqrt{x_0}} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$$

Zatem

$$f'(x_0) = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}, \text{ jeśli } x_0 \in (0, +\infty)$$

<u>II przypadek</u> $x_0 = 0$
Niech $U_+(0)$ będzie prawostronnym otoczeniem punktu 0, h – liczbą rzeczywistą dodatnią, dla której $(0 + h) \in U_+(0)$. Wówczas:

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{\sqrt{h}-0}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{h}} = +\infty$$

Nie istnieje pochodna prawostronna funkcji f w punkcie 0.

Podsumujmy:
Dla dowolnego punktu x_0 z przedziału $(0, +\infty)$ istnieje pochodna funkcji $f(x) = \sqrt{x}$ w tym punkcie i ma miejsce równość $f'(x_0) = \dfrac{1}{2\sqrt{x_0}}$. Możemy utworzyć nową funkcję, która liczbie x_0 z przedziału $(0, +\infty)$ przyporządkowuje liczbę $f'(x_0)$, czyli w tym przypadku liczbę $\dfrac{1}{2\sqrt{x_0}}$.

Jeśli $x_0 \in (0, +\infty)$, to

x_0 przyporządkowujemy $f'(x_0)$,

czyli

x_0 przyporządkowujemy $\frac{1}{2\sqrt{x_0}}$

Tę nową funkcję będziemy nazywać funkcją pochodną funkcji f (lub krótko: pochodną funkcji f) i oznaczać f'. Możemy więc zapisać:

$$f(x) = \sqrt{x},\ x \in \langle 0, +\infty)$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}},\ x \in (0, +\infty)$$

Czasami stosuje się też zapis:

$$\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}},\ x \in (0,+\infty)$$

Zauważ, że dziedzina funkcji D_f i dziedzina funkcji pochodnej $D_{f'}$ nie muszą być równe. Zawsze natomiast jest spełniona zależność $D_{f'} \subset D_f$.

Przyjmujemy następującą definicję.

Definicja 1.

Niech f będzie dowolną funkcją określoną w zbiorze D_f.
Funkcją pochodną funkcji f (lub pochodną funkcji f) nazywamy funkcję, która każdej liczbie x_0 z dziedziny D_f przyporządkowuje liczbę $f'(x_0)$ – o ile $f'(x_0)$ istnieje – i oznaczamy ją f'. Zbiór tych liczb x_0, w których funkcja f jest różniczkowalna, stanowi dziedzinę funkcji f', którą oznaczamy $D_{f'}$.

Pochodną funkcji oznacza się również: $\frac{df(x)}{dx}$ lub $\frac{df}{dx}$.

UWAGA: Nie należy mylić terminów: „pochodna funkcji w punkcie" i „pochodna funkcji" („funkcja pochodna"). „Pochodna funkcji w punkcie" jest liczbą (granicą odpowiedniego ilorazu różnicowego). Natomiast „pochodna funkcji" jest to funkcja, która argumentowi x przyporządkowuje liczbę równą pochodnej funkcji w punkcie x.

Tabela poniżej zawiera podstawowe wzory na pochodne funkcji, którymi będziemy się posługiwać w dalszym toku nauki.

lp.	funkcja	pochodna funkcji	dziedzina pochodnej (uwagi)
1.	$f(x)=c$	$f'(c)=0$	$\boldsymbol{R}$ (c – dowolna liczba rzeczywista, f – funkcja stała)
2.	$f(x)=ax+b$	$f'(x)=a$	$\boldsymbol{R}$ (a, b – dowolne liczby rzeczywiste)
3.	$f(x)=ax^2+bx+c$	$f'(x)=2ax+b$	$\boldsymbol{R}$ (a, b, c – dowolne liczby rzeczywiste)
4.	$f(x)=x^n$	$f'(x)=n\cdot x^{n-1}$	$\boldsymbol{R}$ (n – liczba naturalna większa od 1)
5.	$f(x)=\dfrac{1}{x}$	$f'(x)=\dfrac{-1}{x^2}$	$\boldsymbol{R}-\{0\}$
6.	$f(x)=x^k$	$f'(x)=k\cdot x^{k-1}$	$\boldsymbol{R}-\{0\}$ (k – liczba całkowita ujemna)
7.	$f(x)=\sqrt{x}$	$f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$(0,+\infty)$
8.	$f(x)=x^\alpha$	$f'(x)=\alpha\cdot x^{\alpha-1}$	$(0,+\infty)$ (α – dowolna liczba rzeczywista)

Udowodnimy wzory: 1.,2., 3., 4. (w przypadku $n=4$) oraz 5.

Ad 1) $f(x)=c$, $D_f=\boldsymbol{R}$, c – dowolna liczba rzeczywista, zatem

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{c-c}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0}{h}=0,\ \text{stąd}$$

$$f'(x)=0,\ D_{f'}=\boldsymbol{R}$$

Ad 2) $f(x)=ax+b$, $D_f=\boldsymbol{R}$, a, b – dowolne liczby rzeczywiste

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{a(x+h)+b-(ax+b)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{ah}{h}=\lim_{h\to 0}a=a,\ \text{stąd}$$

$$f'(x)=a,\ D_{f'}=\boldsymbol{R}$$

Ad 3) $f(x)=ax^2+bx+c$, $D_f=\boldsymbol{R}$, a, b, c – dowolne liczby rzeczywiste

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{a(x+h)^2+b(x+h)+c-(ax^2+bx+c)}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{h(2ax+b+ah)}{h}=\lim_{h\to 0}(2ax+b+ah)=2ax+b,\ \text{stąd}$$

$$f'(x)=2ax+b,\ D_{f'}=\boldsymbol{R}$$

Ad 4) $f(x)=x^4$, $D_f=\boldsymbol{R}$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^4-x^4}{h}$$

W liczniku ułamka stosujemy dwukrotnie wzór skróconego mnożenia na różnicę kwadratów dwóch wyrażeń:

$$\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^4-x^4}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\left[(x+h)^2-x^2\right]\cdot\left[(x+h)^2+x^2\right]}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{h(2x+h)\left[(x+h)^2+x^2\right]}{h}=\lim_{h\to 0}\left[(2x+h)\left((x+h)^2+x^2\right)\right]=2x\cdot 2x^2=4x^3$$

Otrzymaliśmy $f'(x)=4x^3$, $D_{f'}=\boldsymbol{R}$.

Jeśli chcielibyśmy obliczyć pochodną funkcji $f(x)=x^3+\frac{1}{x}$, gdzie $x\in\boldsymbol{R}-\{0\}$, to wzory z tabeli „nie podpowiadają", jak to zrobić w prosty sposób, mimo że znamy następujące funkcje pochodne:

$$(x^3)'=3x^2 \qquad \text{oraz} \qquad \left(\frac{1}{x}\right)'=\frac{-1}{x^2}$$

W takich przypadkach pomocne będzie następujące twierdzenie:

Twierdzenie 1.

Jeśli funkcje f i g są różniczkowalne w zbiorze D, to dla dowolnej liczby $x\in D$:

a) $[f(x)+g(x)]'=f'(x)+g'(x)$ (wzór na pochodną sumy funkcji)

b) $[f(x)-g(x)]'=f'(x)-g'(x)$ (wzór na pochodną różnicy funkcji)

c) $[f(x)\cdot g(x)]'=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$ (wzór na pochodną iloczynu funkcji)

d) $[c\cdot f(x)]'=c\cdot f'(x)$, gdzie c – dowolna liczba rzeczywista

e) $\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]'=\frac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$, przy dodatkowym założeniu, że $g(x)\neq 0$ w zbiorze D (wzór na pochodną ilorazu funkcji)

Dowód:

Ad a) Zapisujemy iloraz różnicowy odpowiadający funkcji $y=f(x)+g(x)$, gdzie $x\in D$. Mamy:

$$\frac{\left[f(x+h)+g(x+h)\right]-\left[f(x)+g(x)\right]}{h}=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$

Z założenia o różniczkowalności funkcji f i g w punkcie x wynika, że istnieje granica przy h dążącym do 0 każdego z dwóch ostatnich składników (równa $f'(x)$ dla pierwszego z nich i $g'(x)$ dla drugiego). Zatem – na mocy twierdzenia o granicy sumy funkcji – otrzymujemy

$$\lim_{h\to 0}\frac{\left[f(x+h)+g(x+h)\right]-\left[f(x)+g(x)\right]}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$

To znaczy, że $\left[f(x)+g(x)\right]'=f'(x)+g'(x)$

Ad b) Dowód jest analogiczny do dowodu z punktu a)

Ad c) Przekształcamy iloraz różnicowy odpowiadający funkcji $y = f(x) \cdot g(x)$, gdzie $x \in D$. Mamy:

$$\frac{f(x+h)\cdot g(x+h) - f(x)\cdot g(x)}{h} =$$

$$= \frac{f(x+h)\cdot g(x+h) - f(x)\cdot g(x+h) + f(x)\cdot g(x+h) - f(x)\cdot g(x)}{h} =$$

$$= \frac{f(x+h) - f(x)}{h} g(x+h) + \frac{g(x+h) - g(x)}{h} f(x)$$

Z założenia o różniczkowalności funkcji f i g w punkcie x otrzymujemy, że

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x) \quad \text{oraz} \quad \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = g'(x)$$

Funkcja g jest ciągła w punkcie x (ponieważ jest w tym punkcie różniczkowalna), czyli

$\lim\limits_{h\to 0} g(x+h) = g(x)$. Ponadto $\lim\limits_{h\to 0} f(x) = f(x)$.

Korzystamy z twierdzenia o granicy: sumy funkcji, iloczynu funkcji oraz iloczynu funkcji przez stałą

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)\cdot g(x+h) - f(x)\cdot g(x)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \cdot \lim_{h\to 0} g(x+h) + \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \cdot \lim_{h\to 0} f(x)$$

Stąd otrzymujemy:

$$[f(x)\cdot g(x)]' = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$$

Ad d) Jest to szczególny przypadek wzoru z punktu c). Mamy:

$$[c\cdot f(x)]' = (c)'\cdot f(x) + c\cdot f'(x) = 0 + c\cdot f'(x) = c\cdot f'(x)$$

Dowód punktu e) pomijamy.

UWAGA: Wzory z punktów a) i b) twierdzenia 1. można w następujący sposób uogólnić:

Jeśli funkcje $f_1, f_2, \ldots, f_n$ są różniczkowalne w zbiorze D, to dla dowolnej liczby $x \in D$:

$$[f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x)]' = f_1'(x) + f_2'(x) + \ldots + f_n'(x)$$
$$[f_1(x) - f_2(x) - \ldots - f_n(x)]' = f_1'(x) - f_2'(x) - \ldots - f_n'(x)$$

Czasem przy obliczaniu pochodnej funkcji f nie jest podana dziedzina tej funkcji ani dziedzina funkcji pochodnej. Przyjmujemy wówczas, że dziedziną funkcji f i dziedziną funkcji f' są odpowiednio zbiory D_f i $D_{f'}$ tych wszystkich argumentów, dla których wzory funkcji i funkcji pochodnej f' mają sens liczbowy (przy czym musi być spełniony warunek $D_{f'} \subset D_f$).

Przykład 1.

Wyznaczymy pochodne funkcji

a) $f(x) = x^3 + \dfrac{1}{x}$ b) $f(x) = 7x^5 - x^4 + \sqrt{2}$

c) $f(x) = (1 - x^2)(3 + x)$ d) $f(x) = \dfrac{2x^2 - 1}{x^2 - 4}$

Ad a) $D_f = \boldsymbol{R} - \{0\}$. Stosujemy wzór na pochodną sumy:

$$\left(x^3 + \frac{1}{x}\right)' = (x^3)' + \left(\frac{1}{x}\right)' = 3x^2 - \frac{1}{x^2}, \text{ stąd}$$

$$f'(x) = 3x^2 - \frac{1}{x^2},\ D_{f'} = \boldsymbol{R} - \{0\}$$

Ad b) $D_f = \boldsymbol{R}$. Stosujemy wzór na pochodną sumy, na pochodną różnicy oraz na pochodną iloczynu funkcji i stałej:

$$\left(7x^5 - x^4 + \sqrt{2}\right)' = 7 \cdot (x^5)' - (x^4)' + \left(\sqrt{2}\right)' = 35x^4 - 4x^3$$
$$f'(x) = 35x^4 - 4x^3,\ D_{f'} = \boldsymbol{R}$$

Ad c) $D_f = \boldsymbol{R}$.

<u>I sposób</u> – stosujemy wzór na pochodną iloczynu:

$$[(1 - x^2)(3 + x)]' = (1 - x^2)' \cdot (3 + x) + (1 - x^2) \cdot (3 + x)' = -2x(3 + x) + (1 - x^2) \cdot 1 =$$
$$= -3x^2 - 6x + 1$$

<u>II sposób</u> – przedstawiamy wzór funkcji w postaci sumy:

$$(1 - x^2)(3 + x) = 3 + x - 3x^2 - x^3, \text{ czyli } f(x) = -x^3 - 3x^2 + x + 3$$

Wyznaczamy pochodną funkcji, stosujemy wzór na pochodną sumy:

$$(-x^3 - 3x^2 + x + 3)' = -(x^3)' - 3(x^2)' + (x)' + (3)' = -3x^2 - 6x + 1$$

Tak więc $f'(x) = -3x^2 - 6x + 1,\ D_{f'} = \boldsymbol{R}$

Ad d) $D_f = \boldsymbol{R} - \{-2, 2\}$. Stosujemy wzór na pochodną ilorazu funkcji:

$$\left(\frac{2x^2 - 1}{x^2 - 4}\right)' = \frac{(2x^2 - 1)' \cdot (x^2 - 4) - (2x^2 - 1) \cdot (x^2 - 4)'}{(x^2 - 4)^2} =$$

$$= \frac{4x \cdot (x^2 - 4) - (2x^2 - 1) \cdot 2x}{(x^2 - 4)^2} = \frac{4x^3 - 4x^3 - 14x}{(x^2 - 4)^2}, \text{ czyli}$$

$$f'(x) = \frac{-14x}{(x^2 - 4)^2},\ D_{f'} = \boldsymbol{R} - \{-2, 2\}$$

Przykład 2.

Wyznaczymy pochodną funkcji $f(x)=\begin{cases}-x^2, & \text{jeśli } x\in(-\infty,0) \\ x^3, & \text{jeśli } x\in\langle 0,+\infty)\end{cases}$.

W przypadku funkcji określonych kilkoma wzorami pochodną wyznaczamy w następujący sposób: najpierw określamy pochodną w każdym z przedziałów otwartych występujących we wzorze funkcji. Następnie sprawdzamy różniczkowalność w punktach „granicznych" (w naszym przypadku jest to punkt 0). Mamy:

(*) $(-x^2)'=-2x$, jeśli $x\in(-\infty,0)$

(**) $(x^3)'=3x^2$, jeśli $x\in(0,+\infty)$

Teraz badamy istnienie pochodnej w punkcie 0. Możemy to zrobić na dwa sposoby.

<u>I sposób</u> – sprawdzamy, czy istnieją pochodne jednostronne funkcji f w punkcie 0:

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{h^3-0}{h}=\lim_{h\to 0^+}h^2=0$$

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{-h^2-0}{h}=\lim_{h\to 0^+}(-h)=0$$

$f'_+(0)=f'_-(0)=0$, więc $f'(0)=0$

Pochodna funkcji f w punkcie 0 istnieje i jest równa 0.

<u>II sposób</u> – składa się z dwóch kroków:

1° Sprawdzamy, czy funkcja f jest ciągła w punkcie 0.

$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(-x^2)=0$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}x^3=0$, stąd

$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$

Ponadto $f(0)=0$. Otrzymaliśmy, że funkcja f jest ciągła w punkcie 0.

2° Sprawdzamy, czy wzory (*) i (**) występujące w obliczonej pochodnej są „zgodne" w punkcie 0. W tym celu obliczamy granice:

$\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(3x^2)=0$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to 0^-}(-2x)=0$

Otrzymaliśmy granice skończone i równe sobie, ponadto funkcja f jest ciągła w punkcie 0, więc wspólna wartość obu granic jest wartością pochodnej funkcji f w punkcie 0, czyli $f'(0)=0$.

Ostatecznie pochodną funkcji f możemy zapisać tak:

$$f'(x)=\begin{cases}-2x, & \text{jeśli } x\in(-\infty,0) \\ 0, & \text{jeśli } x=0 \\ 3x^2, & \text{jeśli } x\in(0,+\infty)\end{cases}$$ albo tak $$f'(x)=\begin{cases}-2x, & \text{jeśli } x\in(-\infty,0\rangle \\ 3x^2, & \text{jeśli } x\in(0,+\infty)\end{cases}$$

lub tak

$$f'(x)=\begin{cases}-2x, & \text{jeśli } x\in(-\infty,0) \\ 3x^2, & \text{jeśli } x\in\langle 0,+\infty)\end{cases}$$

UWAGA: Jeśli sprawdzamy istnienie pochodnej funkcji w punkcie „granicznym" sposobem II, to nie możemy pominąć kroku 1°. Rozważmy bowiem funkcję

$$f_1(x) = \begin{cases} -x^2, & \text{jeśli } x \in (-\infty, 0) \\ x^3 + 2, & \text{jeśli } x \in \langle 0, +\infty) \end{cases}$$

Funkcja f_1 nie jest ciągła w punkcie 0, nie jest więc różniczkowalna w punkcie 0. Natomiast

$$(-x^2)' = -2x, \text{ jeśli } x \in (-\infty, 0)$$

$$(x^3 + 2)' = 3x^2, \text{ jeśli } x \in (0, +\infty)$$

oraz

$$\lim_{x \to 0^+} f_1'(x) = \lim_{x \to 0^+} (3x^2) = 0$$

$$\lim_{x \to 0^-} f_1'(x) = \lim_{x \to 0} (-2x) = 0$$

W takim razie $\lim\limits_{x \to 0^+} f_1'(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} f_1'(x)$, co błędnie może sugerować istnienie pochodnej funkcji f_1 w punkcie 0.

Sprawdź, czy rozumiesz

1. Wyznacz pochodne funkcji.

a) $f(x) = x^3 - 5x^2 + 7$

b) $f(x) = 0{,}5\left(\frac{4}{x} - 6x\right)$

c) $f(x) = (1 + x^4)(2 - 3x^2)$

d) $f(x) = \frac{-5x^3}{3x - 1}$

e) $f(x) = x^{-3} - x^{-4}$

f) $f(x) = 6 \cdot x^{\frac{1}{3}} - \sqrt{8x}$

2. Wykaż, że funkcja f nie jest różniczkowalna w punkcie x_0.

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & \text{jeśli } x \leqslant 0 \\ -x^2, & \text{jeśli } x > 0 \end{cases}$, $x_0 = 0$

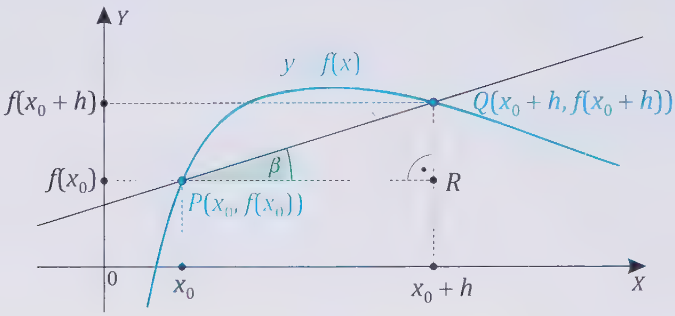
b) $f(x) = \begin{cases} x^3 + 2, & \text{jeśli } x < 1 \\ 2x^2 + 1, & \text{jeśli } x \geqslant 1 \end{cases}$, $x_0 = 1$

3. Wyznacz pochodną funkcji $f(x) = \begin{cases} -0{,}5x^2 + 1{,}5, & \text{jeśli } x \leqslant 1 \\ \frac{1}{x}, & \text{jeśli } x > 1 \end{cases}$.

4. Wyznacz pochodną funkcji $f(x) = 3x^2 \cdot |x - 1|$, gdzie $x \in \boldsymbol{R}$.

Styczna do wykresu funkcji

Niech funkcja f będzie określona w otoczeniu $U(x_0)$ oraz niech będzie różniczkowalna w samym punkcie x_0. Ponadto niech h będzie liczbą rzeczywistą, dla której $(x_0 + h) \in U(x_0)$. Rozważmy punkty $P(x_0, f(x_0))$ oraz $Q(x_0 + h, f(x_0 + h))$ należące do wykresu funkcji f. Przez te punkty prowadzimy prostą (rysunek poniżej przedstawia przypadek $h > 0$).



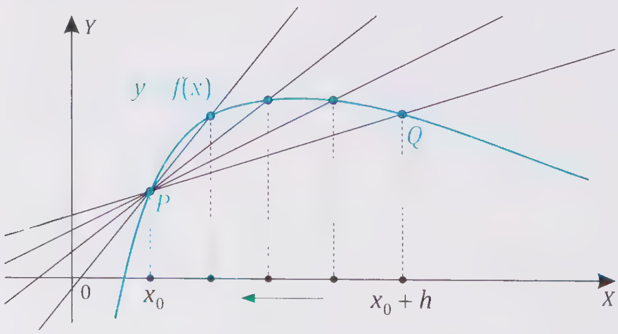
Taką prostą nazywamy sieczną wykresu funkcji f, przechodzącą przez punkty P, Q.

Oznaczmy miarę kąta RPQ przez β. Wyznaczamy $\operatorname{tg} \beta$:

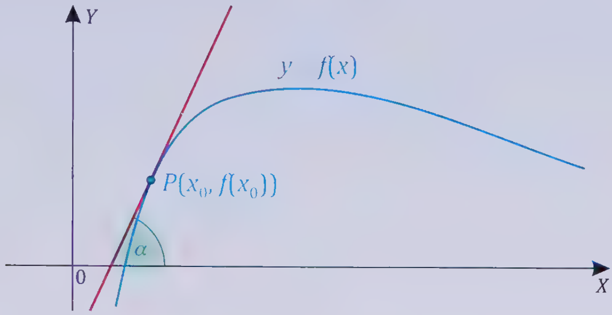
$$\operatorname{tg} \beta = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Okazuje się, że iloraz różnicowy funkcji f w punkcie x_0, odpowiadający zmianie argumentu h, jest współczynnikiem kierunkowym rozważanej siecznej.

Zobaczmy, co się będzie działo, jeżeli h będzie dążyć do 0. Wówczas punkt Q będzie „coraz bliżej” punktu P (zobacz rysunek poniżej).



Jeśli h będzie bardzo blisko 0, to punkty wykresu, przez które przechodzi sieczna, będą prawie się pokrywać. W przypadku granicznym otrzymujemy prostą, którą nazywamy styczną do wykresu funkcji f w punkcie P (na kolejnym rysunku).



Oznaczmy kąt nachylenia stycznej do osi OX przez α. Zauważmy, że

$$\text{jeśli } h \to 0, \text{ to } \operatorname{tg}\beta \to \operatorname{tg}\alpha, \quad \text{czyli } \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \to f'(x_0),$$

a to znaczy, że współczynnik kierunkowy stycznej do wykresu funkcji f w punkcie P jest równy $f'(x_0)$

$$\operatorname{tg}\alpha = f'(x_0)$$

Wyznaczmy zatem równanie stycznej do wykresu funkcji f w punkcie x_0. Równanie prostej w postaci kierunkowej to

$$y = ax + b$$

Wiemy, że punkt $P(x_0, f(x_0))$ należy do tej prostej oraz $a = f'(x_0)$, wobec tego

$$f(x_0) = f'(x_0) \cdot x_0 + b$$

$$b = f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0$$

Ostatecznie otrzymujemy równanie

$$y = f'(x_0) \cdot x + f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0,$$

które można przekształcić do postaci

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

Uzyskany rezultat uzasadnia celowość przyjęcia następującej definicji.

Definicja 1.

Niech funkcja f będzie określona w pewnym otoczeniu punktu x_0 i różniczkowalna w tym punkcie.
Styczną do wykresu funkcji f w punkcie $(x_0, f(x_0))$ nazywamy prostą opisaną równaniem:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

Przykład 1.

Wyznaczymy równanie stycznej poprowadzonej do wykresu funkcji $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 2$ w punkcie $P(1, y_0)$

Wyznaczamy rzędną punktu P:

$$y_0 = f(1) = 1 - 3 + 2 + 2 = 2$$

Obliczamy pochodną f' funkcji f oraz $f'(1)$:

$$f'(x) = 3x^2 - 6x + 2,$$

stąd

$$f'(1) = -1$$

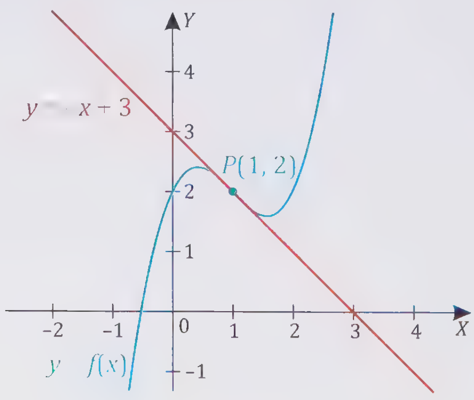
Zapisujemy równanie stycznej do wykresu funkcji f w punkcie P:

$$y - 2 = -1(x - 1),$$

czyli

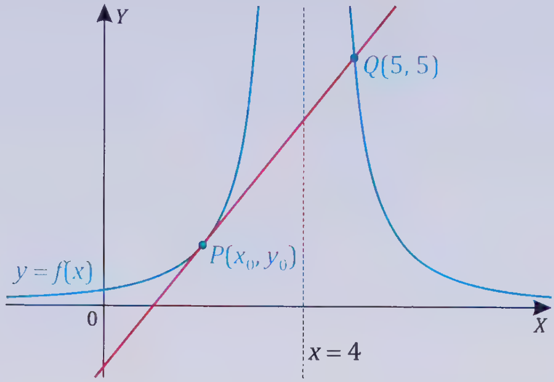
$$y = -x + 3$$

Rozwiązanie zadania ilustruje rysunek poniżej. Zauważ, że styczna przecina wykres funkcji f w punkcie styczności. O stycznej do wykresu funkcji możemy myśleć następująco: jest to taka prosta, której niewielki odcinek w pobliżu punktu styczności najlepiej „przybliża" niewielki fragment tego wykresu (w pobliżu punktu styczności); nie jest tu istotna liczba punktów wspólnych stycznej i wykresu funkcji.



Przykład 2.

Rysunek poniżej przedstawia szkic wykresu funkcji $f(x) = \dfrac{5}{(x-4)^2}$, $x \in \boldsymbol{R} - \{4\}$, oraz styczną do wykresu funkcji f w punkcie P, która jednocześnie przecina wykres funkcji f w punkcie $Q(5, 5)$. Wyznaczymy współrzędne punktu P oraz równanie tej stycznej.



Obliczamy pochodną funkcji f. W tym celu zapiszemy wzór funkcji f w postaci

$$f(x)=\frac{5}{x^2-8x+16}$$

Mamy

$$f'(x)=\frac{(5)'\cdot(x^2-8x+16)-5\cdot(x^2-8x+16)'}{\left(x^2-8x+16\right)^2}=\frac{0-5\cdot(2x-8)}{(x-4)^4}=\frac{-10}{(x-4)^3}$$

Zatem

$$f'(x)=\frac{-10}{(x-4)^3},\ D_{f'}=\boldsymbol{R}-\{4\}$$

Zapisujemy równanie stycznej do wykresu funkcji f w punkcie $P(x_0, y_0)$:

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0),\qquad \text{gdzie}$$

$$f(x_0)=\frac{5}{(x_0-4)^2}\quad \text{oraz}\quad f'(x_0)=\frac{-10}{(x_0-4)^3}$$

Do stycznej należy też punkt Q. Uwzględniając jego współrzędne, otrzymujemy równanie

$$5-\frac{5}{(x_0-4)^2}=\frac{-10}{(x_0-4)^3}\cdot(5-x_0)\qquad /\cdot\frac{1}{5}(x_0-4)^3$$

$$(x_0-4)^3-(x_0-4)+2(5-x_0)=0$$

Rozkładamy lewą stronę równania na czynniki:

$$(x_0-4)\left[(x_0-4)^2-1\right]-2(x_0-5)=0$$

$$(x_0-4)(x_0-5)(x_0-3)-2(x_0-5)=0$$

$$(x_0-5)\left[(x_0-4)(x_0-3)-2\right]=0$$

$$(x_0-5)(x_0^2-7x_0+10)=0$$

Otrzymujemy:

$$x_0 - 5 = 0 \quad \vee \quad x_0^2 - 7x_0 + 10 = 0$$

$$\Delta = 9, \qquad \sqrt{\Delta} = 3$$

$$x_0 = 5 \quad \vee \quad x_0 = 2 \quad \vee \quad x_0 = 5$$

Odcięta punktu P nie jest równa 5 (punkty P i Q nie pokrywają się), zatem jest równa 2.

$$x_0 = 2 \qquad\qquad f(2) = \frac{5}{(2-4)^2} = \frac{5}{4}$$

$$P\left(2, \frac{5}{4}\right)$$

Wyznaczamy równanie stycznej:

$$f'(2) = \frac{-10}{(2-4)^3} = \frac{5}{4},$$

stąd

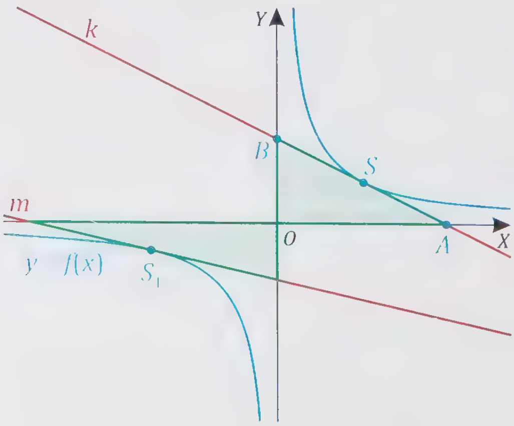
$$y - \frac{5}{4} = \frac{5}{4}(x-2)$$

$$y = \frac{5}{4}x - \frac{5}{4}$$

Punkt P ma współrzędne $\left(2, \frac{5}{4}\right)$, równanie stycznej do wykresu funkcji f w punkcie P to $y = \frac{5}{4}x - \frac{5}{4}$.

Przykład 3.

Na rysunku poniżej dany jest szkic wykresu funkcji $f(x) = \frac{a}{x}$, gdzie $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ oraz a jest ustaloną liczbą dodatnią. Wykażemy, że pole trójkąta ograniczonego styczną do wykresu funkcji f i osiami układu współrzędnych nie zależy od wyboru punktu styczności i jest równe $2a$.



Niech S będzie dowolnym punktem na wykresie funkcji f. Możemy przyjąć, że $S\left(x_0, \frac{a}{x_0}\right)$, $x_0 \neq 0$. Wyznaczymy równanie stycznej k do wykresu funkcji f w punkcie S. Mamy:

$$f'(x) = \frac{-a}{x^2},\ D_{f'} = \mathbf{R} - \{0\},\ \text{stąd}$$

$$f'(x_0) = \frac{-a}{x_0^2},\ \text{zatem}$$

$$k:\ y - \frac{a}{x_0} = \frac{-a}{x_0^2}(x - x_0),\ \text{czyli}$$

$$k:\ y = \frac{-a}{x_0^2}x + \frac{2a}{x_0}$$

Teraz wyznaczamy współrzędne punktów przecięcia stycznej k z osiami układu współrzędnych.

Oś OX: jeśli $y = 0$, to $x = 2x_0$ $\quad A(2x_0, 0)$

Oś OY: jeśli $x = 0$, to $y = \frac{2a}{x_0}$ $\quad B\left(0, \frac{2a}{x_0}\right)$

Obliczamy pole P trójkąta ABO:

$$P = \frac{1}{2} \cdot |2x_0| \cdot \left|\frac{2a}{x_0}\right| = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \left|x_0 \cdot \frac{2a}{x_0}\right| = |2a| = 2a,\ \text{bo } a > 0.$$

Tak więc pole P trójkąta ABO nie zależy od wyboru punktu styczności i jest równe $2a$.

Sprawdź, czy rozumiesz

1. Wyznacz równanie stycznej do wykresu funkcji $f(x) = x^2 - 2x$ w punkcie $P(-1, 3)$.
2. Wyznacz równania stycznych do wykresu funkcji $f(x) = \frac{3}{x}$ i równoległych do prostej k: $y = -\frac{1}{3}x$. Podaj współrzędne punktów styczności tych prostych. Naszkicuj wykres funkcji f wraz ze znalezionymi stycznymi w układzie współrzędnych.
3. Dana jest funkcja $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$.
   a) Wyznacz równania stycznych (l_1 i l_2) do wykresu funkcji f, które są równoległe do osi OX, oraz podaj współrzędne punktów (odpowiednio P_1 i P_2) styczności tych prostych z wykresem funkcji f.
   b) Wyznacz pozostałe punkty wspólne tych stycznych z wykresem funkcji f.
4. Wyznacz równanie stycznej do wykresu funkcji $f(x) = 2\sqrt{x}$, przechodzącej przez punkt $A(-1, 0)$.

Pochodna funkcji a monotoniczność funkcji

W tym temacie oraz w tematach następnych omówimy podstawowe zastosowania rachunku pochodnych.
Wiele procesów fizycznych, chemicznych, ekonomicznych i innych zagadnień można modelować za pomocą funkcji ciągłych (np. funkcji wielomianowych, wymiernych, wykładniczych, logarytmicznych, trygonometrycznych). Rachunek pochodnych pozwala badać na przykład, w jakich przedziałach dana funkcja jest rosnąca, w jakich malejąca; czy przyjmuje największą wartość, czy też nie. Znajomość takich własności funkcji pozwala dokładnie scharakteryzować proces opisany daną funkcją.

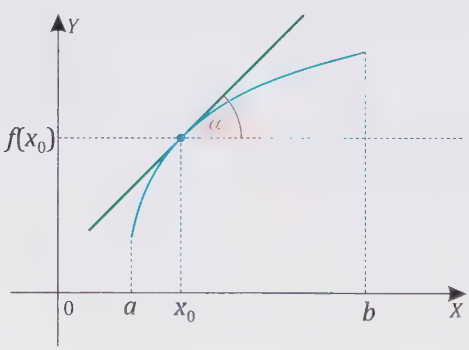
Powstaje pytanie, czy nie byłoby prościej naszkicować wykres takiej funkcji (np. za pomocą kalkulatora graficznego) i z wykresu odczytać interesujące nas informacje. Aby się przekonać, że nie musi to być takie łatwe, spróbuj wyznaczyć największą wartość funkcji

$$y = -0{,}001x^4 + x^3 - x^2 + 2, \text{ gdzie } x \in \boldsymbol{R}$$

W jakich przedziałach ta funkcja jest malejąca? Możesz korzystać z kalkulatora graficznego lub komputera rysującego wykresy funkcji.

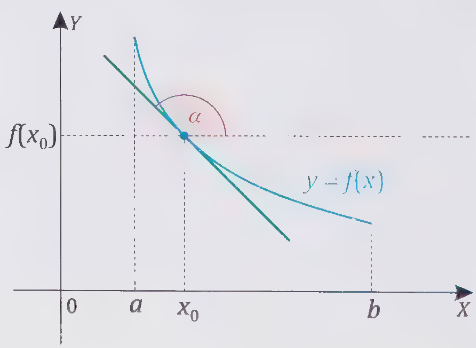
W tym temacie zajmiemy się związkiem między pochodną funkcji a monotonicznością tej funkcji. Jak już wiesz, pochodna funkcji f w punkcie x_0 jest współczynnikiem kierunkowym stycznej do wykresu funkcji f w punkcie $(x_0, f(x_0))$.

a) $f'(x_0) > 0$



$f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha$
$\operatorname{tg} \alpha > 0$

b) $f'(x_0) < 0$



$f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha$
$\operatorname{tg} \alpha < 0$

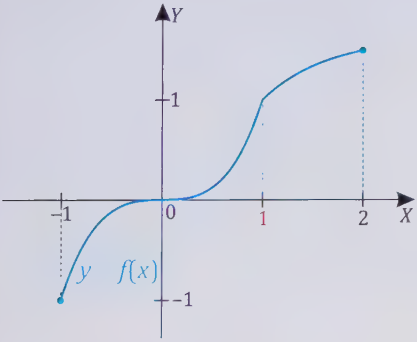
Rysunek a) ilustruje przypadek $f'(x_0) > 0$. Wtedy styczna do wykresu funkcji f w punkcie $(x_0, f(x_0))$ jest nachylona do osi OX pod kątem ostrym. Funkcja liniowa, której wykresem jest taka prosta, jest rosnąca. Możemy powiedzieć, że jeśli $f'(x_0) > 0$, to wykres funkcji f wokół punktu $(x_0, f(x_0))$ najlepiej przybliża odcinek prostej będącej wykresem rosnącej funkcji liniowej. Można więc oczekiwać, że jeśli pochodna f' jest dodatnia, to funkcja f jest rosnąca. Rzeczywiście, prawdziwe jest następujące twierdzenie.

> ***Twierdzenie 1.***
> Jeżeli funkcja f ma pochodną w przedziale (a, b) oraz dla każdej liczby x z tego przedziału $f'(x) > 0$, to funkcja f jest rosnąca w przedziale (a, b).

Rysunek b) ilustruje przypadek $f'(x_0) < 0$. Wówczas styczna do wykresu funkcji f w punkcie $(x_0, f(x_0))$ jest nachylona do osi OX pod kątem rozwartym. Zatem funkcja liniowa, której wykresem jest ta prosta, jest funkcją malejącą. W tym przypadku powiemy, że wykres funkcji f wokół punktu $(x_0, f(x_0))$ najlepiej przybliża odcinek prostej będącej wykresem malejącej funkcji liniowej.

> ***Twierdzenie 2.***
> Jeżeli funkcja f ma pochodną w przedziale (a, b) oraz dla każdej liczby x z tego przedziału $f'(x) < 0$, to funkcja f jest malejąca w przedziale (a, b).

Twierdzenie odwrotne do twierdzenia 1. (odpowiednio do twierdzenia 2.) nie jest prawdziwe. Może się zdarzyć, że na przykład funkcja rosnąca w przedziale (a, b) ma pochodną równą 0 w pewnych punktach tego przedziału albo w ogóle pochodna w pewnych punktach może nie istnieć (zobacz rysunek poniżej).



Funkcja f jest rosnąca w przedziale $(-1, 2)$.

$$f(x) = \begin{cases} x^3, & \text{jeśli } x \in \langle -1, 1 \rangle \\ \dfrac{-1}{x} + 2, & \text{jeśli } x \in (1, 2) \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2, & \text{jeśli } x \in (-1, 1) \\ \dfrac{1}{x^2}, & \text{jeśli } x \in (1, 2) \end{cases}$$

Pochodna funkcji f w punkcie 0 jest równa 0.
Pochodna funkcji f w punkcie 1 nie istnieje.

Prawdziwe jest natomiast następujące twierdzenie.

> ***Twierdzenie 3.***
> Jeżeli funkcja f ma pochodną w przedziale (a, b) oraz:
> a) funkcja f jest rosnąca w tym przedziale, to $f'(x) \geqslant 0$ dla każdej liczby x z przedziału (a, b)
> b) funkcja f jest malejąca w tym przedziale, to $f'(x) \leqslant 0$ dla każdej liczby x z przedziału (a, b).

Można też udowodnić twierdzenie dotyczące pochodnej funkcji stałej.

Twierdzenie 4.
Niech funkcja f ma pochodną w przedziale (a, b). Funkcja f jest stała w przedziale (a, b) wtedy i tylko wtedy, gdy $f'(x) = 0$ dla każdej liczby x z przedziału (a, b).

Przykład 1.

Wyznaczymy (otwarte) przedziały monotoniczności funkcji $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 6$.

Dziedziną funkcji jest zbiór $\boldsymbol{R}$. Wyznaczamy pochodną:

$$f'(x) = 6x^2 - 18x + 12,\ D_{f'} = \boldsymbol{R}$$

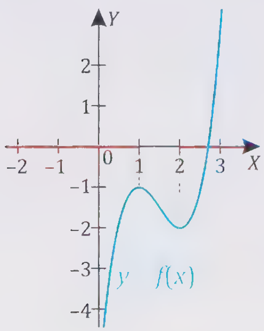
Rozwiązujemy nierówności:

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow [6(x-1)(x-2) > 0 \wedge x \in D_{f'}] \Leftrightarrow x \in (-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (1, 2)$$

Funkcja jest rosnąca w każdym z przedziałów $(-\infty, 1)$ oraz $(2, +\infty)$, natomiast jest malejąca w przedziale $(1, 2)$.

UWAGA: Jeśli funkcja jest rosnąca w dwóch przedziałach, to nie wynika z tego, że jest rosnąca w sumie tych przedziałów.



Funkcja z przykładu 1. nie jest rosnąca w zbiorze $(-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$ (zobacz wykres funkcji obok). Poprawny jest zapis mówiący, że pochodna funkcji f jest dodatnia w sumie przedziałów. Natomiast wynikający stąd wniosek dotyczący funkcji f jest taki, że funkcja jest rosnąca w każdym z przedziałów (ale nie w sumie przedziałów).

Zauważ, że wszystkie przedziały, które wyznaczyliśmy w przykładzie 1., są otwarte (zastosowaliśmy bezpośrednio twierdzenie 1. i 2.). Czy jeśli domknęlibyśmy te przedziały – odpowiednio w punktach 1 lub 2 – to otrzymalibyśmy poprawnie określone przedziały monotoniczności funkcji f? Oczywiście tak.

UWAGA: Jeśli funkcja f jest ciągła w przedziale $\langle a, b\rangle$ oraz:

a) funkcja f jest rosnąca w przedziale (a, b), to jest również rosnąca w przedziale $\langle a, b\rangle$

b) funkcja f jest malejąca w przedziale (a, b), to jest również malejąca w przedziale $\langle a, b\rangle$.

Funkcja f z przykładu 1. jest ciągła w zbiorze $\boldsymbol{R}$, więc również w dowolnym przedziale. Zatem – na mocy ostatniej uwagi – jest również rosnąca w przedziałach $(-\infty, 1\rangle$, $\langle 2, +\infty)$ i malejąca w przedziale $\langle 1, 2\rangle$. Te przedziały są maksymalnymi przedziałami monotoniczności funkcji f.

Przykład 2.

Wyznaczymy maksymalne przedziały monotoniczności funkcji $f(x) = 5x^3 - 3x^5$, gdzie $x \in \boldsymbol{R}$.

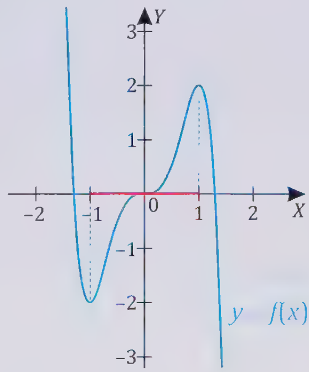
Wyznaczamy pochodną funkcji f i badamy znak pochodnej:

$$f'(x) = 15x^2 - 15x^4,\ D_{f'} = \boldsymbol{R},\ \text{więc } D_{f'} = D_f$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \left[-15x^2(x-1)(x+1) > 0 \wedge x \in D_{f'}\right] \Leftrightarrow x \in (-1, 0) \cup (0, 1)$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$$

Ponadto funkcja f jest ciągła w zbiorze $\boldsymbol{R}$. Zatem jest ona rosnąca w każdym z przedziałów $\langle -1, 0\rangle$ i $\langle 0, 1\rangle$ oraz malejąca w każdym z przedziałów $(-\infty, -1\rangle$, $\langle 1, +\infty)$. Zauważmy, że przedziały, w których funkcja f jest rosnąca, mają wspólny koniec (punkt 0), który należy do ich części wspólnej. To znaczy, że funkcja f jest rosnąca w sumie tych przedziałów, czyli w przedziale $\langle -1, 1\rangle$.



Funkcja f jest rosnąca w przedziale $\langle -1, 1\rangle$ i malejąca w każdym z przedziałów $(-\infty, -1\rangle$, $\langle 1, +\infty)$.

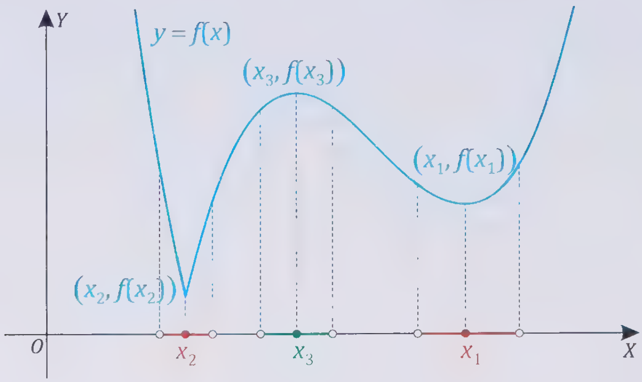
Rysunek obok przedstawia wykres funkcji f.

Sprawdź, czy rozumiesz

1. Wykaż, że funkcja
   a) $f(x) = 2x^3 - x^2 + x - 7$ jest rosnąca w zbiorze $\boldsymbol{R}$
   b) $f(x) = \dfrac{x+1}{2x-6}$ jest malejąca w przedziale $(3, +\infty)$.
2. Wyznacz maksymalne przedziały monotoniczności funkcji f, jeśli:
   a) $f(x) = 4x^3 - 2x^2 - x + 5$
   b) $f(x) = 0{,}5x^4 + 2x^3 - 5x^2 - 30x - 1$
   c) $f(x) = \dfrac{2}{x} + 2x$
   d) $f(x) = \dfrac{100x}{x^2 - 4}$

Ekstrema lokalne funkcji

Przeanalizujmy wykres funkcji f przedstawiony na rysunku poniżej.



W dziedzinie funkcji f wyróżnione zostały trzy punkty x_1, x_2, x_3. Jeśli weźmiemy dostatecznie małe sąsiedztwo $S(x_1)$ – na przykład takie, jak na rysunku – to wówczas dla każdej liczby z tego sąsiedztwa prawdziwa jest nierówność:

$$f(x) > f(x_1)$$

Można powiedzieć, że „lokalnie" funkcja f przyjmuje w punkcie x_1 najmniejszą wartość. Określenia „lokalnie" nie wolno pominąć. Podkreśla ono, że rozpatrujemy funkcję f w pewnym (niewielkim) otoczeniu punktu x_1. Zauważ, że funkcja f poza pewnym otoczeniem punktu x_1 przyjmuje również mniejsze wartości niż w punkcie x_1. Zatem funkcja f nie przyjmuje w punkcie x_1 najmniejszej wartości „globalnie" – czyli w całej dziedzinie. Podobnie w punkcie x_2 funkcja f przyjmuje „lokalnie" najmniejszą wartość.

Inaczej jest w punkcie x_3. Jeśli weźmiemy dostatecznie małe sąsiedztwo $S(x_3)$ – na przykład takie, jak na rysunku – to wówczas dla każdej liczby x z sąsiedztwa $S(x_3)$ prawdziwa jest nierówność:

$$f(x) < f(x_3)$$

W tym przypadku można powiedzieć, że „lokalnie" funkcja f przyjmuje w punkcie x_3 największą wartość. Tutaj również nie wolno pominąć określenia „lokalnie", gdyż poza otoczeniem punktu x_3 funkcja przyjmuje również większe wartości niż w punkcie x_3.

Definicja 1.

Niech funkcja f będzie określona w przedziale (a, b).

a) Funkcja f ma w punkcie x_0, $x_0 \in (a, b)$, **minimum lokalne właściwe** (które jest równe $f(x_0)$) wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje takie sąsiedztwo $S(x_0)$ zawarte w przedziale (a, b), że

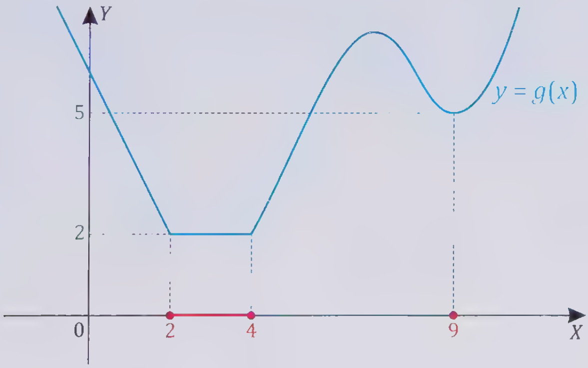
$$\bigwedge_{x \in S(x_0)} f(x) > f(x_0)$$

b) Funkcja f ma w punkcie x_0, $x_0 \in (a, b)$, **maksimum lokalne właściwe** (które jest równe $f(x_0)$) wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje takie sąsiedztwo $S(x_0)$ zawarte w przedziale (a, b), że

$$\bigwedge_{x \in S(x_0)} f(x) < f(x_0)$$

Zgodnie z definicją 1. powiemy, że funkcja f ma w każdym z punktów x_1 i x_2 minimum lokalne właściwe, a w punkcie x_3 – maksimum lokalne właściwe.

Popatrzmy teraz na wykres funkcji g na rysunku poniżej.



W każdym punkcie z przedziału $\langle 2, 4\rangle$ funkcja g przyjmuje wartość 2 i jest to „lokalnie" najmniejsza wartość. W takim przypadku powiemy, że w każdym punkcie z przedziału $\langle 2, 4\rangle$ funkcja g ma minimum lokalne (ale nie jest ono „właściwe" jak minimum w punkcie 9).

Definicja 2.

Niech funkcja f będzie określona w przedziale (a, b).

a) Funkcja f ma w punkcie x_0, $x_0 \in (a, b)$, **minimum lokalne** (równe $f(x_0)$) wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje takie otoczenie $U(x_0)$ zawarte w przedziale (a, b), że

$$\bigwedge_{x \in U(x_0)} f(x) \geqslant f(x_0)$$

b) Funkcja f ma w punkcie x_0, $x_0 \in (a, b)$, **maksimum lokalne** (równe $f(x_0)$) wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje takie otoczenie $U(x_0)$ zawarte w przedziale (a, b), że

$$\bigwedge_{x \in U(x_0)} f(x) \leqslant f(x_0)$$

UWAGA: Definicja 2a obejmuje również przypadek „minimum lokalnego właściwego", to znaczy każde „minimum lokalne właściwe" jest jednocześnie „minimum lokalnym". Podobnie każde „maksimum lokalne właściwe" jest jednocześnie „maksimum lokalnym".

Powiemy, że funkcja f ma w punkcie x_0 **ekstremum lokalne (właściwe)**, jeśli ma w tym punkcie minimum lokalne (właściwe) lub maksimum lokalne (właściwe).

Okazuje się, że pochodna funkcji jest bardzo użyteczna w wyznaczaniu ekstremów funkcji. Omówimy teraz dwa twierdzenia związane z tym zagadnieniem.

Twierdzenie 1. (warunek konieczny istnienia ekstremum lokalnego funkcji)
Jeśli funkcja f, określona w pewnym otoczeniu punktu x_0, jest różniczkowalna w tym punkcie i ma w nim ekstremum, to $f'(x_0) = 0$.

Dowód (w przypadku minimum): Jeśli funkcja f ma w punkcie x_0 minimum, to znaczy, że istnieje takie otoczenie $U(x_0)$, że dla każdej liczby x z tego otoczenia

$$f(x) \geqslant f(x_0)$$

Niech h będzie liczbą rzeczywistą ujemną, dla której $(x_0 + h) \in U(x_0)$. Wtedy

$$f(x_0 + h) \geqslant f(x_0), \quad \text{skąd}$$

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \leqslant 0, \quad \text{zatem}$$

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \leqslant 0$$

Granica ta istnieje, gdyż funkcja – z założenia – jest różniczkowalna w punkcie x_0, a więc w szczególności ma w tym punkcie pochodną lewostronną. Mamy:

(*) $\quad f'_-(x_0) \leqslant 0$

Analogicznie, jeśli $h > 0$ i $(x_0 + h) \in U(x_0)$, to również

$$f(x_0 + h) \geqslant f(x_0), \quad \text{wówczas}$$

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \geqslant 0, \quad \text{więc}$$

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \geqslant 0$$

(**) $\quad f'_+(x_0) \geqslant 0$

Z założenia o różniczkowalności funkcji f w punkcie x_0 otrzymujemy:

$$f'_+(x_0) = f'(x_0) = f'_-(x_0)$$

a z nierówności (*) i (**)

$0 \leqslant f'(x_0) \leqslant 0,$ czyli

$f'(x_0) = 0,$ co kończy dowód.

W praktyce korzysta się z równoważnej postaci twierdzenia 1., a mianowicie: jeśli funkcja f jest różniczkowalna w punkcie x_0 i pochodna w tym punkcie nie jest równa zeru, to funkcja f nie ma ekstremum w tym punkcie. Tak więc funkcja różniczkowalna może mieć ekstremum tylko w takim punkcie, w którym pochodna tej funkcji jest równa zeru.

Zwróć uwagę, że w ostatnim zdaniu użyliśmy zwrotu „może mieć ekstremum", co znaczy, że nie musi tam mieć ekstremum. Na przykład funkcja $f(x) = x^3$ ma pochodną $f'(x) = 3x^2$, która przyjmuje wartość zero w punkcie 0. Ale w punkcie 0 funkcja ta nie ma ekstremum, co łatwo stwierdzić na podstawie jej wykresu.

A czy funkcja może mieć ekstremum w punkcie, w którym pochodna nie istnieje? Oczywiście tak. Na przykład funkcja $f(x) = |x|$ ma minimum w punkcie 0, natomiast wiemy, że nie istnieje $f'(0)$. Również funkcja f z początku tego tematu ma w punkcie x_2 minimum, a pochodna funkcji f w tym punkcie nie istnieje (wykres funkcji f ma „ostrze").

Definicja 3.

Niech funkcja f będzie określona w przedziale (a, b).
Punkt x_0, $x_0 \in (a, b)$, nazywamy **punktem krytycznym** wtedy i tylko wtedy, gdy $f'(x_0) = 0$ lub $f'(x_0)$ nie istnieje.

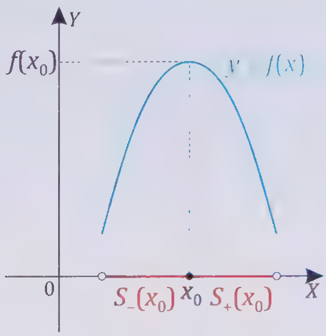
Z dotychczasowych rozważań wynika, że w punkcie krytycznym funkcja może mieć ekstremum, ale nie musi. Kolejne twierdzenie podaje warunki pozwalające rozstrzygnąć, kiedy w punkcie krytycznym jest ekstremum.

Twierdzenie 2. (warunek wystarczający istnienia ekstremum lokalnego funkcji)

Niech funkcja f będzie określona w pewnym otoczeniu punktu x_0, ciągła w punkcie x_0 oraz różniczkowalna w sąsiedztwie $S(x_0)$; ponadto niech x_0 będzie punktem krytycznym tej funkcji.
(1) Jeśli $f'(x) > 0$ dla $x \in S_-(x_0)$ i $f'(x) < 0$ dla $x \in S_+(x_0)$, to funkcja f ma maksimum lokalne właściwe w punkcie x_0.
(2) Jeśli $f'(x) < 0$ dla $x \in S_-(x_0)$ i $f'(x) > 0$ dla $x \in S_+(x_0)$, to funkcja f ma minimum lokalne właściwe w punkcie x_0.
(3) Jeśli $f'(x) > 0$ dla $x \in S(x_0)$ lub $f'(x) < 0$ dla $x \in S(x_0)$, to funkcja f nie ma ekstremum lokalnego w punkcie x_0.

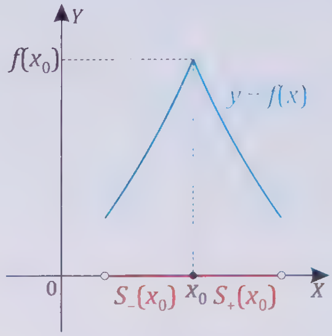
Dowód twierdzenia 2. pomijamy. Rysunki poniżej ilustrują twierdzenie 2.

Ad (1)



$f'(x_0) = 0$

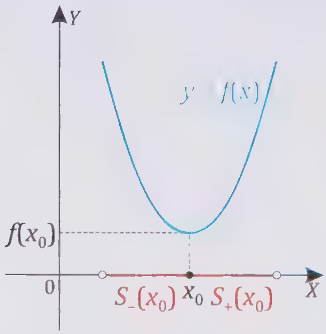
Mówimy: „pochodna zmienia znak w punkcie x_0 z dodatniego na ujemny."



$f'(x_0)$ nie istnieje

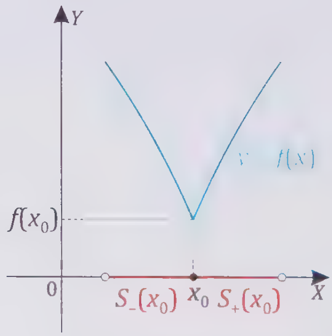
„Pochodna zmienia znak w punkcie x_0 z dodatniego na ujemny."

Ad (2)



$f'(x_0) = 0$

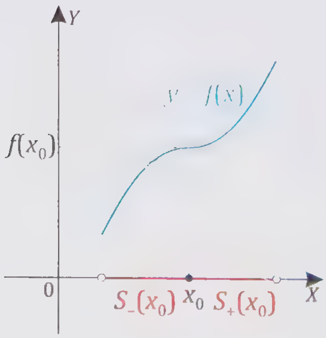
„Pochodna zmienia znak w punkcie x_0 z ujemnego na dodatni."



$f'(x_0)$ nie istnieje

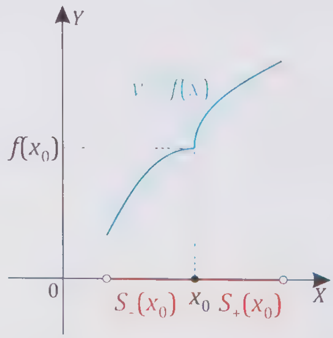
„Pochodna zmienia znak w punkcie x_0 z ujemnego na dodatni."

Ad (3)



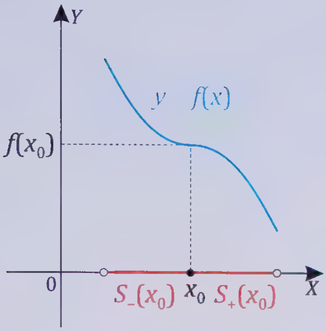
$f'(x_0) = 0$

„Pochodna jest dodatnia w sąsiedztwie punktu x_0."

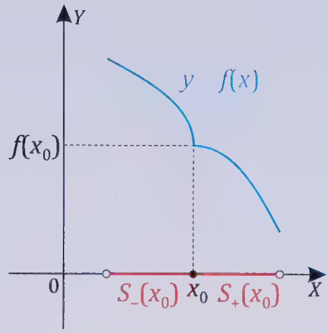


$f'(x_0)$ nie istnieje

„Pochodna jest dodatnia w sąsiedztwie punktu x_0."



$f'(x_0) = 0$
„Pochodna jest ujemna w sąsiedztwie punktu x_0."



$f'(x_0)$ nie istnieje
„Pochodna jest ujemna w sąsiedztwie punktu x_0."

Podsumujmy – jeśli chcemy wyznaczyć ekstrema lokalne funkcji, to:
1) wyznaczamy dziedzinę funkcji f, pochodną funkcji f oraz dziedzinę pochodnej;
2) wyznaczamy punkty krytyczne funkcji f;
3) badamy, kiedy pochodna funkcji f jest dodatnia, a kiedy ujemna;
4) w punktach krytycznych, w których pochodna
   a) istnieje – badamy, czy zmienia ona znak; jeśli tak, to określamy rodzaj ekstremum (minimum, maksimum),
   b) nie istnieje – badamy, czy funkcja jest ciągła i czy pochodna zmienia tam znak; jeśli tak, to określamy rodzaj ekstremum.

Przykład 1.

Wyznaczymy ekstrema lokalne funkcji:

a) $f(x) = x^5 - 15x^3 + 7$ b) $f(x) = \dfrac{-4}{x+3} - x$

Ad a) Mamy $D_f = \boldsymbol{R}$.

$$f'(x) = 5x^4 - 45x^2, \qquad D_{f'} = D_f$$

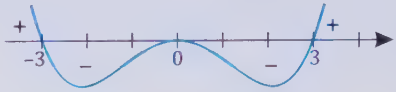
Wyznaczamy punkty krytyczne. Ponieważ funkcja f ma pochodną w zbiorze $\boldsymbol{R}$, więc może mieć tylko takie punkty krytyczne, które są miejscami zerowymi jej pochodnej. Zatem

$$f'(x) = 0 \iff (5x^4 - 45x^2 = 0 \land x \in D_{f'}) \iff$$
$$\iff [(5x^2(x+3)(x-3) = 0 \land x \in \boldsymbol{R}] \iff$$
$$\iff (x = -3 \lor x = 0 \lor x = 3)$$

Badamy znak pochodnej.

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow [5x^2(x+3)(x-3) > 0 \wedge x \in D_{f'}] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in (-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$$



$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-3, 0) \cup (0, 3)$$

Łatwo określimy, czy w punktach krytycznych są ekstrema i jaki jest ich rodzaj, jeśli otrzymane wyniki przedstawimy w tabeli:

x	$(-\infty, -3)$	-3	$(-3, 0)$	0	$(0, 3)$	3	$(3, +\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	169 maksimum lokalne	$\searrow$	7	$\searrow$	–155 minimum lokalne	$\nearrow$

Symbol $\searrow$ (odpowiednio $\nearrow$) oznacza, że funkcja jest malejąca (odpowiednio rosnąca) w danym przedziale. Bez trudu dostrzegamy, że w punkcie -3 pochodna zmienia znak z dodatniego na ujemny, więc funkcja f w lewostronnym sąsiedztwie tego punktu jest rosnąca, a w prawostronnym sąsiedztwie – malejąca, więc w punkcie -3 jest maksimum lokalne (właściwe). Podobnie stwierdzamy, że w punkcie 3 jest minimum lokalne (właściwe). Natomiast w sąsiedztwie punktu 0 pochodna jest ujemna (więc funkcja f jest malejąca) – zatem w tym punkcie nie ma ekstremum.

Funkcja f ma dwa ekstrema lokalne. Możemy to zapisać krótko: $f_{\max}(-3) = 169$, $f_{\min}(3) = -155$.

Ad b)

Mamy $D_f = (-\infty, -3) \cup (-3, +\infty)$.

$$f'(x) = \frac{4}{(x+3)^2} - 1 \qquad D_{f'} = D_f$$

Punkty krytyczne mogą być tylko miejscami zerowymi pochodnej.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{4}{(x+3)^2} - 1 = 0 \wedge x \in D_{f'}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(-\frac{x^2+6x+5}{(x+3)^2} = 0 \wedge x \in D_{f'}\right)$$

$$\Leftrightarrow (x = -5 \vee x = -1)$$

Badamy znak pochodnej.

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -5) \cup (-1, +\infty)$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-5, -3) \cup (-3, -1)$$

Budujemy tabelkę.

x	$(-\infty, -5)$	-5	$(-5, -3)$	-3	$(-3, -1)$	-1	$(-1, +\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	+	X	+	0	$-$
$f(x)$	↘	7 minimum lokalne	↗	X	↗	-1 maksimum lokalne	↘

Symbol „X” oznacza, że wartość pochodnej (wartość funkcji) nie istnieje.

Funkcja f ma dwa ekstrema; $f_{\min}(-5) = 7$, $f_{\max}(-1) = -1$.

Przykład 2.

Wyznaczymy ekstrema funkcji $f(x) = x^3 - 3|x|$.

Określamy dziedzinę funkcji f: $D_f = \mathbf{R}$. Mamy:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 3x, & \text{jeśli } x \in \langle 0, +\infty) \\ x^3 + 3x, & \text{jeśli } x \in (-\infty, 0) \end{cases}$$

Wyznaczamy pochodne:

$$(x^3 - 3x)' = 3x^2 - 3, \text{ jeśli } x \in (0, +\infty)$$

$$(x^3 + 3x)' = 3x^2 + 3, \text{ jeśli } x \in (-\infty, 0)$$

Sprawdzamy, czy istnieje pochodna funkcji w punkcie 0. Funkcja f jest ciągła w punkcie 0 (sprawdź!).

$$\lim_{x \to 0} f'(x) = \lim_{x \to 0} (3x^2 + 3) = 3$$

oraz

$$\lim_{x \to 0^+} f'(x) = \lim_{x \to 0^+} (3x^2 - 3) = -3,$$

zatem pochodna funkcji f w punkcie 0 nie istnieje. Mamy więc:

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 - 3, & \text{jeśli } x \in \langle 0, +\infty) \\ 3x^2 + 3, & \text{jeśli } x \in (-\infty, 0) \end{cases}, \qquad D_{f'} = D_f - \{0\}$$

Punkt 0 jest punktem krytycznym (należy do dziedziny funkcji i pochodna w tym punkcie nie istnieje).

Szukamy pozostałych punktów krytycznych.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow [(3x^2 + 3 = 0 \wedge x < 0) \vee (3x^2 - 3 = 0 \wedge x > 0)] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow [(x = -1 \vee x = 1) \wedge x > 0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 1$$

Określamy znak pochodnej.

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow [(3x^2 + 3 > 0 \wedge x < 0) \vee (3x^2 - 3 > 0 \wedge x > 0)] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$

$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (0, 1)$

Budujemy tabelkę.

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	+	X	–	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	0 maksimum lokalne	$\searrow$	–2 minimum lokalne	$\nearrow$

Funkcja f ma dwa ekstrema lokalne, $f_{\max}(0) = 0$, $f_{\min}(1) = -2$.

Przykład 3.

Wykażemy, że jeśli $x \in \langle 1, +\infty)$, to $3x^5 + 20x^3 \geqslant 15x^4 + 8$.

Wystarczy wykazać, że jeśli $x \in \langle 1, +\infty)$, to $3x^5 - 15x^4 + 20x^3 - 8 \geqslant 0$.
Rozważmy funkcję

$f(x) = 3x^5 - 15x^4 + 20x^3 - 8, \quad D_f = \boldsymbol{R}$

Funkcja f jest ciągła w zbiorze liczb rzeczywistych. Sprawdzamy, czy funkcja f ma ekstrema. Mamy:

$f'(x) = 15x^4 - 60x^3 + 60x^2, \quad D_{f'} = \boldsymbol{R}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow [15x^2(x-2)^2 = 0 \wedge x \in D_{f'}] \Leftrightarrow (x = 0 \vee x = 2)$

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 0) \cup (0, 2) \cup (2, +\infty)$

Zgodnie z twierdzeniem 2. punkt (3) funkcja f nie ma ekstremum w punkcie 0 ani w punkcie 2 („pochodna nie zmienia znaku w tych punktach").
Funkcja f jest rosnąca w przedziałach:

$(-\infty, 0\rangle, \langle 0, 2\rangle, \langle 2, +\infty)$

Ponieważ pierwszy i drugi przedział mają wspólny koniec (punkt 0) oraz drugi i trzeci przedział mają wspólny koniec (punkt 2), więc funkcja f jest rosnąca w przedziale będącym sumą tych przedziałów:

$(-\infty, 0\rangle \cup \langle 0, 2\rangle \cup \langle 2, +\infty) = (-\infty, +\infty) = \boldsymbol{R}$

Otrzymaliśmy, że funkcja

$f(x) = 3x^5 - 15x^4 + 20x^3 - 8, \quad D_f = \boldsymbol{R}$

jest rosnąca w zbiorze $\boldsymbol{R}$.

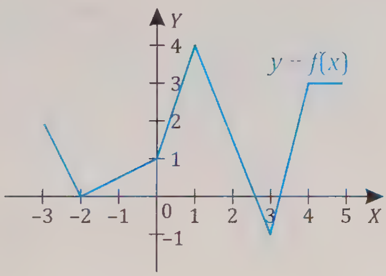
Rozważmy funkcję f ograniczoną do przedziału $\langle 1, +\infty)$. W tym przedziale funkcja f również jest rosnąca. Zatem najmniejszą wartość dla argumentów z tego przedziału przyjmuje w punkcie 1.

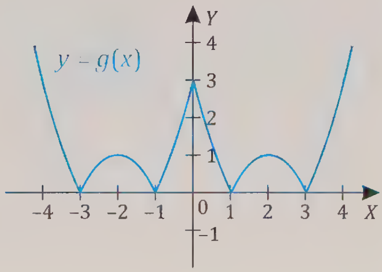
$f(1) = 3 - 15 + 20 - 8 = 0$, czyli

jeśli $x \in \langle 1, +\infty)$, to $3x^5 - 15x^4 + 20x^3 - 8 \geqslant 0$, co kończy dowód.

Sprawdź, czy rozumiesz

1. Dane są wykresy funkcji $y = f(x)$ oraz $y = g(x)$. Wskaż punkty, w których dane funkcje mają ekstrema lokalne właściwe. Określ rodzaj ekstremum w tych punktach.





2. Dziedziną funkcji f jest zbiór liczb rzeczywistych. Funkcja f jest różniczkowalna w każdym punkcie należącym do dziedziny oraz $f'(x) = 3x \cdot (x+1)^2 \cdot (2-x)$. Wyznacz punkty krytyczne funkcji f i określ rodzaj ekstremów w tych punktach (o ile istnieją).

3. Dziedziną funkcji f jest suma przedziałów $(-\infty,\ 1) \cup (-1, +\infty)$. Funkcja f jest różniczkowalna w każdym punkcie należącym do dziedziny oraz $f'(x) = 1 - \dfrac{4}{(x+1)^2}$. Wyznacz punkty krytyczne funkcji f i określ rodzaj ekstremów w tych punktach (o ile istnieją).

4. Wyznacz ekstrema lokalne funkcji f, jeśli:

a) $f(x) = (x^2 - 4)(x+2)$ b) $f(x) = \dfrac{1}{2}x^4 - \dfrac{4}{3}x^3 - 4x^2 + 16x - 1$

c) $f(x) = x + \dfrac{4}{x+5}$ d) $f(x) = x + \dfrac{1}{x^2}$

5. Wyznacz ekstrema lokalne funkcji f (o ile istnieją), jeśli:

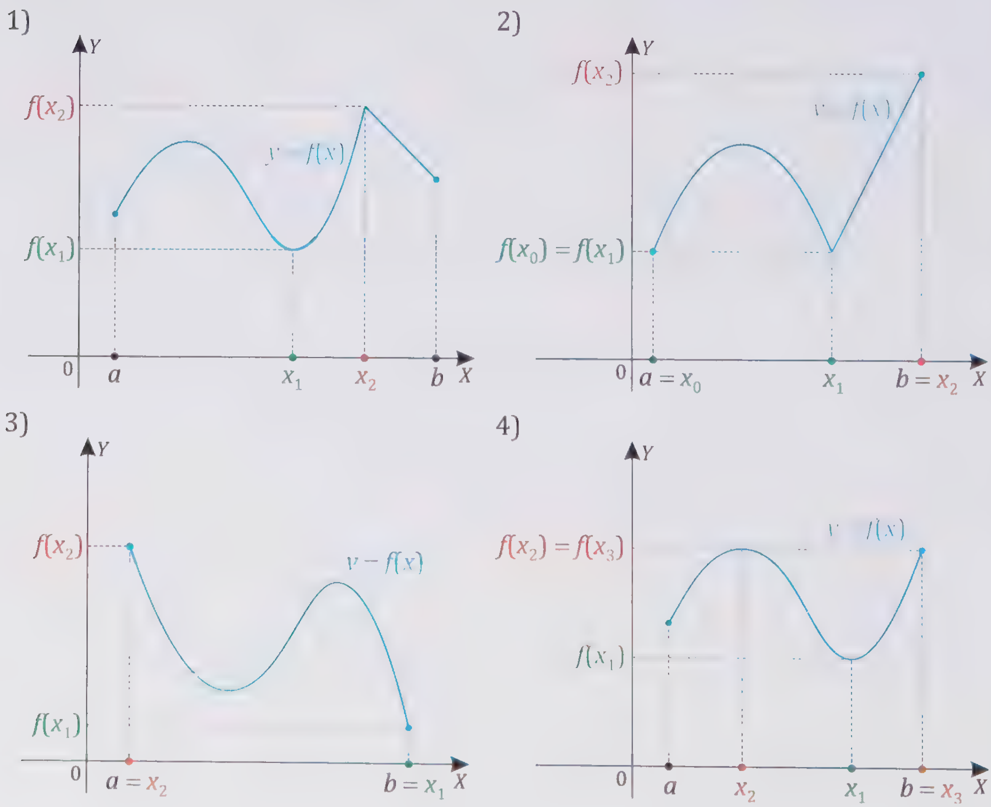
a) $f(x) = |x| - 3$ b) $f(x) = -2x \cdot |x - 4|$

Największa i najmniejsza wartość funkcji w przedziale

W tym temacie omówimy zagadnienie dotyczące wyznaczania największej wartości funkcji (maksimum globalne) i najmniejszej wartości funkcji (minimum globalne) w przedziale domkniętym, a następnie w przedziale otwartym.

Największa i najmniejsza wartość funkcji w przedziale domkniętym

W temacie dotyczącym funkcji ciągłych poznałeś twierdzenie (Weierstrassa), które gwarantowało, że funkcja ciągła w przedziale domkniętym osiąga w tym przedziale najmniejszą i największą wartość. Teraz ustalimy procedurę pozwalającą te wartości wyznaczyć. Zaczniemy od analizy wykresów funkcji przedstawionych na poniższych rysunkach. Każda z tych funkcji określona jest w przedziale $\langle a, b\rangle$.



Na rysunku 1) mamy wykres funkcji przyjmującej najmniejszą wartość w punkcie x_1, w którym jest minimum lokalne (wówczas $f'(x_1) = 0$), a największą wartość – w punkcie x_2, w którym jest maksimum lokalne ($f'(x_2)$ nie istnieje).

Najmniejsza wartość funkcji przedstawionej na rysunku 2) jest przyjmowana w dwóch punktach: w punkcie a będącym lewym końcem danego przedziału oraz w punkcie x_1, w którym jest minimum lokalne ($f'(x_1)$ nie istnieje). Największa wartość funkcji jest przyjmowana w punkcie b – prawym końcu danego przedziału.

Na rysunku 3) jest przedstawiony wykres funkcji, której najmniejsza wartość przyjmowana jest w punkcie b, a największa wartość – w punkcie a. Zauważ, że w przedziale $\langle a, b\rangle$ funkcja ma zarówno minimum, jak i maksimum lokalne, ale w żadnym z tych punktów nie przyjmuje wartości największej ani najmniejszej.

Na ostatnim rysunku zaprezentowany jest wykres funkcji f mającej najmniejszą wartość w punkcie x_1, w którym jest minimum lokalne ($f'(x_1) = 0$). Największa wartość funkcji przyjmowana jest w dwóch punktach: x_2 – w którym jest maksimum lokalne ($f'(x_2) = 0$), i w punkcie b – prawym końcu przedziału określoności.

A więc najmniejszą i największą wartość funkcja ciągła w przedziale domkniętym $\langle a, b\rangle$ może przyjmować w punktach krytycznych należących do przedziału (a, b) lub w punktach a, b.

Możemy sformułować następujący wniosek.

Wniosek: Aby wyznaczyć największą i najmniejszą wartość funkcji f ciągłej w przedziale domkniętym $\langle a, b\rangle$:
1) wyznaczamy punkty krytyczne funkcji f w przedziale otwartym (a, b);
2) obliczamy wartości funkcji f w punktach krytycznych i na końcach przedziału $\langle a, b\rangle$
3) wybieramy największą i najmniejszą wartość spośród wartości obliczonych w punkcie 2).

Zastanów się, jak wyznaczyć największą i najmniejszą wartość funkcji ciągłej w sumie przedziałów domkniętych.

Przykład 1.

Wyznaczymy najmniejszą i największą wartość funkcji f w podanym przedziale, jeśli:
a) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 3,\ x \in \langle -3, 3\rangle$
b) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 3|x| + 2,\ x \in \langle -1, 2\rangle$

Ad a) W przedziale $\langle -3, 3\rangle$ funkcja f jest ciągła. Wyznaczamy pochodną:

$$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12, \qquad D_{f'} = (-3, 3)$$

UWAGA: Nie ma potrzeby badania, czy istnieje pochodna jednostronna funkcji f w punktach -3 i 3. W tych punktach wystarczy obliczyć wartość funkcji f.

Wyznaczamy punkty krytyczne funkcji f (w tym przypadku – miejsca zerowe pochodnej f'):

$$\left[f'(x) = 0 \wedge x \in D_{f'}\right] \Leftrightarrow \left[6x^2 - 6x - 12 = 0 \wedge x \in (-3, 3)\right]$$

$$\Leftrightarrow (x = -1 \vee x = 2)$$

Obliczamy wartości funkcji f w punktach krytycznych i na końcach przedziału $\langle -3, 3\rangle$:

$$f(-1) = 10 \qquad f(-3) = -42$$

$$f(2) = -17 \qquad f(3) = -6$$

W przedziale $\langle -3, 3\rangle$ funkcja f przyjmuje wartość największą, równą 10, dla argumentu -1. Natomiast najmniejsza wartość funkcji f w przedziale $\langle -3, 3\rangle$ jest równa -42 i jest przyjmowana dla argumentu -3.

Ad b) Funkcja f jest ciągła w przedziale $\langle -1, 2\rangle$. Mamy:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}x^4 + 3x + 2, & \text{jeśli } x \in \langle -1, 0) \\ \frac{1}{4}x^4 - 3x + 2, & \text{jeśli } x \in \langle 0, 2\rangle \end{cases}$$

Wyznaczamy pochodną funkcji f:

$$\left(\frac{1}{4}x^4 + 3x + 2\right)' = x^3 + 3, \text{ jeśli } x \in (-1, 0)$$

$$\left(\frac{1}{4}x^4 - 3x + 2\right)' = x^3 - 3, \text{ jeśli } x \in (0, 2)$$

Sprawdzamy istnienie pochodnej funkcji f w punkcie 0. Funkcja f jest ciągła w punkcie 0 oraz

$$\lim_{x \to 0^-} f'(x) = \lim_{x \to 0^-} (x^3 + 3) = 3$$

$$\lim_{x \to 0^+} f'(x) = \lim_{x \to 0^+} (x^3 - 3) = -3$$

Stąd pochodna w punkcie 0 nie istnieje. Punkt ten jest punktem krytycznym. Szukamy pozostałych punktów krytycznych w przedziale $(-1, 2)$.

$$\left[f'(x) = 0 \wedge x \in D_{f'}\right] \Leftrightarrow \left(\left[x^3 + 3 = 0 \wedge x \in (-1, 0)\right] \vee \left[x^3 - 3 = 0 \wedge x \in (0, 2)\right]\right)$$

$$\Leftrightarrow x = \sqrt[3]{3}$$

Mamy dwa punkty krytyczne. Obliczamy wartość funkcji f w punktach krytycznych i na końcach przedziału $\langle -1, 2\rangle$.

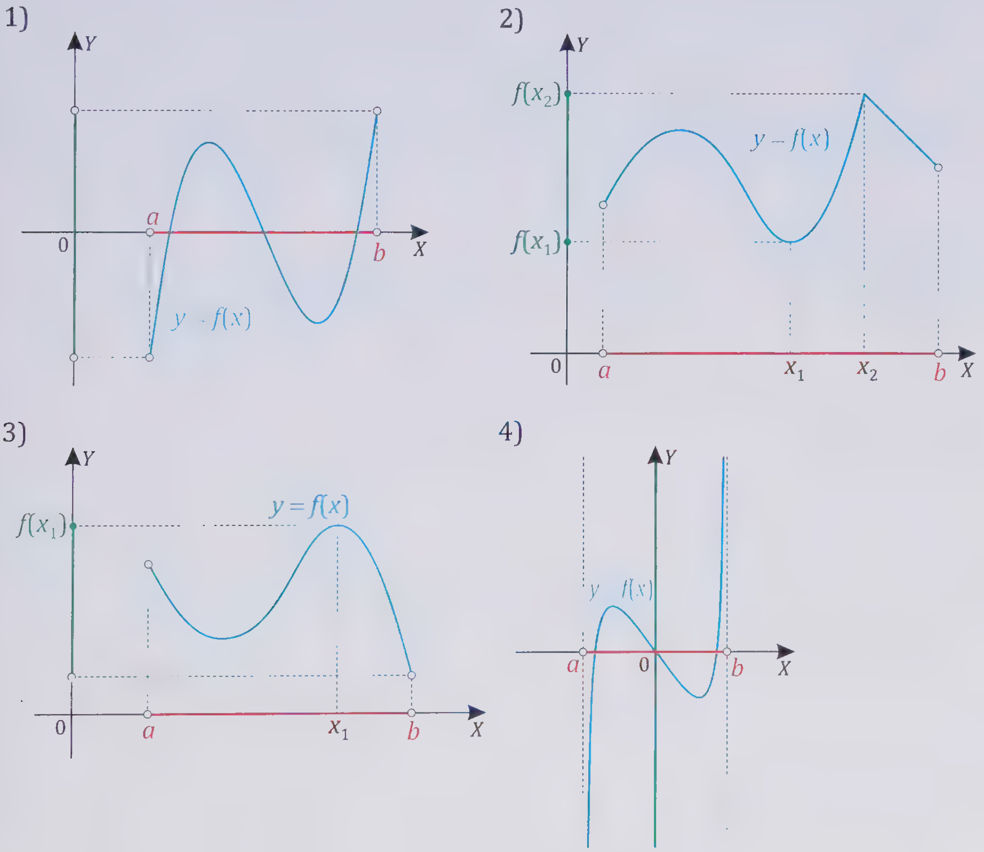
$f(0) = 2$ $\qquad$ $f\left(\sqrt[3]{3}\right) = \frac{1}{4}\left(\sqrt[3]{3}\right)^4 - 3\sqrt[3]{3} + 2$ $(\approx -1{,}245)$

$f(-1) = -0{,}75$ $\qquad$ $f(2) = 0$

Funkcja f w przedziale $\langle -1, 2\rangle$ przyjmuje wartość największą równą 2 (dla argumentu 0) i wartość najmniejszą, równą $f\left(\sqrt[3]{3}\right)$ (w przybliżeniu $-1{,}245$).

Największa i najmniejsza wartość funkcji w przedziale otwartym

Przeanalizujmy wykresy funkcji przedstawione na poniższych rysunkach. Każda z funkcji określona jest w przedziale otwartym (a, b).



Funkcja na rysunku 1) nie przyjmuje ani wartości najmniejszej, ani wartości największej. Zbiór wartości funkcji – zaznaczony kolorem zielonym – jest przedziałem otwartym.

Z kolei funkcja na rysunku 2) przyjmuje zarówno wartość najmniejszą (w punkcie x_1, w którym jest minimum lokalne), jak i wartość największą (w punkcie x_2, w którym jest maksimum lokalne). Zbiór wartości funkcji f jest przedziałem domkniętym.

Na rysunku 3) jest przedstawiona funkcja, która nie przyjmuje wartości najmniejszej, ale przyjmuje wartość największą (w punkcie x_1, w którym jest maksimum lokalne). Zbiór wartości tej funkcji jest przedziałem prawostronnie domkniętym.

Rysunek 4) pokazuje, że zbiór wartości funkcji określonej w przedziale otwartym może być nieograniczony (w tym przypadku jest to zbiór $\boldsymbol{R}$). Zauważ, że funkcja ta ma zarówno minimum, jak i maksimum lokalne.

Wniosek: Aby sprawdzić, czy istnieje najmniejsza i największa wartość funkcji ciągłej f określonej w przedziale otwartym (a, b):
1) wyznaczamy punkty krytyczne funkcji w przedziale (a, b)
2) obliczamy wartości funkcji w punktach krytycznych i granice funkcji na końcach przedziału:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) \quad \text{oraz} \quad \lim_{x \to b^-} f(x)$$

3) określamy – porównując wartości otrzymane w punkcie 2) – czy istnieje wartość najmniejsza i wartość największa funkcji w przedziale (a, b).

Przykład 1.

Zbadamy, czy istnieje najmniejsza i największa wartość funkcji f w podanym przedziale:

a) $f(x) = \dfrac{-1}{16} x^4 + x^2 + 1, \qquad D_f = \left(-\sqrt{2}, 3\sqrt{2}\right)$

b) $f(x) = x + \dfrac{1}{x}, \qquad D_f = (-2, 0)$

Ad a)

Funkcja f jest ciągła i różniczkowalna w przedziale $\left(-\sqrt{2}, 3\sqrt{2}\right)$.
Wyznaczamy pochodną

$$f'(x) = -\frac{1}{4}x^3 + 2x \qquad D_{f'} = D_f = \left(-\sqrt{2}, 3\sqrt{2}\right)$$

Wyznaczamy punkty krytyczne:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[-\frac{1}{4}x(x^2 - 8) = 0 \wedge x \in \left(-\sqrt{2}, 3\sqrt{2}\right)\right]$$

$$\Leftrightarrow \left(x = 0 \vee x = 2\sqrt{2}\right)$$

Obliczamy wartości funkcji f w punktach krytycznych i granice na końcach przedziału określoności

$$f(0)=1 \qquad f\left(2\sqrt{2}\right)=5$$

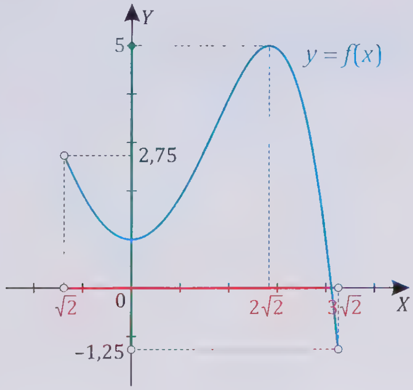
$$\lim_{x\to -\sqrt{2}^+} f(x)=2{,}75 \qquad \lim_{x\to 3\sqrt{2}^-} f(x)=-1{,}25$$

Ponieważ $5 > \lim\limits_{x\to -\sqrt{2}^+} f(x)$ i $5 > \lim\limits_{x\to 3\sqrt{2}^-} f(x)$,

więc liczba 5 jest największą wartością funkcji f w danym przedziale. Natomiast

$$1 > \lim_{x\to 3\sqrt{2}} f(x),$$

zatem nie istnieje najmniejsza wartość funkcji f w danym przedziale.
Rysunek poniżej przedstawia wykres funkcji f.



Ad b)
Funkcja f jest ciągła i różniczkowalna w przedziale $(-2, 0)$. Wyznaczamy pochodną funkcji f.

$$f'(x)=1-\frac{1}{x^2} \qquad D_{f'}=D_f=(-2, 0)$$

Wyznaczamy punkty krytyczne funkcji f.

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[1-\frac{1}{x^2}=0 \wedge x\in(-2, 0)\right]$$

$$\Leftrightarrow x=-1$$

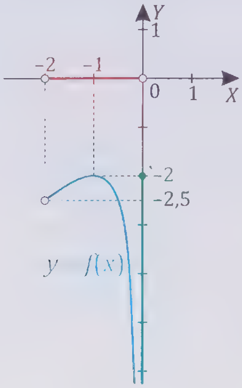
Obliczamy wartość funkcji f w punkcie krytycznym i granice funkcji f na końcach przedziału określoności:

$$f(-1)=-2$$

$$\lim_{x\to -2^+} f(x)=-2{,}5 \qquad \lim_{x\to 0^-} f(x)=-\infty$$

Ponieważ $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$, więc najmniejsza wartość funkcji w przedziale $(-2, 0)$ nie istnieje.

Natomiast $2 > \lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = -2{,}5$, więc największa wartość funkcji f w danym przedziale jest równa -2. Rysunek poniżej przedstawia wykres funkcji f.



Przykład 3.

Wyznaczymy zbiór wartości funkcji $f(x) = \dfrac{x^2 - 8x + 7}{x + 1}$, gdzie $D_f = \langle 1, 8)$.

Sprawdzamy, czy funkcja f ma ekstrema lokalne.

$$\left(\frac{x^2 - 8x + 7}{x + 1}\right)' = \frac{(2x - 8)(x + 1) - (x^2 - 8x + 7) \cdot 1}{(x + 1)^2} = \frac{x^2 + 2x - 15}{(x + 1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{x^2 + 2x - 15}{(x + 1)^2}, \quad D_{f'} = (1, 8)$$

$x^2 + 2x - 15 = (x - 3)(x + 5)$,

zatem

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow [(x - 3)(x + 5) = 0 \wedge x \in (1, 8)] \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x = 3$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow [(x - 3)(x + 5) > 0 \wedge x \in (1, 8)] \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x \in (3, 8)$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow [(x - 3)(x + 5) < 0 \wedge x \in (1, 8)] \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x \in (1, 3)$$

Obliczamy:

$f(3) = -2$ $\qquad$ $f(1) = 0$

$\lim\limits_{x \to 8^-} f(x) = \frac{7}{9}$

Budujemy tabelkę

x	1	$(1, 3)$	3	$(3, 8)$
$f'(x)$	X	$-$		$+$
$f(x)$	0	$\searrow$	-2 minimum lokalne	$\nearrow \frac{7}{9}$

Z tabelki łatwo już odczytać, że wartości funkcji f maleją od 0 do -2, a następnie rosną do $\frac{7}{9}$, przy czym wartość $\frac{7}{9}$ nie jest przyjmowana. Zatem zbiorem wartości funkcji f jest przedział $\left\langle -2, \frac{7}{9} \right)$.

Sprawdź, czy rozumiesz

1. Wyznacz największą i najmniejszą wartość funkcji $f(x) = -x^3 + 2x^2 + 4x$ w przedziale $\langle -1, 5 \rangle$.
2. Wyznacz wartość największą i wartość najmniejszą funkcji $f(x) = |x|^3 - 12x$ w przedziale $\langle -2, 4 \rangle$.
3. Wykaż, że nie istnieje wartość największa ani wartość najmniejsza funkcji $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + x^2$ w przedziale $(-3, 4)$.
4. Sprawdź, czy istnieje wartość największa i wartość najmniejsza funkcji $f(x) = 0{,}25x^4 - 8x^2$ w przedziale $(-4, 1)$.
5. Wyznacz największą i najmniejszą wartość (o ile istnieją) funkcji $f(x) = \frac{x^2 + 9}{x}$ w przedziale $(0, 5\rangle$.
6. Wyznacz zbiór wartości funkcji:

   a) $f(x) = x^4 + x^3 - 0{,}5x^2$, jeśli $x \in \langle -2, 1)$ $\qquad$ b) $f(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1}$, jeśli $x \in (-2, 0\rangle$

Badanie przebiegu zmienności funkcji

Zdobyta dotychczas wiedza i nabyte umiejętności pozwalają nam przeprowadzić badanie przebiegu zmienności funkcji. Jego celem jest naszkicowanie wykresu danej funkcji, a polega na wykonaniu następujących czynności:

1. Wyznaczenie dziedziny funkcji (najkorzystniej zapisać ją w postaci przedziału lub sumy przedziałów).
2. Sprawdzenie, czy funkcja ma istotne dla wykresu własności (okresowość, parzystość, nieparzystość).
3. Wyznaczenie – o ile istnieją – punktów wspólnych wykresu funkcji z osiami układu współrzędnych.
4. Obliczenie granic funkcji na końcach przedziałów tworzących dziedzinę. Ewentualne wyznaczenie równań asymptot wykresu funkcji.
5. Analiza pochodnej funkcji (wyznaczenie pochodnej, ustalenie jej dziedziny, wyznaczenie jej miejsc zerowych i przedziałów, w których przyjmuje wartości dodatnie (i ujemne)).
6. Zbudowanie tabelki przebiegu zmienności funkcji.
7. Naszkicowanie wykresu funkcji.

W punkcie 6. zbudujemy tabelkę przebiegu zmienności funkcji, która będzie zawierać informacje dotyczące tej funkcji. W szczególności, jeśli ustalimy, że funkcja jest rosnąca (malejąca) w pewnym przedziale, to dla oznaczenia tej własności będziemy używać znaku $\nearrow$ ($\searrow$),jak to robiliśmy w tabeli, która występowała przy okazji wyznaczania ekstremów funkcji.

Przykład 1.

Zbadamy przebieg zmienności funkcji $f(x) = 2x(x-1)^2$.

1. $D_f = (-\infty, \infty)$
2. Funkcja f nie jest okresowa, nie jest parzysta ani nieparzysta.
3. $f(x) = 0 \Leftrightarrow \left[2x(x-1)^2 = 0 \wedge x \in D_f\right] \Leftrightarrow (x = 0 \vee x = 1)$
   Punkty wspólne wykresu z osią OX: $(0, 0)$, $(1, 0)$
   Punkty wspólne wykresu z osią OY: $(0, 0)$
4. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \qquad \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

   Wykres funkcji f nie ma asymptot pionowych ani poziomych.

Badamy istnienie asymptot ukośnych:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} 2(x-1)^2 = +\infty$$

Stwierdzamy brak asymptoty ukośnej.

5. W celu wyznaczenia pochodnej zapisujemy wzór funkcji w postaci sumy
   $f(x) = 2x(x-1)^2 = 2x^3 - 4x^2 + 2x,$

stąd

$$f'(x) = 6x^2 - 8x + 2 \qquad D_{f'} = D_f$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow [6x^2 - 8x + 2 = 0 \wedge x \in D_{f'}] \Leftrightarrow \left(x = \frac{1}{3} \vee x = 1\right)$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \left[6\left(x - \frac{1}{3}\right)(x-1) > 0 \wedge x \in D_{f'}\right] \Leftrightarrow$$

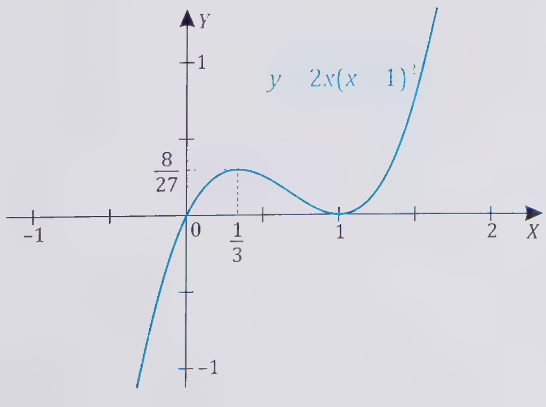
$$\Leftrightarrow x \in \left(-\infty, \frac{1}{3}\right) \cup (1, +\infty)$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in \left(\frac{1}{3}, 1\right)$$

6. W tabelce zapisujemy punkty, które wystąpiły w dotychczasowych obliczeniach. Mamy więc liczbę 0 (miejsce zerowe), $\frac{1}{3}$ (miejsce zerowe pochodnej), 1 (miejsce zerowe funkcji f i jej pochodnej)

x	$(-\infty, 0)$	0	$\left(0, \frac{1}{3}\right)$	$\frac{1}{3}$	$\left(\frac{1}{3}, 1\right)$	1	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	+	+	+	0	–	0	+
$f(x)$	$-\infty$ ↗	0	↗	$\frac{8}{27}$ maksimum lokalne	↘	0 minimum lokalne	↗ $+\infty$

W tabelce wypełniamy drugi wiersz (dotyczący pochodnej funkcji), następnie wpisujemy w trzecim wierszu granice funkcji oraz wartości dla wskazanych argumentów funkcji. Ponadto umieszczamy strzałki pokazujące, czy w danym przedziale funkcja jest rosnąca czy malejąca.
Na koniec szkicujemy wykres funkcji



Przykład 2.

Przeprowadzimy badanie przebiegu zmienności funkcji $f(x) = x + \dfrac{4}{x-2}$.

1. $D_f = (-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$
2. Funkcja nie jest okresowa, nie jest parzysta ani nieparzysta.
3. $f(x) = 0 \Leftrightarrow \left(\underbrace{\dfrac{x^2 - 2x + 4}{x-2} = 0}_{\text{równanie sprzeczne}} \wedge x \in D_f\right)$

Funkcja nie ma miejsc zerowych, nie ma więc punktów wspólnych wykresu z osią OX.

$f(0) = -2$, zatem punkt wspólny wykresu funkcji z osią OX ma współrzędne $(0, -2)$.

4. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(x + \dfrac{4}{x-2}\right) = +\infty$ $\qquad \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

Wykres funkcji f nie ma asymptoty poziomej.

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = -\infty$ $\qquad \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = +\infty$

Prosta o równaniu $x = 2$ jest asymptotą pionową (obustronną) wykresu funkcji.

Badamy istnienie asymptoty ukośnej o równaniu $y = ax + b$:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty}\left(1 + \frac{4}{x(x-2)}\right) = 1, \quad \text{stąd}$$

$a = 1$

$$\lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - ax] = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{4}{x-2} = 0, \quad \text{stąd}$$

$b = 0$

Asymptotą ukośną (obustronną) wykresu funkcji f jest prosta o równaniu $y = x$.

5. Wyznaczamy pochodną:

$$f'(x) = \left(x + \frac{4}{x-2}\right)' = 1 - \frac{4}{(x-2)^2} = \frac{x^2 - 4x}{(x-2)^2} \qquad D_{f'} = D_f$$

Mamy:

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow [x^2 \quad 4x = 0 \wedge x \in D_{f'}] \Leftrightarrow (x = 0 \vee x = 4)$

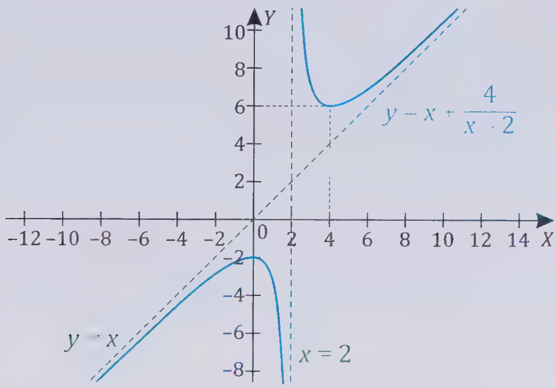
$f'(x) > 0 \Leftrightarrow [x^2 - 4x > 0 \wedge x \in D_{f'}] \Leftrightarrow x \in (-\infty, 0) \cup (4, +\infty)$

$f'(x) < 0 \Leftrightarrow [x^2 - 4x < 0 \wedge x \in D_{f'}] \Leftrightarrow x \in (0, 2) \cup (2, 4)$

6. Budujemy tabelkę

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 2)$	2	$(2, 4)$	4	$(4, +\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	X	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty \nearrow$	-2 maksimum lokalne	$\searrow -\infty$	X	$+\infty \searrow$	6 minimum lokalne	$\nearrow +\infty$

7. Szkicujemy wykres



Przykład 3.

Zbadamy przebieg zmienności funkcji

$$f(x) = (x-3) + \frac{2x-6}{x+2} + \frac{4x-12}{(x+2)^2} + \ldots$$

Po prawej stronie znaku równości mamy sumę S wyrazów nieskończonego ciągu geometrycznego, w którym pierwszy wyraz jest równy $(x-3)$, a iloraz $\dfrac{2}{x+2}$.

Suma ta istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy $\left|\dfrac{2}{x+2}\right| < 1$. Mamy:

$$\left|\frac{2}{x+2}\right| < 1 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -4) \cup (0, +\infty) \qquad \text{(sprawdź to!)}$$

Wówczas

$$S = \frac{x-3}{1 - \dfrac{2}{x+2}} = \frac{(x-3)(x+2)}{x}$$

Wzór funkcji f można zapisać w postaci

$$f(x)=\frac{(x-3)(x+2)}{x}$$

1. $D_f = (-\infty, -4) \cup (0, +\infty)$
2. Funkcja nie jest okresowa, nie jest parzysta ani nieparzysta.
3. $f(x)=0 \iff \left[\dfrac{(x-3)(x+2)}{x}=0 \wedge x\in D_f\right] \iff x=3$

Wykres funkcji f przecina oś OX w punkcie o współrzędnych $(3, 0)$ i nie ma punktów wspólnych z osią OY.

4. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-1-\dfrac{6}{x}\right)=+\infty$ $\qquad \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

   Wykres funkcji f nie ma asymptoty poziomej.

   $\lim\limits_{x\to-4^-} f(x)=\lim\limits_{x\to-4^-}\dfrac{(x-3)(x+2)}{x}=-3{,}5$ $\qquad \lim\limits_{x\to0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{(x-3)(x+2)}{x}=\infty$

   Wykres funkcji ma asymptotę pionową prawostronną $x=0$.

   Badamy istnienie asymptoty ukośnej o równaniu $y=ax+b$:

   $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}-\dfrac{6}{x^2}\right)=1$, skąd

   $a=1$

   $\lim\limits_{x\to\pm\infty}[f(x)-ax]=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(-1-\dfrac{6}{x}\right)=-1$, skąd

   $b=-1$

Wykres funkcji f ma asymptotę ukośną (obustronną) o równaniu $y=x-1$.

5. Obliczamy pochodną:

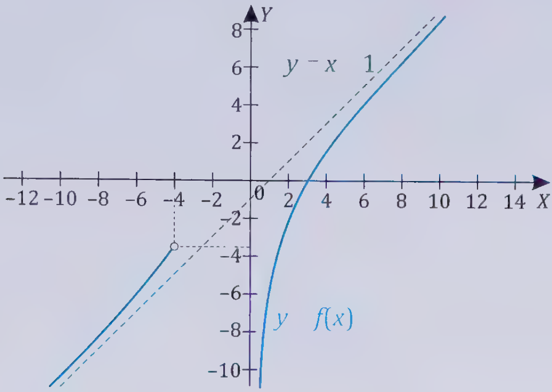
   $f'(x)=1+\dfrac{6}{x^2}$ $\qquad D_{f'}=D_f$

   $f'(x)>0 \iff x\in D_{f'}$

6. Sporządzamy tabelę:

x	$(-\infty, -4)$	$\langle -4, 0\rangle$	$(0, 3)$	3	$(3, +\infty)$
$f'(x)$	+	X	+	+	+
$f(x)$	$-\infty \nearrow 3{,}5$	X	$-\infty \nearrow$	0	$\nearrow +\infty$

7. Szkicujemy wykres funkcji f:



Sprawdź, czy rozumiesz

1. Na podstawie tabelki przebiegu zmienności funkcji f naszkicuj wykres tej funkcji.

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 0)$	0	$(0, 2)$	2	$(2, 4)$	4	$(4, +\infty)$
$f'(x)$	$+$	$+$	$+$	X	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$-2 \nearrow$	0	$\nearrow +\infty$	X	$-\infty \nearrow$	0	$\nearrow$	2	$\searrow 0$

2. Na podstawie podanych własności funkcji f sporządź tabelkę przebiegu zmienności tej funkcji.
   - $D_f = \boldsymbol{R}$
   - $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$
   - f jest parzysta
   - $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 2$
   - $f(-3) = f(3) = 5$
   - $D_{f'} = \boldsymbol{R} - \{0\}$
   - $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{-3, 3\}$
   - $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -3) \cup (0, 3)$
   - $f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-3, 0) \cup (3, +\infty)$

3. Zbadaj przebieg zmienności funkcji:

   a) $f(x) = x^3 - 9x^2$

   b) $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$

   c) $f(x) = \dfrac{4 - x^2}{x^2 - 1}$

   d) $f(x) = x^2 + \dfrac{2}{x}$

4. Zbadaj przebieg zmienności funkcji $f(x) = x + \dfrac{4}{x} + \dfrac{16}{x^3} + \dfrac{64}{x^5} + \dfrac{256}{x^7} + \ldots$ i naszkicuj wykres funkcji f.

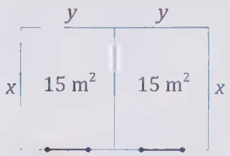
Zadania optymalizacyjne

Z zadaniami optymalizacyjnymi spotkałeś się już w dotychczasowej nauce. Istotą tych zadań jest wyznaczenie najlepszej (optymalnej) wartości pewnej funkcji (zwanej funkcją celu) – na przykład funkcji opisującej zysk przedsiębiorstwa w zależności od ilości sprzedanego towaru. W tym temacie pokażemy zastosowanie rachunku pochodnych do rozwiązywania tego typu zadań.

Przykład 1.

Pan Karol – miłośnik koni – chce zbudować dwa przestronne, przylegające do siebie, identyczne boksy dla swoich dwóch koni (zobacz plan boksów poniżej). Każdy boks ma mieć powierzchnię 15 m^2 i drzwi o szerokości 1,5 m. Koszt budowy 1 metra bieżącego ściany boksu to 300 zł. Jakie powinny być wymiary podłogi boksów, aby koszt budowy ścian był najmniejszy? (Wynik podamy z dokładnością do 0,01 m). Jaki będzie wówczas koszt budowy?

Niech x, y oznaczają wymiary podłogi boksu (w metrach).



$$x \cdot y = 15$$

Całkowita długość ścian to

$$3x + 4y - 3,$$

zatem koszt postawienia ścian to

$$K = 300(3x + 4y - 3), \qquad \text{ale } y = \frac{15}{x} \quad \text{i} \quad y \geqslant 1{,}5,$$

więc

$$K(x) = 300\left(3x + 4 \cdot \frac{15}{x} - 3\right),$$

czyli

$$K(x) = 900x + \frac{18\,000}{x} - 900 \qquad D_K = (0, 10\rangle$$

Szukamy najmniejszej wartości funkcji K. Funkcja K jest ciągła w całej dziedzinie.

$$K'(x) = 900 - \frac{18\,000}{x^2} \qquad D_{K'} = (0, 10)$$

$$K'(x) = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 20 = 0 \wedge x \in D_{K'}) \Leftrightarrow x = \sqrt{20}$$

$$K'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in \left(\sqrt{20}, 10\right)$$

$$K'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in \left(0, \sqrt{20}\right)$$

W punkcie $\sqrt{20}$ jest minimum lokalne – jest to również najmniejsza wartość funkcji K (dlaczego?).

$$K_{\min}\left(\sqrt{20}\right) = 1800\sqrt{20} - 900 \approx 7150 \text{ (zł)}$$

Ustalamy wymiary podłogi boksu:

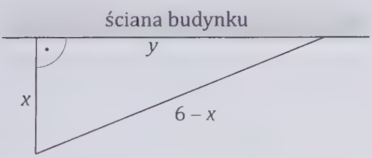
$$\sqrt{20} \approx 4{,}48 \text{ (m)} \qquad \frac{15}{\sqrt{20}} = \frac{3\sqrt{5}}{2} \approx 3{,}36 \text{ (m)}$$

Podłoga jednego boksu powinna mieć wymiary 3,36 m na 4,48 m. Wówczas koszt budowy ścian będzie najmniejszy i będzie równy ok. 7150 zł.

Przykład 2.

Pan Marek planuje zbudowanie piaskownicy dla swoich dzieci. Piaskownica ma mieć kształt trójkąta prostokątnego i będzie przylegać jednym bokiem do ściany domu. Na wygrodzenie piaskownicy pan Marek dysponuje 6 metrami bieżącymi desek. Jaką długość powinien mieć bok piaskownicy prostopadły do ściany budynku, aby przy całkowitym wykorzystaniu desek powierzchnia piaskownicy była możliwie największa?

Rysunek poniżej ilustruje sytuację opisaną w zadaniu:



x – długość boku piaskownicy prostopadłego do ściany budynku

$6 - x$ – długość najdłuższego boku piaskownicy

y – długość boku piaskownicy wyznaczonego przez ścianę budynku

Z twierdzenia Pitagorasa otrzymujemy zależność:

$$x^2 + y^2 = (6 - x)^2,$$

skąd

$$y = \sqrt{36 - 12x}$$

Pole piaskownicy opisuje funkcja

$$P(x) = \frac{1}{2}x\sqrt{36 - 12x}, \qquad D_P = (0, 3)$$

Sprawdzamy, czy funkcja P przyjmuje największą wartość. Najpierw zapiszemy wzór w dogodniejszej postaci

$$P(x) = \sqrt{\frac{36x^2 - 12x^3}{4}},$$

czyli

$$P(x) = \sqrt{9x^2 - 3x^3}$$

Funkcja „pierwiastek kwadratowy” ($y = \sqrt{t}$) jest funkcją rosnącą, zatem funkcja P będzie przyjmować największą wartość tylko w takim punkcie, w którym funkcja

$$f(x) = 9x^2 - 3x^3, \text{ gdzie } D_f = (0, 3),$$

będzie przyjmować największą wartość.

Funkcja f jest ciągła. Obliczamy pochodną funkcji f:

$$f'(x) = 18x - 9x^2 \qquad D_{f'} = D_f$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow (18x - 9x^2 = 0 \wedge x \in D_{f'}) \Leftrightarrow x = 2$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (0, 2)$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (2, 3)$$

Funkcja f ma w punkcie 2 maksimum lokalne $f_{max}(2) = 12$ i jest to jednocześnie wartość największa funkcji f, ponieważ

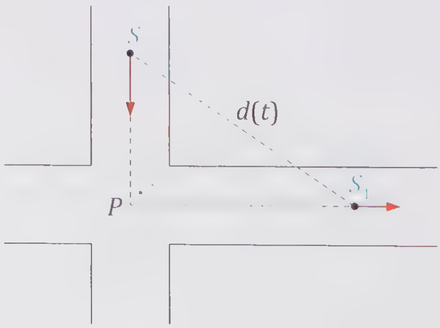
$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 3^-} f(x) = 0$$

Bok piaskownicy prostopadły do ściany budynku powinien mieć długość 2 m.

Przykład 3.

Dwie drogi przecinają się pod kątem prostym w punkcie P (zobacz schemat poniżej). Samochód S_1 jadący drogą z zachodu na wschód ze stałą prędkością 60 km/h przejechał przez punkt P o godzinie 12^{00}. W tej samej chwili drugi samochód S_2, jadący drogą z północy na południe ze stałą prędkością 80 km/h, znajdował się w odległości 50 km od P. O której godzinie samochody były najbliżej siebie i jaka była wtedy między nimi odległość?

Oznaczmy przez t czas (w godzinach), jaki upłynął od godziny 12^{00}. Po upływie tego czasu samochód S_1 znajdował się $60t$ km na wschód od punktu P, natomiast samochód S_2 znajdował się $80t$ km na południe od punktu, w którym był o godzinie 12^{00}, czyli jego odległość od punktu P była równa $|50 - 80t|$.



Korzystając z twierdzenia Pitagorasa zastosowanego do trójkąta PS_1S_2, można zapisać, że

$$d(t)=\sqrt{(60t)^2+(50-80t)^2},$$

gdzie $d(t)$ jest odległością między samochodami S_1 i S_2 w czasie t. Mamy:

$$d(t)=10\sqrt{100t^2-80t+25}, \qquad D_d=\langle 0,+\infty)$$

Szukamy najmniejszej wartości funkcji $y=d(t)$. W tym celu wystarczy wyznaczyć najmniejszą wartość funkcji

$$f(t)=100t^2-80t+25 \qquad D_f=\langle 0,+\infty)$$

Funkcja f jest ciągła. Obliczamy

$$f'(t)=200t-80 \qquad D_{f'}=\langle 0,+\infty)$$

$$f'(t)=0 \Leftrightarrow t=\frac{2}{5}$$

$$f'(t)>0 \Leftrightarrow t\in\left(\frac{2}{5},+\infty\right)$$

$$f'(t)<0 \Leftrightarrow t\in\left\langle 0,\frac{2}{5}\right)$$

$$f\left(\frac{2}{5}\right)=9 \qquad f(0)=25 \qquad \lim_{t\to\infty}f(t)=+\infty,$$

więc funkcja f osiąga najmniejszą wartość w punkcie $\frac{2}{5}$. Obliczamy odległość między samochodami:

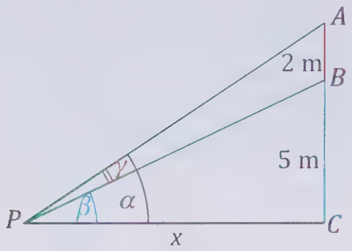
$$d\left(\frac{2}{5}\right)=10\sqrt{f\left(\frac{2}{5}\right)}=10\sqrt{9}=30 \text{ (km)}$$

Samochody będą najbliżej siebie o godz. 12^{24} i odległość między nimi będzie równa 30 km.

Przykład 4.

Na ścianie wysokiego budynku wisi prostokątna reklama, której wysokość jest równa 2 m. Dolna krawędź reklamy znajduje się na wysokości 5 m od poziomu oczu oglądającego. W jakiej odległości od ściany powinien stanąć oglądający reklamę, aby widzieć ją jak najlepiej?

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku poniżej, który przedstawia sytuację opisaną w zadaniu. Punkt P oznacza oko obserwatora.



$|AB| = 2$ m
$|BC| = 5$ m
$|PC| = x$
$|\sphericalangle CPA| = \alpha$
$|\sphericalangle CPB| = \beta$
$\gamma = \alpha - \beta$

Reklamę będzie widać najlepiej z tego miejsca, w którym kąt γ będzie największy, co jest równoważne temu, że tangens tego kąta będzie największy. Korzystamy ze wzoru na tangens różnicy kątów:

$$\operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta}$$

Ale $\operatorname{tg}\alpha = \frac{7}{x}$ i $\operatorname{tg}\beta = \frac{5}{x}$, stąd

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{\frac{7}{x} - \frac{5}{x}}{1 + \frac{7}{x} \cdot \frac{5}{x}} = \frac{2x}{x^2 + 35}$$

Zbadamy, w jakim punkcie funkcja

$$f(x) = \frac{2x}{x^2 + 35}, \qquad D_f = (0, +\infty),$$

przyjmuje wartość największą. Funkcja f jest ciągła. Mamy:

$$f'(x) = \frac{-2x^2 + 70}{(x^2 + 35)^2}, \qquad D_{f'} = D_f$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{35}$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in \left(0, \sqrt{35}\right)$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in \left(\sqrt{35}, +\infty\right)$$

$$f\left(\sqrt{35}\right) = \frac{\sqrt{35}}{35} \qquad \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$$

Funkcja f przyjmuje wartość największą w punkcie $\sqrt{35}$.
Oglądający powinien stanąć ok. 6 m od ściany budynku, żeby jak najlepiej widzieć reklamę.

Przykład 5.

Dla jakich wartości parametru m, $m \in \boldsymbol{R}$, suma dwóch różnych rozwiązań równania
(*) $(m^2-1)x^2-2x+0{,}25=0$
jest największa?

Aby istniały dwa różne rozwiązania równania (*), spełnione muszą być łącznie warunki

$$m^2-1\neq 0 \ \text{ i } \ 4-(m^2-1)>0,$$

co zachodzi wtedy, gdy

$$m\in\left(-\sqrt{5},-1\right)\cup(-1,1)\cup\left(1,\sqrt{5}\right)$$

Ze wzorów Viète'a wynika, że jeśli x_1, x_2 są rozwiązaniami równania (*), to

$$x_1+x_2=\frac{2}{m^2-1}$$

Zbadamy istnienie największej wartości funkcji

$$f(m)=\frac{2}{m^2-1} \qquad D_f=\left(-\sqrt{5},-1\right)\cup(-1,1)\cup\left(1,\sqrt{5}\right)$$

Funkcja f jest ciągła oraz

$$f'(m)=\frac{-4m}{(m^2-1)^2} \qquad D_{f'}=D_f$$

$$f'(m)=0 \Leftrightarrow m=0$$

$$f'(m)>0 \Leftrightarrow m\in\left(-\sqrt{5},-1\right)\cup(-1,0)$$

$$f'(m)<0 \Leftrightarrow m\in(0,1)\cup\left(1,\sqrt{5}\right)$$

$$f(0)=-2 \qquad \lim_{m\to-\sqrt{5}^+}f(m)=\lim_{m\to\sqrt{5}^-}f(m)=0{,}5$$

$$\lim_{m\to-1^-}f(m)=\lim_{m\to1^+}f(m)=+\infty \qquad \lim_{m\to-1^+}f(m)=\lim_{m\to1^-}f(m)=-\infty$$

Zatem w punkcie 0 jest maksimum lokalne, ale nie jest przyjmowana wartość największa funkcji. Aby ułatwić analizę otrzymanych wyników, zbudujmy tabelkę przebiegu zmienności funkcji f.

m	$\left(-\sqrt{5}, -1\right)$	-1	$(-1, 0)$	0	$(0, 1)$	1	$\left(1, \sqrt{5}\right)$
$f'(m)$	$+$	X	$+$	0	$-$	X	$-$
$f(m)$	$0{,}5 \nearrow +\infty$	X	$-\infty \nearrow$	-2 maksimum lokalne	$\searrow -\infty$	X	$+\infty \searrow 0{,}5$

Nie ma takiej liczby m, dla której suma dwóch różnych rozwiązań równania (*) byłaby największa.

Przykład 6.

Pewien zakład produkuje ozdobne okucia do drzwi. W ciągu tygodnia może wyprodukować do 300 okuć. Koszt (w złotych) wyprodukowania x okuć (w ciągu tygodnia) wyraża funkcja $K(x) = 0{,}002x^3 + 5x + 2916$, $D_K = (0, 300\rangle$. Cena sprzedaży 1 okucia zależy od liczby x sprzedawanych kontrahentowi sztuk. Opisuje ją funkcja $c(x) = 150 - 0{,}1x$, $D_c = (0, 300\rangle$.

a) Przy jakim poziomie tygodniowej produkcji średni koszt wyprodukowania okucia jest najniższy?

b) Przy jakim poziomie sprzedaży zakład osiągnie maksymalny tygodniowy dochód?

Ad a) Jeśli $K(x)$ oznacza koszt wyprodukowania x okuć, to średni koszt jednego okucia opisuje funkcja

$$k_1(x) = \frac{K(x)}{x}\text{, czyli}$$

$$k_1(x) = 0{,}002x^2 + 5 + \frac{2916}{x} \qquad D_{k_1} = (0, 300\rangle$$

Wyznaczymy najmniejszą wartość tej funkcji. Funkcja k_1 jest ciągła. Mamy:

$$k_1'(x) = 0{,}004x - \frac{2916}{x^2} \qquad D_{k_1'} = (0, 300)$$

$$k_1'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 90$$

$$k_1'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (90, 300)$$

$$k_1'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (0, 90)$$

W punkcie 90 jest minimum lokalne. Łatwo zauważyć, że jest tam również najmniejsza wartość funkcji k_1.

Średni koszt wyprodukowania okucia jest najniższy wtedy, gdy zakład wyprodukuje 90 okuć w ciągu tygodnia.

Ad b) Dochód $f(x)$ jest różnicą między wartością sprzedaży x okuć: $x \cdot c(x)$ a kosztami ich produkcji: $K(x)$. Tak więc

$$f(x) = x \cdot c(x) - K(x) = x(150 - 0{,}1x) - (0{,}002x^3 + 5x + 2916)$$

$$f(x) = -0{,}002x^3 - 0{,}1x^2 + 145x - 2916 \qquad D_f = (0, 300\rangle$$

Szukamy liczby x, dla której funkcja D przyjmuje największą wartość.
Funkcja D jest ciągła oraz

$$f'(x) = -0{,}006x^2 - 0{,}2x + 145 \qquad D_{f'} = (0, 300)$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow -0{,}006x^2 - 0{,}2x + 145 = 0$$

$$\Delta = 3{,}52$$

$$x_1 \approx 139{,}68 \qquad x_2 \approx -173{,}01 \qquad x_2 \notin D_{f'}$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (0, x_1)$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (x_1, +\infty)$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = -2916 \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$$

W punkcie x_1 jest maksimum lokalne. Ponieważ x_1 nie jest liczbą całkowitą, więc sprawdzamy wartości funkcji f dla dwóch liczb całkowitych „sąsiadujących" z x_1.

$$f(139) \approx 9935{,}67 \qquad f(140) = 9936$$

Zakład osiągnie maksymalny tygodniowy dochód, jeśli sprzeda 140 okuć.

UWAGA: Zauważ, że w przykładzie 6. dziedziny rozpatrywanych funkcji są przedziałami liczbowymi, mimo że nas interesują tylko liczby całkowite z tych przedziałów. Przyjęcie takiego modelu umożliwia zastosowanie metod rachunku pochodnych w rozwiązaniu zadania (czyli jest istotnym ułatwieniem, a nie utrudnieniem).

Sprawdź, czy rozumiesz

1. Pewna firma przewozi małą ciężarówką towar z miasta A do miasta B. Oba te miasta łączy autostrada, po której wolno się poruszać z prędkością nie mniejszą niż 50 km/h i nie większą niż 140 km/h. Firma obliczyła, że jeśli ciężarówka jedzie z prędkością x km/h, to zużycie paliwa wynosi $10 + \frac{x^2}{700}$ litrów na godzinę. Odbiorca towaru płaci kierowcy 30 zł za godzinę jazdy i zwraca mu koszt paliwa na trasie z A do B. Załóżmy, że cena 1 litra paliwa jest równa 5 zł. Oblicz, jaka jest optymalna średnia prędkość ciężarówki, przy której koszt ponoszony przez odbiorcę jest najmniejszy.

3. Geometria analityczna

Wektor w układzie współrzędnych. Współrzędne środka odcinka

W tym temacie powtórzymy i uzupełnimy wiadomości z klasy pierwszej dotyczące wektora w układzie współrzędnych.
Jeśli w układzie współrzędnych są dane punkty $A(x_A, y_A)$ i $B(x_B, y_B)$, to **wektorem** $\overrightarrow{AB}$ nazywamy uporządkowaną parę liczb $[x_B - x_A, y_B - y_A]$.

Liczby $x_B - x_A$ i $y_B - y_A$ są współrzędnymi wektora $\overrightarrow{AB}$. Znając współrzędne wektora, możemy obliczyć jego długość.

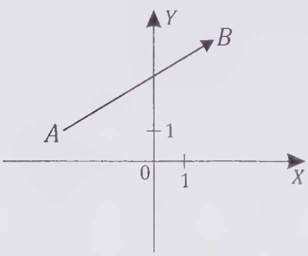
Przykład 1.

Dane są punkty: $A(-3, 1)$ i $B(2, 4)$. Wyznaczymy:

a) współrzędne wektora $\overrightarrow{AB}$

b) długość wektora $\overrightarrow{AB}$.

Przedstawimy wektor $\overrightarrow{AB}$ w układzie współrzędnych.



Ad a)

$$\overrightarrow{AB} = [2 - (-3), 4 - 1] = [5, 3]$$

Ad b)

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{5^2 + 3^2} = \sqrt{25 + 9} = \sqrt{34}$$

Jak zapewne pamiętasz, długość wektora $\overrightarrow{AB}$ jest równa długości odcinka AB, czyli $|\overrightarrow{AB}| = |AB|$.

Dwa wektory nazywamy **wektorami równymi** wtedy, gdy ich odpowiednie współrzędne są równe.
Wektorem zerowym nazywamy wektor, którego obie współrzędne są równe zeru. Wektor ten nie ma określonego zwrotu.

Przykład 2.

Dane są punkty: $A(-3, 1)$, $B(2, 4)$, $C(-1, -2)$. Wyznaczymy współrzędne punktu $D(x_D, y_D)$, dla którego wektory $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{CD}$ są równe.

$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$ $\qquad$ $\overrightarrow{CD} = [x_D - (-1), y_D - (-2)]$ $\qquad$ $\overrightarrow{AB} = [5, 3]$

Porównujemy współrzędne obu wektorów

$x_D - (-1) = 5 \quad \wedge \quad y_D - (-2) = 3$

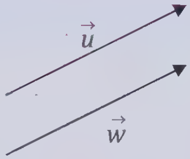
$x_D = 5 + (-1) = 4 \wedge y_D = 3 + (-2) = 1$

Wektory $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{CD}$ są równe wtedy, gdy $D(4, 1)$.

W klasie pierwszej poznałeś cechy wektorów równych. Przypomnijmy je:

Twierdzenie 1.

Jeśli wektory niezerowe $\vec{u}$ i $\vec{w}$ są równe, to wektory $\vec{u}$ i $\vec{w}$:
- są równoległe
- mają te same zwroty
- mają taką samą długość.



Prawdziwe jest również twierdzenie odwrotne do twierdzenia 1.

Twierdzenie 2.

Jeśli wektory niezerowe $\vec{u}$ i $\vec{w}$ są równoległe, mają te same zwroty i taką samą długość, to wektory $\vec{u}$ i $\vec{w}$ są równe.

W klasie pierwszej poznałeś następujące działania na wektorach: mnożenie wektora przez liczbę, dodawanie wektorów i odejmowanie wektorów.

Jeśli istnieje liczba a, $a \neq 0$, dla której

$\vec{u} = a \cdot \vec{w}$,

i wektory $\vec{u}$ i $\vec{w}$ są niezerowe, to wektory $\vec{u}$ i $\vec{w}$ nazywamy **wektorami równoległymi**.

Przykład 3.

Pomnożymy wektor $\vec{u} = [1, 3]$ przez liczbę -2.

$(-2) \cdot \vec{u} = -2 \cdot [1, 3] = [(-2) \cdot 1, (-2) \cdot 3] = [-2, -6]$

Wektor $(-2) \cdot \vec{u}$ jest równoległy do wektora $\vec{u}$.

Przykład 4.

Dane są wektory $\vec{u} = [-1, 3]$ i $\vec{w} = [-4, 1]$. Wyznaczymy wektor $\vec{u} + \vec{w}$.

$\vec{u} + \vec{w} = [-1, 3] + [-4, 1] = [-5, 4]$

Sumą wektorów $\vec{u}$ i $\vec{w}$ jest wektor $[-5, 4]$.

Wektory są przeciwne wtedy, gdy ich suma jest wektorem zerowym.

$\vec{u} + \vec{w} = [0, 0]$

Wektorem przeciwnym do wektora zerowego jest wektor zerowy.

Przykład 5.

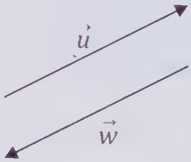
Wyznaczymy wektor $\vec{w}$, przeciwny do wektora $\vec{u} = [1, 3]$.

$[1, 3] + \vec{w} = [0, 0]$

$\vec{w} = [-1, -3]$

Twierdzenie 3.

Jeśli wektory niezerowe $\vec{u}$ i $\vec{w}$ są przeciwne, to wektory $\vec{u}$ i $\vec{w}$:
- są równoległe
- mają przeciwne zwroty
- mają taką samą długość.



Zauważ, że

$\vec{w} = -1 \cdot \vec{u}$

Wektor przeciwny do $\vec{u}$ oznaczamy jako $-\vec{u}$.

Można udowodnić twierdzenie odwrotne do twierdzenia 3.

Twierdzenie 4.

Jeśli wektory niezerowe $\vec{u}$ i $\vec{w}$ są równoległe, mają przeciwne zwroty i taką samą długość, to wektory $\vec{u}$ i $\vec{w}$ są przeciwne.

Omówimy jeszcze odejmowanie wektorów. Odjąć od wektora $\vec{u}$ wektor $\vec{w}$, to znaczy dodać do wektora $\vec{u}$ wektor przeciwny do wektora $\vec{w}$.

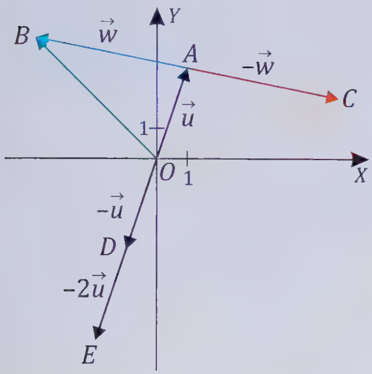
Przykład 6.

Dane są wektory $\vec{u} = [1, 3]$ i $\vec{w} = [-5, 1]$. Wyznaczymy wektor $\vec{u} - \vec{w}$.

$\vec{u} - \vec{w} = \vec{u} + \left(-\vec{w}\right) = [1, 3] + [5, -1] = [6, 2]$

Różnicą wektorów $\vec{u} - \vec{w}$ jest wektor [6, 2].

W poniższym układzie współrzędnych wektor $\vec{u} = [1, 3]$ ma początek w punkcie $O(0, 0)$ natomiast wektor $\vec{w} = [-5, 1]$ ma początek w końcu wektora $\vec{u}$, czyli w punkcie $A(1, 3)$. Punkt B jest końcem wektora $\vec{w}$. Punkty C, D, E mają współrzędne $C(6, 2)$, $D(-1, -3)$, $E(-2, -6)$.



Wówczas:

$\overrightarrow{OB} = \vec{u} + \vec{w}$

$\overrightarrow{OD} = -\vec{u}$

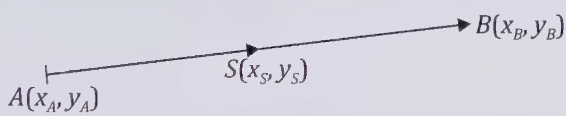
$\overrightarrow{OE} = -2 \cdot \vec{u}$

$\overrightarrow{AC} = -\vec{w}$

$\overrightarrow{OC} = \vec{u} - \vec{w}$

Korzystając z działań na wektorach, obliczymy współrzędne środka S odcinka AB, w zależności od współrzędnych końców tego odcinka A, B.

Załóżmy, że dane są różne punkty $A(x_A, y_A)$ i $B(x_B, y_B)$. Współrzędne środka S odcinka AB oznaczmy odpowiednio przez x_S i y_S. Rozpatrzmy wektory $\overrightarrow{AS}$ i $\overrightarrow{SB}$. Naszkicujmy odpowiedni rysunek (dla zwiększenia czytelności pominiemy osie układu współrzędnych).



Wektory te są równoległe, mają takie same zwroty oraz taką samą długość, więc są równe

$$\overrightarrow{AS} = \overrightarrow{SB}$$

Ponieważ

$$\overrightarrow{AS} = [x_S - x_A, y_S - y_A] \quad \text{i} \quad \overrightarrow{SB} = [x_B - x_S, y_B - y_S],$$

więc

$$x_S - x_A = x_B - x_S \quad \wedge \quad y_S - y_A = y_B - y_S$$

$$2x_S = x_A + x_B \;/ : 2 \quad \wedge \quad 2y_S = y_A + y_B \;/ : 2$$

$$x_S = \frac{x_A + x_B}{2} \quad \wedge \quad y_S = \frac{y_A + y_B}{2}$$

Zatem $S\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right)$.

Udowodniliśmy następujące twierdzenie.

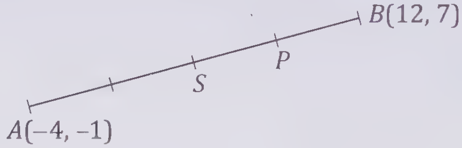
Twierdzenie 5.

Środkiem odcinka AB, gdzie $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$, jest punkt $S\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right)$.

Przykład 7.

Końcami odcinka AB są punkty $A(-4, -1)$ i $B(12, 7)$. Wyznaczymy punkt P należący do odcinka AB, dla którego $|AP| : |PB| = 3 : 1$.

Naszkicujmy rysunek pomocniczy, na którym P jest szukanym punktem, a S oznacza środek odcinka AB.



I sposób

Zauważamy, że punkt P jest środkiem odcinka SB. Zatem najpierw wyznaczamy współrzędne punktu S (środek odcinka AB), następnie współrzędne punktu P (środek odcinka SB).

$$S\left(\frac{-4+12}{2}, \frac{-1+7}{2}\right), \text{ czyli } S(4, 3)$$

$$P\left(\frac{4+12}{2}, \frac{3+7}{2}\right), \text{ czyli } P(8, 5)$$

Punkt P ma współrzędne $(8, 5)$.

II sposób

Warunek $|AP| : |PB| = 3 : 1$ jest równoważny równości

$$\overrightarrow{AP} = 3 \cdot \overrightarrow{PB}$$

Przyjmujemy oznaczenia $P(x_P, y_P)$ i otrzymujemy

$$\overrightarrow{AP} = [x_P - (-4), y_P - (-1)] = [x_P + 4, y_P + 1]$$

$$\overrightarrow{PB} = [12 - x_P, 7 - y_P], \quad \text{więc} \quad 3 \cdot \overrightarrow{PB} = [36 - 3x_P, 21 - 3y_P]$$

Równość wektorów $\overrightarrow{AP}$ i $3 \cdot \overrightarrow{PB}$ oznacza równość ich odpowiednich współrzędnych, więc

$$x_P + 4 = 36 - 3x_P \wedge y_P + 1 = 21 - 3y_P$$

$$x_P = 8 \quad \wedge \quad y_P = 5$$

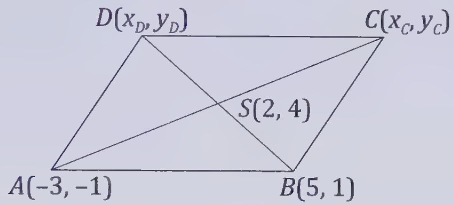
Punkt P ma współrzędne $(8, 5)$.

Rozwiązanie drugie okazało się trochę dłuższe od rozwiązania pierwszego, natomiast jest ono bardziej uniwersalne.

Przykład 8.

Wyznaczymy wierzchołki C, D równoległoboku $ABCD$, wiedząc, że $A(-3, -1)$, $B(5, 1)$, oraz znając punkt $S(2, 4)$ przecięcia przekątnych tego równoległoboku.

Przyjmujemy oznaczenia $C(x_C, y_C)$, $D(x_D, y_D)$ i szkicujemy rysunek.



Punkt S jest środkiem przekątnej AC. Zatem z ostatniego twierdzenia wynika, że

$$\frac{-3 + x_C}{2} = 2 \wedge \frac{-1 + y_C}{2} = 4$$

$x_C = 7 \wedge y_C = 9$, więc $C(7, 9)$

Punkt S jest również środkiem przekątnej BD, stąd

$$\frac{5 + x_D}{2} = 2 \wedge \frac{1 + y_D}{2} = 4$$

$x_D = -1 \wedge y_D = 7$, więc $D(-1, 7)$

Szukane wierzchołki równoległoboku to: $C(7, 9)$ i $D(-1, 7)$.

Sprawdź, czy rozumiesz

1. Dla jakich wartości parametrów m oraz n wektory $\vec{u} = [2m + 3, n - 6]$ i $\vec{w} = [m - 5, 3 - 2n]$ są:
   a) równe
   b) przeciwne?

2. Dane są wektory $\vec{u} = [-2, 1]$, $\vec{w} = [6, -2]$ oraz punkt $B(7, 1)$. Oblicz współrzędne punktu A, wiedząc, że $\overrightarrow{AB} = 0{,}5 \cdot \vec{w} - 3 \cdot \vec{u}$.

3. Punkt $S(-1, 3)$ jest środkiem w pewnej symetrii środkowej.
   a) Znajdź współrzędne punktu A_1, będącego obrazem punktu $A(-6, 4)$ w tej symetrii.
   b) Oblicz współrzędne punktu B, którego obrazem w symetrii środkowej względem punktu S jest punkt $B_1(-3, -1)$.

4. Odcinek AB o końcach $A(-5, -5)$ i $B(5, 0)$ podzielono na pięć odcinków równej długości. Oblicz współrzędne punktów podziału.

5. Oblicz współrzędne środka ciężkości trójkąta ABC, jeśli $A(-4, -4)$, $B(0, 4)$, $C(-5, 6)$.

Kąt między niezerowymi wektorami

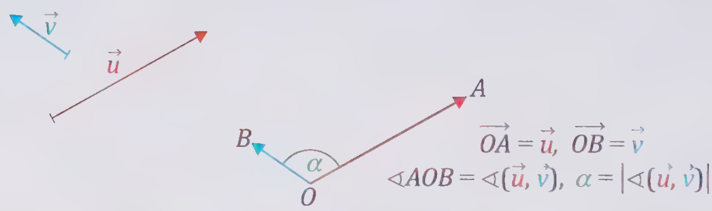
Dwa niezerowe wektory $\vec{u}$ i $\vec{v}$ o wspólnym początku wyznaczają na płaszczyźnie dwa kąty uzupełniające się do kąta pełnego. Jeden z tych kątów będziemy nazywać kątem między wektorami $\vec{u}$ i $\vec{v}$.

Definicja 1.

Niech dane będą niezerowe wektory $\vec{u}$ i $\vec{v}$.

Kątem utworzonym przez dwa wektory $\vec{u}$ i $\vec{v}$ (kątem wektorów $\vec{u}$ i $\vec{v}$) nazywamy kąt wypukły AOB, gdzie $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$ i $\overrightarrow{OB} = \vec{v}$. Kąt ten oznaczamy symbolem $\sphericalangle(\vec{u}, \vec{v})$.

Kąt utworzony przez dwa niezerowe wektory $\vec{u}$ i $\vec{v}$ przedstawia poniższy rysunek.



Dwa niezerowe równoległe wektory $\vec{u}$ i $\vec{v}$ mające zgodne zwroty tworzą kąt o mierze $0°$.

Dwa niezerowe równoległe wektory $\vec{u}$ i $\vec{v}$ mające zwroty przeciwne tworzą kąt o mierze $180°$.

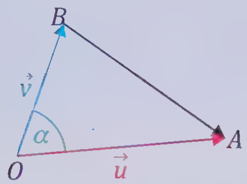
Twierdzenie 1.

Dwa niezerowe wektory $\vec{u} = [u_1, u_2]$, $\vec{v} = [v_1, v_2]$ tworzą taki kąt α, że

$$\cos\alpha = \frac{u_1v_1 + u_2v_2}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2} \cdot \sqrt{v_1^2 + v_2^2}} \qquad \sin\alpha = \frac{|u_1v_2 - u_2v_1|}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2} \cdot \sqrt{v_1^2 + v_2^2}}.$$

Dowód: Niech $\vec{u} = [u_1, u_2]$, $\vec{v} = [v_1, v_2]$ będą niezerowymi wektorami, takimi że $|\sphericalangle(\vec{u}, \vec{v})| = \alpha$.

Najpierw rozważmy przypadek, w którym wektory wyznaczają trójkąt, czyli $\alpha \in (0°, 180°)$.



$\overrightarrow{OA} = \vec{u},\ \overrightarrow{OB} = \vec{v},\ \alpha = |\sphericalangle(\vec{u}, \vec{v})|$

$\overrightarrow{BA} = \vec{u} - \vec{v}$

Z twierdzenia cosinusów dla trójkąta ABO mamy:

$|AB|^2 = |OA|^2 + |OB|^2 - 2 \cdot |OA| \cdot |OB| \cdot \cos\alpha,$ skąd

$$\cos\alpha = \frac{|OA|^2 + |OB|^2 - |AB|^2}{2 \cdot |OA| \cdot |OB|},$$ gdzie

$$|OA| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2} \qquad |OB| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} \qquad |AB| = \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2}$$

Otrzymujemy:

$$\cos\alpha = \frac{\left(\sqrt{u_1^2 + u_2^2}\right)^2 + \left(\sqrt{v_1^2 + v_2^2}\right)^2 - \left(\sqrt{(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2}\right)^2}{2 \cdot \sqrt{u_1^2 + u_2^2} \cdot \sqrt{v_1^2 + v_2^2}}$$

$$\cos\alpha = \frac{u_1^2 + u_2^2 + v_1^2 + v_2^2 - (u_1 - v_1)^2 - (u_2 - v_2)^2}{2 \cdot \sqrt{u_1^2 + u_2^2} \cdot \sqrt{v_1^2 + v_2^2}}$$

$$\cos\alpha = \frac{u_1^2 + u_2^2 + v_1^2 + v_2^2 - u_1^2 + 2u_1v_1 - v_1^2 - u_2^2 + 2u_2v_2 - v_2^2}{2 \cdot \sqrt{u_1^2 + u_2^2} \cdot \sqrt{v_1^2 + v_2^2}}$$

$$\cos\alpha = \frac{2(u_1v_1 + u_2v_2)}{2 \cdot \sqrt{u_1^2 + u_2^2} \cdot \sqrt{v_1^2 + v_2^2}}$$

$$\cos\alpha = \frac{u_1v_1 + u_2v_2}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2} \cdot \sqrt{v_1^2 + v_2^2}}$$

Teraz korzystamy z „jedynki trygonometrycznej”, aby wyznaczyć $\sin\alpha$. Mamy:

$$\sin^2\alpha = 1 - \left(\frac{u_1v_1 + u_2v_2}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2} \cdot \sqrt{v_1^2 + v_2^2}}\right)^2$$

$$\sin^2\alpha = 1 - \frac{u_1^2v_1^2 + 2u_1v_1u_2v_2 + u_2^2v_2^2}{(u_1^2 + u_2^2)(v_1^2 + v_2^2)}$$

$$\sin^2\alpha = \frac{(u_1^2v_1^2 + u_1^2v_2^2 + u_2^2v_1^2 + u_2^2v_2^2) - (u_1^2v_1^2 + 2u_1u_2v_1v_2 + u_2^2v_2^2)}{(u_1^2 + u_2^2)(v_1^2 + v_2^2)}$$

$$\sin^2\alpha = \frac{u_1^2v_2^2 - 2u_1u_2v_1v_2 + u_2^2v_1^2}{(u_1^2 + u_2^2)(v_1^2 + v_2^2)},$$ czyli $$\sin^2\alpha = \frac{(u_1v_2 - u_2v_1)^2}{(u_1^2 + u_2^2)(v_1^2 + v_2^2)}$$

Ponieważ $\alpha \in (0°, 180°)$, więc $\sin\alpha > 0$; stąd

$$\sin\alpha = \sqrt{\frac{(u_1v_2 - u_2v_1)^2}{(u_1^2+u_2^2)(v_1^2+v_2^2)}}$$

$$\sin\alpha = \frac{|u_1v_2 - u_2v_1|}{\sqrt{u_1^2+u_2^2}\cdot\sqrt{v_1^2+v_2^2}}$$

Teraz sprawdzimy, czy udowodnione wzory są prawdziwe wtedy, gdy $\alpha = 0°$ oraz $\alpha = 180°$ (czyli w przypadku, gdy wektory są równoległe). Wówczas dla pewnej liczby rzeczywistej k mamy:

$\vec{u} = k\cdot\vec{v}$ ($k > 0$, jeśli $\alpha = 0°$ oraz $k < 0$, jeśli $\alpha = 180°$); zatem

$[u_1, u_1] = k\cdot[v_1, v_2]$, czyli $u_1 = k\cdot v_1$ i $u_2 = k\cdot v_2$.

Mamy:

$$\sin\alpha = \frac{|u_1v_2 - u_2v_1|}{\sqrt{u_1^2+u_2^2}\cdot\sqrt{v_1^2+v_2^2}} = \frac{|kv_1v_2 - kv_2v_1|}{\sqrt{(kv_1)^2+(kv_2)^2}\cdot\sqrt{v_1^2+v_2^2}} = 0$$

Z drugiej strony wiemy, że jeśli $\alpha = 0°$ lub $\alpha = 180°$, to $\sin\alpha = 0$.

$$\cos\alpha = \frac{u_1v_1 + u_2v_2}{\sqrt{u_1^2+u_2^2}\cdot\sqrt{v_1^2+v_2^2}} = \frac{kv_1^2 + kv_2^2}{|k|\cdot(v_1^2+v_2^2)} = \frac{k\cdot(v_1^2+v_2^2)}{|k\cdot(v_1^2+v_2^2)|} = \frac{k}{|k|}$$

Jeśli $\alpha = 0°$, to $k > 0$ i $\cos\alpha = \frac{k}{k} = 1$; z drugiej strony $\cos 0° = 1$. Jeśli $\alpha = 180°$, to $k < 0$ i $\cos\alpha = \frac{k}{-k} = -1$; z drugiej strony $\cos 180° = -1$.

Zatem wzory są prawdziwe dla każdego kąta wypukłego utworzonego przez niezerowe wektory $\vec{u}$ i $\vec{v}$.

Przykład 1.

Wierzchołki trójkąta ABC mają współrzędne: $A\left(\frac{2\sqrt{6}-3\sqrt{2}}{2}, \frac{-\sqrt{6}}{2}\right)$, $B(0, 0)$, $C\left(\frac{-3\sqrt{2}}{2}, \frac{-3\sqrt{6}}{2}\right)$.

Obliczymy:

a) miary kątów trójkąta ABC,
b) pole trójkąta ABC,
c) promień koła opisanego na trójkącie ABC.

Ad a) Obliczamy współrzędne i długość wektorów: $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AC}$ oraz $\overrightarrow{BA}$ i $\overrightarrow{BC}$. Mamy:

$$\overrightarrow{AB}=\left[0-\frac{2\sqrt{6}-3\sqrt{2}}{2},\ 0-\left(\frac{-\sqrt{6}}{2}\right)\right]=\left[\frac{3\sqrt{2}-2\sqrt{6}}{2},\ \frac{\sqrt{6}}{2}\right]$$

$$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{\left(\frac{3\sqrt{2}-2\sqrt{6}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2}=\sqrt{12-6\sqrt{3}}=\sqrt{\left(3-\sqrt{3}\right)^2}=\left|3-\sqrt{3}\right|=3-\sqrt{3}$$

$$\overrightarrow{AC}=\left[\frac{-3\sqrt{2}}{2}-\frac{2\sqrt{6}-3\sqrt{2}}{2},\ \frac{-3\sqrt{6}}{2}-\left(-\frac{\sqrt{6}}{2}\right)\right]=\left[-\sqrt{6},-\sqrt{6}\right]$$

$$|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{\left(-\sqrt{6}\right)^2+\left(-\sqrt{6}\right)^2}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$$

$$\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{AB}=\left[\frac{2\sqrt{6}-3\sqrt{2}}{2},\ -\frac{\sqrt{6}}{2}\right] \qquad |\overrightarrow{BA}|=|\overrightarrow{AB}|=3-\sqrt{3}$$

$$\overrightarrow{BC}=\left[-\frac{3\sqrt{2}}{2},\ -\frac{3\sqrt{6}}{2}\right] \qquad |\overrightarrow{BC}|=\sqrt{\left(-\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(-\frac{3\sqrt{6}}{2}\right)^2}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$$

Zauważ, że $|BC|>|AC|>|AB|$. Obliczamy cosinusy kątów: $\sphericalangle CAB$ oraz $\sphericalangle ABC$. Oznaczmy: $|\sphericalangle CAB|=\alpha$, $|\sphericalangle ABC|=\beta$. Mamy:

$$\cos\alpha=\frac{\left(-\sqrt{6}\right)\cdot\left(\frac{3\sqrt{2}-2\sqrt{6}}{2}\right)+\left(-\sqrt{6}\right)\cdot\frac{\sqrt{6}}{2}}{2\sqrt{3}\cdot\left(3-\sqrt{3}\right)}=\frac{-3\sqrt{3}+3}{2\cdot\left(3\sqrt{3}-3\right)}=-\frac{1}{2},\text{ więc }\alpha=120^\circ$$

$$\cos\beta=\frac{\left(\frac{2\sqrt{6}-3\sqrt{2}}{2}\right)\cdot\left(\frac{-3\sqrt{2}}{2}\right)+\left(\frac{-\sqrt{6}}{2}\right)\cdot\left(\frac{-3\sqrt{6}}{2}\right)}{\left(3-\sqrt{3}\right)\cdot3\sqrt{2}}=\frac{-3\sqrt{3}+9}{\left(3-\sqrt{3}\right)\cdot3\sqrt{2}}=$$

$$=\frac{3\left(3-\sqrt{3}\right)}{\left(3-\sqrt{3}\right)\cdot3\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2},\text{ czyli }\beta=45^\circ$$

Obliczamy miarę trzeciego kąta w trójkącie ABC:

$$180^\circ-(120^\circ+45^\circ)=15^\circ$$

Miary kątów trójkąta ABC są równe: 120°, 45° i 15°.

Ad b) Pole trójkąta ABC obliczamy, korzystając ze wzoru $P_{ABC}=\frac{1}{2}\cdot|AB|\cdot|AC|\cdot\sin\alpha$. Mamy:

$$P_{ABC}=\frac{1}{2}\cdot\left(3-\sqrt{3}\right)\cdot2\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\left(3-\sqrt{3}\right)}{2}$$

Pole trójkąta ABC jest równe $1{,}5\left(3-\sqrt{3}\right)$.

Ad c) Promień R koła opisanego na trójkącie ABC obliczymy, korzystając z twierdzenia sinusów.

$$R = \frac{|CB|}{2\sin\alpha} = \frac{3\sqrt{2}}{2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{6}$$

Promień koła opisanego na trójkącie ABC jest równy $\sqrt{6}$.

Dwa niezerowe wektory $\vec{u} = [u_1, u_2]$ i $\vec{v} = [v_1, v_2]$ będziemy nazywać **wektorami prostopadłymi** $(\vec{u} \perp \vec{v})$ wtedy, gdy kąt między tymi wektorami będzie prosty. Wówczas

$$\cos\left(\sphericalangle\left(\vec{u}, \vec{v}\right)\right) = 0, \quad \text{czyli} \quad \frac{u_1v_1 + u_2v_2}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|} = 0, \text{ skąd}$$

(*) $u_1v_1 + u_2v_2 = 0$

I odwrotnie:
Jeśli współrzędne niezerowych wektorów $\vec{u}$ i $\vec{v}$ spełniają warunek (*), to znaczy, że cosinus kąta między tymi wektorami jest równy 0, czyli wektory $\vec{u}$ i $\vec{v}$ są prostopadłe. Zauważmy, że warunek (*) będzie spełniony również wtedy, gdy co najmniej jeden z wektorów $\vec{u}$ i $\vec{v}$ będzie wektorem zerowym. Można więc rozszerzyć określenie prostopadłości wektorów na przypadek wektora zerowego, przyjmując, że wektor zerowy jest prostopadły do dowolnego wektora.

Podobnie, jeśli dwa niezerowe wektory $\vec{u}$ i $\vec{v}$ są równoległe $(\vec{u} \parallel \vec{v})$, to

$$\sin\left(\sphericalangle\left(\vec{u}, \vec{v}\right)\right) = 0, \text{ czyli } \frac{u_1v_2 - u_2v_1}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|} = 0, \text{ skąd}$$

(**) $u_1v_2 - u_2v_1 = 0$

I odwrotnie:
Jeśli współrzędne niezerowych wektorów $\vec{u}$ i $\vec{v}$ spełniają warunek (**), to znaczy, że sinus kąta między tymi wektorami jest równy 0, czyli wektory $\vec{u}$ i $\vec{v}$ są równoległe. Zauważmy, że warunek (**) będzie spełniony również wtedy, gdy co najmniej jeden z wektorów $\vec{u}$ i $\vec{v}$ będzie wektorem zerowym. Można więc rozszerzyć określenie równoległości wektorów na przypadek wektora zerowego, przyjmując, że wektor zerowy jest równoległy do dowolnego wektora.

Prawdziwe jest twierdzenie.

Twierdzenie 2.
Jeśli $\vec{u} = [u_1, u_2]$ i $\vec{v} = [v_1, v_2]$, to:
a) $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow u_1v_1 + u_2v_2 = 0$ b) $\vec{u} \parallel \vec{v} \Leftrightarrow u_1v_2 - u_2v_1 = 0$

Przykład 2.

Wykażemy, że czworokąt $ABCD$, gdzie $A(1, 1)$, $B(-4, -2)$, $C(-7, -7)$, $D(-2, -4)$, jest rombem.

Wystarczy pokazać, że:
1° przekątne AC i BD czworokąta $ABCD$ przecinają się w punkcie, który dzieli je na połowy
2° przekątne czworokąta $ABCD$ są prostopadłe.
Ad 1° Niech S_{AC} oznacza środek przekątnej AC, S_{BD} – środek przekątnej BD. Obliczamy:

$$S_{AC}\left(\frac{1+(-7)}{2}, \frac{1+(-7)}{2}\right), \text{ czyli } S_{AC}(-3,-3)$$

$$S_{BD}\left(\frac{-4+(-2)}{2}, \frac{-2+(-4)}{2}\right), \text{ czyli } S_{BD}(-3,-3), \text{ więc}$$

$$S_{AC} = S_{BD}$$

Przekątne czworokąta $ABCD$ przecinają się w punkcie, który dzieli je na połowy; czworokąt jest więc równoległobokiem.
Ad 2° Obliczamy współrzędne wektorów $\overrightarrow{AC}$ i $\overrightarrow{BD}$.

$$\overrightarrow{AC} = [-7-1, -7-1] = [-8,-8]$$

$$\overrightarrow{BD} = [-2-(-4), -4-(-2)] = [2,-2]$$

Korzystamy z twierdzenia 2b.

$$-8 \cdot 2 + (-8) \cdot (-2) = -16 + 16 = 0, \text{ zatem}$$

$$\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BD}$$

Przekątne równoległoboku są prostopadłe, więc ten równoległobok jest rombem.

Sprawdź, czy rozumiesz

1. Oblicz cosinusy kątów wewnętrznych trójkąta ABC, jeśli $A(1, -1)$, $B(6, 4)$, $C(-5, 2)$.
2. Dane są wektory $\vec{u} = [-2a+5, a+2]$ i $\vec{v} = [2a-1, 3a+6]$, gdzie $a \in \mathbf{R}$. Wyznacz wartość parametru a tak, aby wektory $\vec{u}$ i $\vec{v}$ były równoległe.
3. Dane są wektory $\vec{u} = [3b-4, b]$ i $\vec{v} = [-2b+3, b+2]$, gdzie $b \in \mathbf{R}$. Wyznacz wartość parametru b tak, aby wektory $\vec{u}$ i $\vec{v}$ były prostopadłe.
4. Dane są wektory $\vec{u} = [-5, 3]$, $\vec{v} = [2, -1]$, $\vec{p} = [1, 4]$. Wykaż, że jeśli wektory $\vec{u} + a \cdot \vec{v}$ i $\vec{p}$ są prostopadłe, to $a = 3{,}5$.

Równanie kierunkowe prostej

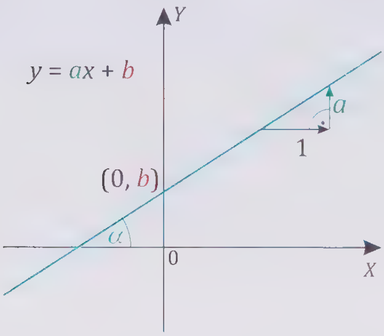
W klasie drugiej dowiedziałeś się, że wzór funkcji liniowej jest równaniem pewnej prostej na płaszczyźnie. Równanie to ma postać:

$$y = ax + b$$

Współczynnik a nazywamy współczynnikiem kierunkowym, współczynnik b – wyrazem wolnym. W rozdziale 2. zdefiniowaliśmy równanie kierunkowe prostej. Przypomnimy tę definicję i omówimy teraz szczegółowo zastosowanie tego równania.

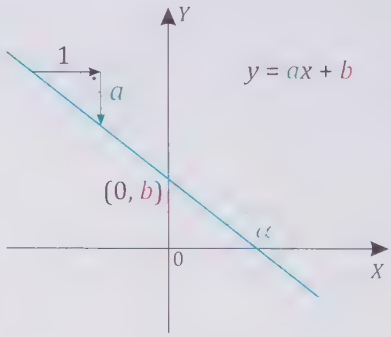
Definicja 1.
Równaniem kierunkowym prostej nazywamy równanie mające postać $y = ax + b$.

Wiesz już, że współczynnik kierunkowy określa kąt nachylenia prostej do osi OX (mówiąc dokładniej: jest równy tangensowi kąta nachylenia prostej do osi OX), natomiast wyraz wolny wyznacza punkt przecięcia prostej z osią OY.



$a = \operatorname{tg}\alpha$

$a > 0, \quad \alpha \in (0°, 90°)$



$a = \operatorname{tg}\alpha$

$a < 0, \quad \alpha \in (90°, 180°)$

Szczególnym przypadkiem równania kierunkowego jest równanie mające postać $y = b$ $(a = 0)$. Równanie to opisuje prostą równoległą do osi OX. Przyjmujemy, że prosta opisana tym równaniem jest nachylona do osi OX pod kątem $0°$. Wówczas mamy:

$$a = \operatorname{tg} 0° = 0$$

Wyznaczymy równanie prostej, wiedząc, że współczynnik kierunkowy tej prostej jest równy a i do jej wykresu należy punkt o współrzędnych (x_1, y_1).

Szukane równanie prostej możemy zapisać następująco:

$$y = ax + b$$

Wyliczamy b.

$y_1 = ax_1 + b$, skąd

$b = y_1 - ax_1$

Zatem

$y = ax + y_1 - ax_1$

Równanie to wygodnie jest zapisać w postaci

$y - y_1 = a(x - x_1)$

Wniosek: Równanie prostej, której współczynnik kierunkowy jest równy a i do której należy punkt o współrzędnych (x_1, y_1), można zapisać w postaci

$y - y_1 = a(x - x_1)$

Przykład 1.

Napiszemy równanie prostej nachylonej do osi OX pod kątem 135° i przechodzącej przez punkt o współrzędnych $(5, -7)$.

Obliczamy współczynnik kierunkowy.

$\text{tg}\,135° = \text{tg}(180° - 45°) = -\text{tg}\,45° = -1$

Stosujemy wzór z ostatniego wniosku.

$y - (-7) = -1(x - 5)$,

czyli

$y + 7 = -x + 5$,

skąd

$y = -x - 2$

Szukane równanie prostej jest następujące: $y = -x - 2$.

Omówimy teraz równanie prostej przechodzącej przez dwa punkty o współrzędnych (x_1, y_1) i (x_2, y_2), gdzie $x_1 \neq x_2$ (warunek $x_1 \neq x_2$ znaczy, że rozpatrywana prosta nie jest równoległa do osi OY).

Współczynnik kierunkowy prostej – jak zapewne pamiętasz z klasy drugiej – jest równy

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Stosujemy równanie prostej z ostatniego wniosku i otrzymujemy:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

Wniosek: Równanie prostej przechodzącej przez dwa punkty o współrzędnych (x_1, y_1) i (x_2, y_2), gdzie $x_1 \neq x_2$, można zapisać w postaci

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

Przykład 2.

Wyznaczymy równanie prostej przechodzącej przez dwa punkty o współrzędnych $(-12, 15)$ i $(-14, 35)$, a następnie wyznaczymy kąt nachylenia tej prostej do osi OX (z dokładnością do jednego stopnia).

Obliczamy współczynnik kierunkowy prostej.

$$\frac{35 - 15}{-14 - (-12)} = \frac{20}{-2} = -10$$

Zapisujemy równanie prostej, korzystając z drugiego wniosku.

$$y - 15 = -10[x - (-12)],$$

skąd

$$y - 15 = -10(x + 12)$$

$$y - 15 = -10x - 120$$

$$y = -10x - 105$$

Wyznaczamy kąt α nachylenia prostej do osi OX. Wiemy, że

$$\operatorname{tg} \alpha = -10$$

Zatem α jest kątem rozwartym. Szukamy najpierw (w tablicach lub za pomocą kalkulatora) takiego kąta ostrego α_1, dla którego

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = 10$$

Otrzymujemy

$$\alpha_1 \approx 84°$$

Zatem

$$\alpha = 180° - \alpha_1,$$

czyli

$$\alpha \approx 96°$$

Szukaną prostą opisuje równanie $y = \ \ 10x \ \ 105$. Jest ona nachylona do osi OX pod kątem ok. 96°.

Przykład 3.

Wyznaczymy równanie prostej l przechodzącej przez punkt $A(-6, 7)$, która tworzy z osią odciętych kąt o mierze dwa razy większej od kąta, jaki tworzy z tą osią prosta k o równaniu $y = 2x + 9$.

Prosta k jest nachylona do osi OX pod takim kątem α, że tg $\alpha = 2$. Prosta l tworzy z osią odciętych kąt β, gdzie $\beta = 2\alpha$. Obliczymy współczynnik kierunkowy prostej l, korzystając ze wzoru:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

Mamy:

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{2 \cdot 2}{1 - 2^2} = -\frac{4}{3}$$

Równanie prostej l możemy zapisać w postaci

$$y = -\frac{4}{3}x + b$$

Punkt $A(-6, 7)$ należy do prostej l, więc

$$7 = -\frac{4}{3} \cdot (-6) + b, \text{ skąd}$$

$$b = -1$$

Szukaną prostą opisuje równanie $y = -\frac{4}{3}x - 1$.

Sprawdź, czy rozumiesz

1. Wyznacz równanie kierunkowe prostej przechodzącej przez punkt $P(-1, 1)$ i nachylonej do osi OX pod kątem:

   a) $45°$ b) $30°$ c) $60°$

2. Wyznacz równanie kierunkowe prostej przechodzącej przez punkt P i nachylonej do osi OX pod kątem α, jeśli:

   a) $P(2, -4)$, $\alpha = 120°$ b) $P(-1, 7)$, $\alpha = 150°$ c) $P(3, 5)$ i tg $\alpha = -2$.

3. Wyznacz równanie prostej l przechodzącej przez punkt $P(-5, 16)$, która tworzy z osią odciętych kąt o mierze dwa razy większej od kąta, jaki tworzy z tą osią prosta k o równaniu $y = \frac{2}{3}x - 1$.

4. Dwa wierzchołki trójkąta równobocznego ABC znajdują się na paraboli o równaniu $y = x^2 - 4x + 7$, zaś trzecim wierzchołkiem trójkąta jest wierzchołek paraboli. Wyznacz współrzędne wierzchołków tego trójkąta.

Równanie ogólne prostej

Nie każdą prostą w układzie współrzędnych można opisać równaniem kierunkowym. Takim równaniem nie można opisać prostych prostopadłych do osi OX (dlaczego?).
Omówimy teraz taki typ równania, którym możemy opisać dowolną prostą w układzie współrzędnych. Zauważ, że równanie kierunkowe prostej $y = 3x - 5$ możemy zapisać w równoważnej postaci następująco: $y - 3x + 5 = 0$ lub $3x - y - 5 = 0$. Uporządkujmy te równania tak, aby na początku występował wyraz zawierający x, następnie wyraz zawierający y, na końcu zaś – wyraz wolny. Otrzymujemy wówczas równania $-3x + y + 5 = 0$ lub $3x - y - 5 = 0$. Przyjrzyjmy się bliżej współczynnikom przy x i przy y, a dokładniej: utwórzmy wektor, którego współrzędne będą równe odpowiednim współczynnikom. Otrzymujemy wtedy wektory $[-3, 1]$, $[3, -1]$. Narysuj w prostokątnym układzie współrzędnych rozważaną prostą, a następnie dowolny wektor o współrzędnych $[-3, 1]$ i wektor o współrzędnych $[3, -1]$. Na pewno zauważyłeś, że wektory te są prostopadłe do danej prostej. Przeprowadź podobne ćwiczenie dla prostej o równaniu $y = 0{,}5x + 7$.

Definicja 1.

Równaniem ogólnym prostej nazywamy równanie mające postać $Ax + By + C = 0$, gdzie $A^2 + B^2 \neq 0$.

Warunek $A^2 + B^2 \neq 0$ oznacza, że współczynniki A oraz B nie mogą być jednocześnie równe zeru.

Każde równanie prostej zapisane w postaci kierunkowej łatwo jest zapisać w postaci ogólnej.

kierunkowa postać równania prostej ($y = ax + b$)	ogólna postać równania prostej ($Ax + By + C = 0$)
$y = 2x - 1$ ($a = 2, b = -1$)	$-2x + y + 1 = 0$ ($A = -2, B = 1, C = 1$)
$y = -4x$ ($a = -4, b = 0$)	$4x + y = 0$ ($A = 4, B = 1, C = 0$)
$y = 6$ ($a = 0, b = 6$)	$y - 6 = 0$ ($A = 0, B = 1, C = -6$)
$y = 0$ ($a = 0, b = 0$)	$y = 0$ ($A = 0, B = 1, C = 0$)

Zauważ, że prosta może być opisana wieloma równaniami mającymi postać $Ax + By + C = 0$, gdzie $A^2 + B^2 \neq 0$.

Tę samą prostą opisują równania:

$$2x - y + 3 = 0, \quad 4x - 2y + 6 = 0, \quad -10x + 5y - 15 = 0, \quad \frac{1}{3}x - \frac{1}{6}y + \frac{1}{2} = 0.$$

Są to równania równoważne.

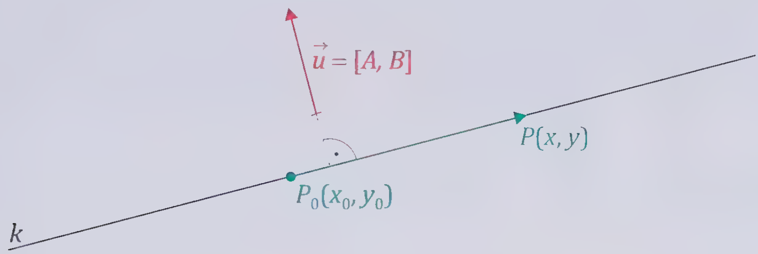
Twierdzenie 1.

Prostą przechodzącą przez punkt $P_0(x_0, y_0)$ oraz prostopadłą do niezerowego wektora $\vec{u} = [A, B]$ można opisać równaniem $Ax + By + C = 0$, gdzie $C = -Ax_0 - By_0$.

Założenie: k – prosta w prostokątnym układzie współrzędnych, $P_0 \in k$, gdzie $P_0(x_0, y_0)$, $\vec{u} = [A, B]$, $A^2 + B^2 \neq 0$ i $\vec{u} \perp k$

Teza: k: $Ax + By + C = 0$, gdzie $C = -Ax_0 - By_0$

Dowód: Zauważ, że punkt $P(x, y)$ należy do prostej k wtedy i tylko wtedy, gdy $\overrightarrow{P_0P} \perp \vec{u}$.



Współrzędne wektora $\overrightarrow{P_0P}$ są równe $[x - x_0, y - y_0]$. Na mocy twierdzenia 2a ze str. 196 otrzymujemy

$$(x - x_0) \cdot A + (y - y_0) \cdot B = 0, \text{ czyli}$$

$$Ax + By - Ax_0 - By_0 = 0$$

Oznaczamy

$$C = -Ax_0 - By_0$$

Zatem punkt $P(x, y)$ należy do prostej k wtedy i tylko wtedy, gdy jego współrzędne spełniają równanie $Ax + By + C = 0$, co kończy dowód twierdzenia.

Zauważ, że w równaniu ogólnym prostej współczynniki A i B są współrzędnymi wektora prostopadłego do tej prostej. Zatem do znalezienia równania ogólnego prostej wystarczy znać współrzędne dowolnego wektora prostopadłego do tej prostej oraz współrzędne dowolnego punktu należącego do tej prostej.

Przykład 1.

Wyznaczymy równanie ogólne prostej k przechodzącej przez punkt $P(-12, 9)$, wiedząc, że wektor $\vec{u} = [2, -3]$ jest prostopadły do prostej k.

Szukamy równania prostej k w postaci

$$Ax + By + C = 0$$

Wiemy, że $\vec{u} \perp k$, zatem

$A = 2$ oraz $B = -3$, więc

$$2x - 3y + C = 0$$

Wyraz wolny C obliczamy, korzystając z faktu, że $P \in k$, zatem

$2 \cdot (-12) - 3 \cdot 9 + C = 0$, czyli

$$C = 51$$

Prosta k ma równanie $2x - 3y + 51 = 0$.

Powstaje pytanie, czy równaniem ogólnym można opisać dowolną prostą w układzie współrzędnych. Okazuje się, że tak.

Przykład 2.

Napiszemy równanie ogólne prostej k prostopadłej do osi OX przechodzącej przez punkt $P(-4, 1)$.

Weźmy niezerowy wektor $\vec{u}$ prostopadły do prostej k, na przykład $\vec{u} = [-2, 0]$. Wówczas równanie prostej ma postać

$$-2 \cdot x + 0 \cdot y + C = 0$$

Punkt $P(-4, 1)$ należy do szukanej prostej, więc

$-2 \cdot (-4) + 0 \cdot 1 + C = 0$, skąd

$$C = -8$$

Otrzymujemy

$-2x + 0 \cdot y - 8 = 0 \quad /:(-2)$,

czyli

$$x + 4 = 0$$

Prostą k opisuje równanie $x + 4 = 0$.

Podobnie możemy znaleźć równanie dowolnej prostej prostopadłej do osi OX. Równanie to będzie miało postać $Ax + C = 0$, gdzie $A \neq 0$.

Wiesz już, że równanie kierunkowe prostej możemy zawsze sprowadzić do równania ogólnego. Natomiast równanie ogólne prostej $Ax + By + C = 0$ można przedstawić w postaci kierunkowej wtedy i tylko wtedy, gdy $B \neq 0$.

Przykład 3.

Wyznaczymy równanie ogólne prostej przechodzącej przez punkty:

a) (1, 2) i (–4, 1); b) (2, 3) i (2, –5).

Ad a) I sposób

Korzystamy bezpośrednio z równania ogólnego prostej.
Szukamy równania prostej przechodzącej przez punkty (1, 2) i (–4, 1), które ma postać

$$Ax + By + C = 0$$

Wstawiając odpowiednio współrzędne punktów w miejsca x oraz y, otrzymujemy układ dwóch równań z trzema niewiadomymi:

$$\begin{cases} A + 2B + C = 0 \\ -4A + B + C = 0 \quad (*) \end{cases}$$

Wyznaczamy dwie niewiadome w zależności od trzeciej (np. wyznaczamy B i C w zależności od A). Jeśli od pierwszego równania odejmiemy drugie, to otrzymamy

$5A + B = 0$, skąd

$B = -5A$

Do jednego z równań układu (np. do równania (*)) w miejsce B wstawimy $-5A$ i wyznaczymy wówczas C w zależności od A.

$-4A - 5A + C = 0$, więc

$C = 9A$

Otrzymaliśmy:

$$\begin{cases} B = -5A \\ C = 9A \end{cases}, \quad \text{gdzie } Ax + By + C = 0$$

Zatem

$Ax - 5Ay + 9A = 0 \quad /: A$ (zauważ, że $A \neq 0$; gdyby $A = 0$, to również $B = 0$, a to byłoby sprzeczne z definicją równania ogólnego prostej)

$x - 5y + 9 = 0$ – szukane równanie prostej

II sposób

Zauważmy, że punkty (1, 2) i (–4, 1) nie wyznaczają prostej prostopadłej do osi OX. Szukamy równania prostej przechodzącej przez punkty (1, 2) i (–4, 1). Mamy

$$y - 2 = \frac{1-2}{-4-1}(x - 1)$$

$y - 2 = \frac{1}{5}(x - 1)$, skąd

$$y = \frac{1}{5}x + \frac{9}{5}$$

Następnie zapisujemy równanie prostej w postaci ogólnej.

$$\frac{1}{5}x - y + \frac{9}{5} = 0 \text{ – szukane równanie prostej}$$

Ad b) I sposób
Prosta przechodzi przez punkty (2, 3) i (2, -5). Szukamy jej równania $Ax + By + C = 0$. Otrzymujemy układ równań.

$$\begin{cases} 2A + 3B + C = 0 \\ 2A - 5B + C = 0 \end{cases}, \quad \text{skąd} \quad \begin{cases} B = 0 \\ C = -2A \end{cases}$$

Wyznaczamy równanie ogólne prostej.

$$Ax + 0y - 2A = 0$$

$$Ax - 2A = 0 \quad /: A, A \neq 0$$

$$x - 2 = 0 \quad \text{– szukane równanie prostej}$$

II sposób
Zauważamy, że prosta wyznaczona przez punkty (2, 3) i (2, –5) jest zbiorem wszystkich punktów, których pierwsza współrzędna jest równa 2. Zatem prosta ma równanie $x = 2$, co możemy zapisać w postaci równania ogólnego

$$x - 2 = 0$$

UWAGA: Nie istnieje równanie kierunkowe prostej $x - 2 = 0$. Próba wyznaczenia równania kierunkowego prostej przechodzącej przez punkty (2, 3) i (2, –5) prowadzi do sprzecznego układu równań.

Przykład 4.

Wyznaczymy równanie ogólne prostej, w której zawiera się bok ML trójkąta KLM, jeśli wiadomo, że $K(-6, -2)$, $\overrightarrow{KL} = [10, 1]$ i środkowe trójkąta przecinają się w punkcie $E(0, 0)$.

Najpierw obliczymy współrzędne wierzchołka L. Przyjmijmy oznaczenia: $L(x_L, y_L)$. Mamy:

$$\overrightarrow{KL} = [x_L + 6, y_L + 2] \text{ i } \overrightarrow{KL} = [10, 1]$$

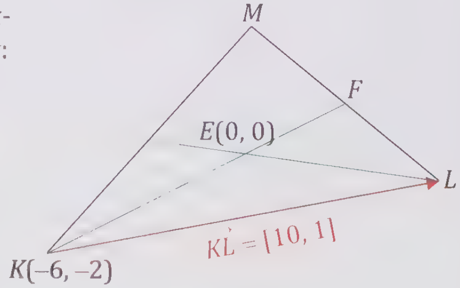
Zatem

$$[x_L + 6, y_L + 2] = [10, 1]$$

$$x_L + 6 = 10 \text{ i } y_L + 2 = 1$$

$$x_L = 4 \text{ i } y_L = -1$$

Wierzchołek L ma współrzędne (4, –1).



Środkowe w trójkącie dzielą się w stosunku 2 : 1 (licząc od wierzchołka), zatem
$\overrightarrow{KE} = 2 \cdot \overrightarrow{EF}$, gdzie F jest środkiem boku ML (zobacz rysunek).

Oznaczamy współrzędne punktu F jako (x_F, y_F) i obliczamy współrzędne wektorów $\overrightarrow{KE}$ i $\overrightarrow{EF}$. Mamy:

$\overrightarrow{KE} = [6, 2]$ oraz $\overrightarrow{EF} = [x_F, y_F]$.

Ponieważ $\overrightarrow{KE} = 2 \cdot \overrightarrow{EF}$, otrzymujemy:

$[6, 2] = 2 \cdot [x_F, y_F]$

$[6, 2] = [2x_F, 2y_F]$, skąd

$x_F = 3$ i $y_F = 1$, czyli

$F(3, 1)$

Wyznaczamy równanie ogólne prostej FL przechodzącej przez punkty $F(3, 1)$ i $L(4, -1)$.
Szukamy równania prostej postaci $Ax + By + C = 0$, gdzie $A^2 + B^2 \neq 0$.
Otrzymujemy:

$$+\begin{cases} 3A + B + C = 0 \\ 4A - B + C = 0 \end{cases}$$

$$7A + 2C = 0$$

$$C = -3{,}5A$$

Ale $B = -3A - C$, czyli

$B = -3A + 3{,}5A = 0{,}5A$

Równanie prostej ma postać

$Ax + 0{,}5Ay - 3{,}5A = 0$, skąd

$x + 0{,}5y - 3{,}5 = 0$, czyli

$2x + y - 7 = 0$

Bok ML trójkąta KLM zawiera się w prostej o równaniu $2x + y - 7 = 0$.

Sprawdź, czy rozumiesz

1. Napisz równanie ogólne prostej, wyznaczonej przez dwa punkty P, Q, jeśli:
   a) $P(-4, 7)$, $Q(4, -3)$ b) $P(6, -5)$, $Q(-1, -5)$ c) $P(-7, 8)$, $Q(-7, 0)$

2. Dwa wierzchołki trójkąta KLM należą do osi rzędnych. Środkowa poprowadzona z wierzchołka L zawiera się w prostej o równaniu $x - 3y + 3 = 0$, zaś bok KL w prostej o równaniu $x - y - 3 = 0$. Wyznacz równania ogólne prostych, w których zawierają się dwa pozostałe boki tego trójkąta.

Kąt między prostymi

Kąt między dwiema prostymi opisanymi równaniami w postaci ogólnej

Rozważmy na płaszczyźnie dwie proste opisane równaniami ogólnymi $k\colon A_1x+B_1y+C_1=0\ \ (A_1{}^2+B_1{}^2\neq 0)$ oraz $l\colon A_2x+B_2y+C_2=0\ \ (A_2{}^2+B_2{}^2\neq 0)$. Sformułujemy warunek na równoległość oraz prostopadłość prostych k i l. Wyprowadzimy wzór, który pozwoli nam obliczyć miarę kąta utworzonego przez te proste, w przypadku, gdy nie są one prostopadłe. Aby to zrobić, posłużymy się wektorami $\vec{u}=[A_1, B_1]$ i $\vec{v}=[A_2, B_2]$, które są prostopadłe odpowiednio do prostych k i l.

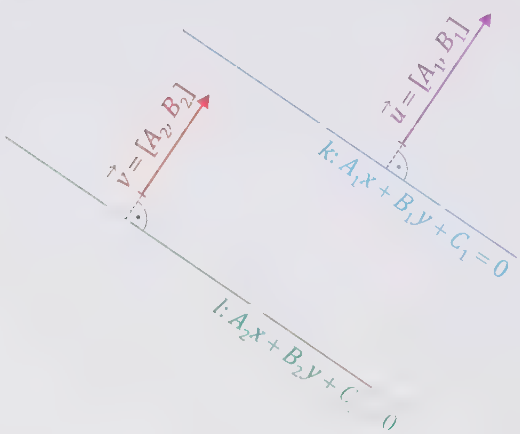
Oznaczmy kąt między wektorami $\vec{u}$ i $\vec{v}$ jako α, gdzie $\alpha\in\langle 0°, 180°\rangle$. Wiemy, że

$$\sin\alpha=\frac{|A_1B_2-A_2B_1|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2}}\qquad\qquad \cos\alpha=\frac{A_1A_2+B_1B_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2}}$$

Ponieważ wektory $\vec{u}$ i $\vec{v}$ są odpowiednio prostopadłe do prostych k i l, więc kąt α jest równy jednemu z kątów utworzonych przez proste k i l (drugi z kątów ma miarę $180°-\alpha$).

Rozpatrzymy trzy przypadki:
I. Proste k i l są równoległe
II. Proste k i l są prostopadłe
III. Proste k i l przecinają się pod kątem różnym od $90°$.

Ad I. Proste k i l są równoległe ($\alpha=0°$ lub $\alpha=180°$)



Wektory $\vec{u}$ i $\vec{v}$ są prostopadłe odpowiednio do prostych równoległych k i l, więc

$$\vec{u}\parallel\vec{v}$$

Zatem

$\sin\alpha=0$, czyli

$|A_1B_2-A_2B_1|=0$, skąd

$A_1B_2-A_2B_1=0$

Prawdziwe jest następujące twierdzenie.

Twierdzenie 1.
Proste o równaniach $A_1x+B_1y+C_1=0$, $A_1^2+B_1^2\neq 0$, oraz $A_2x+B_2y+C_2=0$, $A_2^2+B_2^2\neq 0$, są równoległe wtedy i tylko wtedy, gdy $A_1B_2-A_2B_1=0$.

Załóżmy, że dana jest prosta

$$k\colon\ Ax+By+C=0,\ A^2+B^2\neq 0$$

Wektor

$$\vec{u}=[A, B]$$

jest prostopadły do prostej k. Prosta l będzie równoległa do prostej k wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\vec{u}\perp l$$

Zatem prostą l można opisać równaniem

$$Ax+By+C_1=0$$

Wniosek: Dowolną prostą równoległą do prostej o równaniu $Ax+By+C=0$ można opisać równaniem $Ax+By+C_1=0$, gdzie $A^2+B^2\neq 0$.

Przykład 1.

Dana jest prosta $k\colon 5x-3y+2=0$. Wyznaczymy równanie prostej l równoległej do prostej k, przechodzącej przez punkt $P(-8, 6)$.

Korzystamy z ostatniego wniosku. Równanie dowolnej prostej l równoległej do prostej

$$k\colon 5x-3y+2=0$$

możemy zapisać w postaci

$$5x-3y+C_1=0$$

Współczynnik C_1 obliczymy, korzystając z informacji, że punkt $P(-8, 6)$ należy do szukanej prostej. Otrzymujemy:

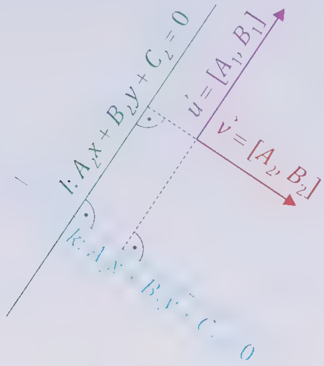
$$5\cdot(-8)-3\cdot 6+C_1=0$$

$$-40-18+C_1=0$$

$$C_1=58$$

Prostą l równoległą do prostej $k\colon 5x-3y+2=0$ i przechodzącą przez punkt $P(-8, 6)$ opisuje równanie $5x-3y+58=0$.

Ad II. Proste k i l są prostopadłe $(\alpha = 90°)$



Wektory $\vec{u}$ i $\vec{v}$ są prostopadłe odpowiednio do prostych prostopadłych k i l, więc

$$\vec{u} \perp \vec{v}$$

Zatem

$$\cos\alpha = 0, \text{ czyli}$$

$$A_1A_2 + B_1B_2 = 0$$

Twierdzenie 2.

Proste o równaniach $A_1x + B_1y + C_1 = 0$, $A_1^2 + B_1^2 \neq 0$, oraz $A_2x + B_2y + C_2 = 0$, $A_2^2 + B_2^2 \neq 0$, są prostopadłe wtedy i tylko wtedy, gdy $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$.

Z twierdzenia 2. wynika następujący wniosek.

Wniosek: Dowolną prostą prostopadłą do prostej o równaniu $Ax + By + C = 0$ można opisać równaniem $Bx - Ay + C_1 = 0$, gdzie $A^2 + B^2 \neq 0$.

Przykład 2.

Dana jest prosta k: $5x - 3y + 2 = 0$. Wyznaczymy równanie prostej p prostopadłej do prostej k, przechodzącej przez punkt $Q(2, -3)$.

Na podstawie drugiego wniosku równanie dowolnej prostej prostopadłej do prostej

$$k\colon 5x - 3y + 2 = 0$$

możemy zapisać w postaci

$$-3x - 5y + C_1 = 0$$

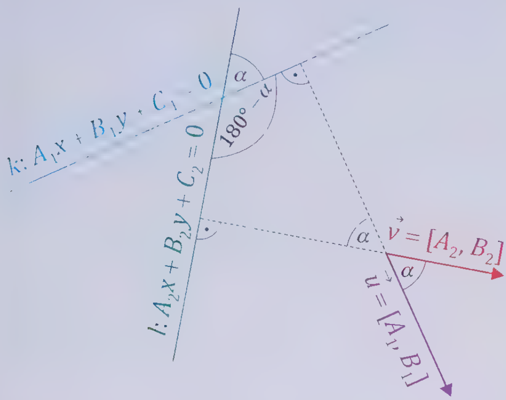
Punkt $Q(2, -3)$ należy do szukanej prostej, więc

$$-3 \cdot 2 - 5 \cdot (-3) + C_1 = 0, \text{ skąd}$$

$$C_1 = -9$$

Prostą prostopadłą do prostej k: $5x - 3y + 2 = 0$ i przechodzącą przez punkt $Q(2, -3)$ opisuje równanie $3x + 5y + 9 = 0$.

Ad III. Proste k i l przecinają się i nie są prostopadłe ($\alpha \in (0°, 90°) \cup (90°, 180°)$)



Wektory $\vec{u}$ i $\vec{v}$ tworzą kąt α. Kąt α jest jednym z kątów utworzonych przez proste k i l. Obliczamy tg α:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{|A_1B_2 - A_2B_1|}{A_1A_2 + B_1B_2}$$

Jeśli przyjmiemy, że kąt między prostymi k i l jest ostry, to otrzymany wzór możemy zapisać w postaci:

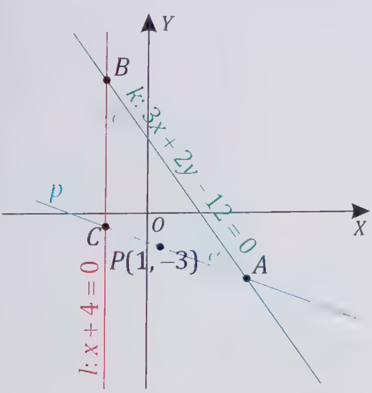
$$\operatorname{tg}\alpha = \left|\frac{A_1B_2 - A_2B_1}{A_1A_2 + B_1B_2}\right|$$

Twierdzenie 3.

Jeśli proste o równaniach $A_1x + B_1y + C_1 = 0$, $A_1^2 + B_1^2 \neq 0$, oraz $A_2x + B_2y + C_2 = 0$, $A_2^2 + B_2^2 \neq 0$, przecinają się pod kątem ostrym α, to $\operatorname{tg}\alpha = \left|\frac{A_1B_2 - A_2B_1}{A_1A_2 + B_1B_2}\right|$.

Przykład 3.

Wyznaczymy równanie prostej p, w której zawiera się ramię AC trójkąta równoramiennego ABC, wiedząc, że podstawa AB zawiera się w prostej k: $3x + 2y - 12 = 0$, ramię BC zawiera się w prostej l: $x + 4 = 0$ oraz punkt $P(1, -3)$ należy do ramienia AC.



Rysunek obok ilustruje sytuację opisaną w zadaniu.

Trójkąt ABC jest równoramienny, więc kąty przy podstawie AB mają równe miary. Oznaczamy

$$|\sphericalangle CBA| = |\sphericalangle CAB| = \alpha, \text{ gdzie } \alpha \in (0°, 90°).$$

Korzystamy ze wzoru na tangens kąta utworzonego przez dwie przecinające się proste k, l dane równaniami ogólnymi

$$\operatorname{tg}\alpha = \left|\frac{A_1B_2 - A_2B_1}{A_1A_2 + B_1B_2}\right|, \text{ gdzie } k\colon 3x + 2y - 12 = 0 \text{ i } l\colon x + 4 = 0. \text{ Mamy:}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \left|\frac{3\cdot 0 - 1\cdot 2}{3\cdot 1 + 2\cdot 0}\right| = \left|\frac{-2}{3}\right| = \frac{2}{3}$$

Załóżmy, że prosta p ma równanie $Ax + By + C = 0$, gdzie $A^2 + B^2 \neq 0$. Punkt $P(1, -3)$ należy do prostej p, zatem

$A\cdot 1 + B\cdot(-3) + C = 0$

$C = -A + 3B$, stąd

$p\colon Ax + By - A + 3B = 0$

Ponieważ $|\sphericalangle CBA| = |\sphericalangle CAB|$, więc proste p i k przecinają się pod kątem α takim, że $\operatorname{tg}\alpha = \frac{2}{3}$. Zatem

$$\left|\frac{3B - 2A}{3A + 2B}\right| = \frac{2}{3}, \text{ czyli}$$

$$\frac{3B - 2A}{3A + 2B} = \frac{2}{3} \quad \vee \quad \frac{3B - 2A}{3A + 2B} = -\frac{2}{3}, \text{ skąd}$$

$$B = \frac{12}{5}A \quad \vee \quad B = 0$$

Jeśli $B = 0$, to prosta p ma równanie $x - 1 = 0$. Ta prosta nie spełnia warunków zadania ($p \parallel l$).

Jeśli $B = \frac{12}{5}A$, to

$$p\colon Ax + \frac{12}{5}Ay - A + \frac{36}{5}A = 0$$

$$p\colon x + \frac{12}{5}y - \frac{31}{5} = 0$$

$p\colon 5x + 12y - 31 = 0$

Ramię AC trójkąta ABC zawiera się w prostej p o równaniu $5x + 12y - 31 = 0$.

Kąt między dwiema prostymi o równaniach w postaci kierunkowej

W klasie drugiej poznałeś warunek na równoległość oraz prostopadłość prostych opisanych równaniami kierunkowymi. Przypomnijmy te twierdzenia.

Twierdzenie 4.

Proste $k\colon y=a_1x+b_1$ oraz $l\colon y=a_2x+b_2$ są równoległe wtedy i tylko wtedy, gdy $a_1=a_2$.

Twierdzenie 5.

Proste $k\colon y=a_1x+b_1$ oraz $l\colon y=a_2x+b_2$, gdzie $a_1\neq 0$ i $a_2\neq 0$, są prostopadłe wtedy i tylko wtedy, gdy ich współczynniki kierunkowe spełniają warunek $a_1\cdot a_2=-1$.

Przykład 4.

Wyznaczymy wszystkie wartości parametru m, $m\in \boldsymbol{R}$, dla których proste $k\colon y=(m+1)x+20$ oraz $l\colon y=(2m-1)x-41$ są:

a) równoległe

b) prostopadłe.

Ad a) Proste dane równaniami kierunkowymi są równoległe wtedy i tylko wtedy, gdy ich współczynniki kierunkowe są równe. Zatem

$$m+1=2m-1$$

$$m=2$$

Proste k i l są równoległe wtedy, gdy $m=2$.

Ad b) Proste $k\colon y=(m+1)x+20$ i $l\colon y=(2m-1)x-41$ są prostopadłe wtedy i tylko wtedy, gdy ich współczynniki kierunkowe spełniają warunek $a_1\cdot a_2=-1$. Stąd

$$(m+1)(2m-1)=-1$$

$$2m^2+m=0$$

$$m(2m+1)=0$$

$$m=0 \lor m=-\frac{1}{2}$$

Proste k i l są prostopadłe wtedy, gdy $m\in\left\{-\frac{1}{2},0\right\}$.

Teraz wyprowadzimy wzór na tangens kąta α, gdzie α jest kątem ostrym utworzonym przez dwie przecinające się proste, opisane równaniami kierunkowymi. Skorzystamy ze wzoru

$$\operatorname{tg}\alpha=\left|\frac{A_1B_2-A_2B_1}{A_1A_2+B_1B_2}\right| \quad \text{(twierdzenie 1c)}$$

dla prostych danych równaniami ogólnymi $k\colon A_1x+B_1y+C_1=0$ i $l\colon A_2x+B_2y+C_2=0$ $(A_1{}^2+B_1{}^2\neq 0,\ A_2{}^2+B_2{}^2\neq 0)$. Wiesz, że jeśli $B_1\neq 0$ i $B_2\neq 0$, to równanie prostej w postaci ogólnej można sprowadzić do równania kierunkowego. Zatem

$$k\colon y=-\frac{A_1}{B_1}x-\frac{C_1}{B_1}\text{, gdzie } B_1\neq 0 \quad\text{oraz}\quad l\colon y=-\frac{A_2}{B_2}x-\frac{C_2}{B_2}\text{, gdzie } B_2\neq 0$$

Współczynnik kierunkowy prostej k oznaczamy jako a_1. Zatem

$$a_1 = -\frac{A_1}{B_1}, \text{ skąd } A_1 = -a_1 B_1, \text{ gdzie } B_1 \neq 0.$$

Współczynnik kierunkowy prostej l oznaczamy jako a_2. Otrzymujemy:

$$a_2 = -\frac{A_2}{B_2}, \text{ czyli } A_2 = -a_2 B_2, \text{ gdzie } B_2 \neq 0.$$

Obliczamy $\operatorname{tg}\alpha$.

$$\operatorname{tg}\alpha = \left|\frac{-a_1 B_1 \cdot B_2 + a_2 B_2 \cdot B_1}{(-a_1 B_1)\cdot(-a_2 B_2) + B_1 B_2}\right|$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \left|\frac{B_1 B_2 (a_2 - a_1)}{a_1 a_2 B_1 B_2 + B_1 B_2}\right|$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \left|\frac{B_1 B_2 \cdot (a_2 - a_1)}{B_1 B_2 (a_1 a_2 + 1)}\right|, \text{ gdzie } B_1 B_2 \neq 0 \text{ i } a_1 a_2 \neq -1$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \left|\frac{a_2 - a_1}{a_1 a_2 + 1}\right|$$

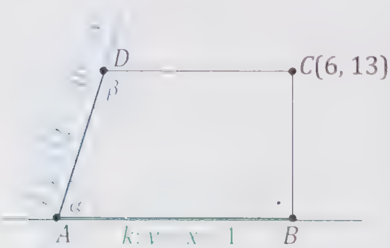
Twierdzenie 6.

Jeśli proste o równaniach kierunkowych $y = a_1 x + b_1$ oraz $y = a_2 x + b_2$ tworzą kąt ostry α, to

$$\operatorname{tg}\alpha = \left|\frac{a_2 - a_1}{a_1 a_2 + 1}\right|.$$

Przykład 5.

Wyznaczymy miary kątów i równania prostych, w których zawierają się boki trapezu prostokątnego, jeśli wiadomo, że podstawa AB zawiera się w prostej k o równaniu $y = x - 1$, ramię AD w prostej l o równaniu $y = (2 - \sqrt{3})x + 4$, zaś wierzchołek C ma współrzędne $(6, 13)$.



Rysunek obok ilustruje sytuację opisaną w zadaniu. Wyznaczymy najpierw równania prostych, w których zawierają się podstawa CD i bok BC trapezu. Podstawa CD zawiera się w prostej równoległej do prostej k: $y = x - 1$, zatem jej równanie jest postaci $y = x + b$ (bo współczynniki kierunkowe prostych równoległych są równe). Wyraz wolny b obliczymy, korzystając z faktu, że $C(6, 13)$ należy do tej prostej.

Otrzymujemy:

$$13 = 6 + b, \quad \text{skąd} \quad b = 7.$$

Podstawa DC zawiera się w prostej o równaniu $y = x + 7$.
Ponieważ trapez jest prostokątny, więc prosta zawierająca bok BC jest prostopadła do prostej k, a jej współczynnik kierunkowy jest równy -1. Zatem równanie tej prostej jest postaci $y = -x + b_1$. Do prostej należy punkt C, więc

$$13 = -6 + b_1, \quad \text{czyli } b_1 = 19.$$

Prosta zawierająca bok BC ma równanie $y = -x + 19$.
Miarę kąta ostrego α obliczymy, korzystając ze wzoru na tangens kąta utworzonego przez dwie proste o równaniach kierunkowych:

$$\operatorname{tg}\alpha = \left|\frac{a_2 - a_1}{a_1 a_2 + 1}\right|, \text{ gdzie } a_1 = 1,\ a_2 = 2 - \sqrt{3}$$

Otrzymujemy:

$$\operatorname{tg}\alpha = \left|\frac{2-\sqrt{3}-1}{1\cdot\left(2-\sqrt{3}\right)+1}\right| = \left|\frac{1-\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}\right| = \frac{\sqrt{3}-1}{3-\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}\left(\sqrt{3}-1\right)} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Jeśli $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$, to $\alpha = 30°$. Wówczas $\beta = 180° - 30° = 150°$.

Kąty trapezu mają miary $30°, 90°, 90°, 150°$. Dwa pozostałe boki trapezu zawierają się w prostych o równaniach $y = -x + 19$ oraz $y = x + 7$.

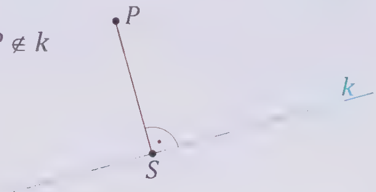
Sprawdź, czy rozumiesz

1. Wyznacz miarę kąta rozwartego, jaki tworzą dwie proste k i l o równaniach:
   a) k: $5x - y + 32 = 0$ oraz l: $3x + 2y - 12 = 0$
   b) k: $y = -5$ oraz l: $y = \sqrt{3}x + 2$.
2. Dana jest prosta k: $2x - 3y - 21 = 0$. Wyznacz równanie:
   a) prostej l równoległej do prostej k, przechodzącej przez punkt $P(-15, 100)$
   b) prostej p prostopadłej do prostej k, przechodzącej przez punkt $Q(76, -14)$.
3. Wyznacz wszystkie wartości parametru m, $m \in \mathbb{R}$, dla których proste k: $y = (m^2 - 2)x - 17$ oraz l: $y = mx + 6$ są prostopadłe.
4. W trapezie równoramiennym $ABCD$ przekątna AC jest dwusieczną kąta ostrego przy dłuższej podstawie AB. Podstawa AB zawiera się w prostej o równaniu $y = -4$, zaś ramię AD – w prostej o równaniu $y = \sqrt{3}x - 2$. Oblicz długości boków trapezu, wiedząc, że jego pole jest równe $9\sqrt{3}$.

Odległość punktu od prostej. Odległość między dwiema prostymi równoległymi

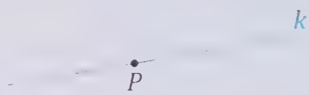
Odległością punktu P od prostej k, gdzie $P \notin k$, nazywamy długość odcinka prostopadłego do prostej k, którego jednym końcem jest punkt P, a drugim – punkt S należący do prostej k. Jeśli $P \in k$, to odległość punktu P od prostej k jest równa zeru. Odległość punktu P od prostej k będziemy oznaczać $d(P, k)$.

$P \notin k$



$d(P, k) = |PS|$

$P \in k$

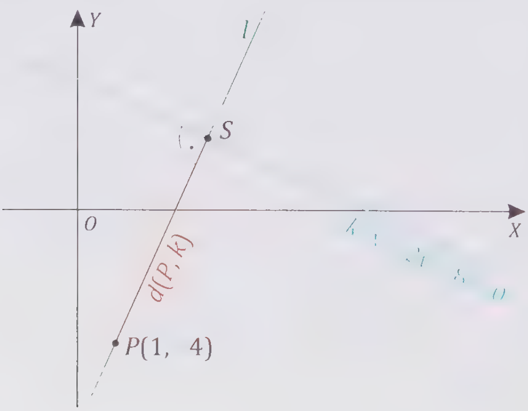


$d(P, k) = 0$

Przykład 1.

Wyznaczymy odległość punktu $P(1, -4)$ od prostej $k\colon x + 2y - 8 = 0$.

Punkt P nie należy do prostej k (współrzędne punktu P nie spełniają równania prostej k).
Aby wyznaczyć odległość punktu P od prostej k, wystarczy znaleźć długość odcinka PS, gdzie S jest punktem przecięcia prostej k i prostej l prostopadłej do prostej k przechodzącej przez punkt P (zobacz rysunek poniżej).



Wyznaczamy równanie prostej l takiej, że $l \perp k$ i $P \in l$:

$$2x - y + C_1 = 0$$

$$2 \cdot 1 - (-4) + C_1 = 0$$

$$C_1 = -6$$

$$l\colon 2x - y - 6 = 0$$

Współrzędne punktu S otrzymamy, rozwiązując poniższy układ równań:

$$\begin{cases} x + 2y - 8 = 0 \\ 2x - y - 6 = 0 \quad |\cdot 2 \end{cases}$$

$$+\begin{cases} x + 2y - 8 = 0 \\ 4x - 2y - 12 = 0 \end{cases}$$

$$5x - 20 = 0$$

$$x = 4, \text{ więc } y = 2$$

Zatem $S(4, 2)$.
Teraz wystarczy obliczyć długość odcinka PS.

$$|PS| = \sqrt{(4-1)^2 + (2+4)^2} = \sqrt{9+36} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$$

Odległość punktu $P(1, -4)$ od prostej $k: x + 2y - 8 = 0$ wynosi $3\sqrt{5}$.

Postępując podobnie, wyprowadzimy wzór na odległość dowolnego punktu $P(x_0, y_0)$ od dowolnej prostej k: $Ax + By + C = 0$, gdzie $A^2 + B^2 \neq 0$, w prostokątnym układzie współrzędnych.

Jeśli $P \in l$ (czyli $Ax_0 + By_0 + C = 0$), to $d(P, l) = 0$.
Załóżmy zatem, że $P \notin l$, czyli $Ax_0 + By_0 + C \neq 0$.

- Wyznaczamy równanie prostej l takiej, że $l \perp k$ oraz $P \in l$.
  Otrzymujemy:

$$Bx - Ay + C_1 = 0$$

$$Bx_0 - Ay_0 + C_1 = 0$$

$$C_1 = -Bx_0 + Ay_0$$

$$l: Bx - Ay - Bx_0 + Ay_0 = 0$$

Wyznaczamy współrzędne punktu S przecięcia się prostych k i l, rozwiązując układ równań:

$$\begin{cases} Ax + By + C = 0 \\ Bx - Ay - Bx_0 + Ay_0 = 0 \end{cases}$$

Układ równań rozwiążemy metodą wyznacznikową.

$$\begin{cases} Ax + By = -C \\ Bx - Ay = Bx_0 - Ay_0 \end{cases}$$

Obliczamy wyznaczniki:

$$W = \begin{vmatrix} A & B \\ B & -A \end{vmatrix} = -A^2 - B^2 = -(A^2 + B^2)$$

$$W_x = \begin{vmatrix} -C & B \\ Bx_0 - Ay_0 & -A \end{vmatrix} = AC - B^2x_0 + ABy_0$$

$$W_y = \begin{vmatrix} A & -C \\ B & Bx_0 - Ay_0 \end{vmatrix} = ABx_0 - A^2y_0 + BC$$

- Z równania prostej k wiemy, że $A^2+B^2 \neq 0$, więc układ jest oznaczony i spełnia go jedna para liczb:

$$x=\frac{W_x}{W} \quad \text{i} \quad y=\frac{W_y}{W}$$

Zatem

$$S\left(\frac{B^2x_0-ABy_0-AC}{A^2+B^2},\ \frac{A^2y_0-ABx_0-BC}{A^2+B^2}\right)$$

- Odległość punktu P od prostej k to długość odcinka PS. Zatem:

$$d(P,k)=\sqrt{\left(\frac{B^2x_0-ABy_0-AC}{A^2+B^2}-x_0\right)^2+\left(\frac{A^2y_0-ABx_0-BC}{A^2+B^2}-y_0\right)^2}=$$

$$=\sqrt{\left(\frac{B^2x_0-ABy_0-AC-A^2x_0-B^2x_0}{A^2+B^2}\right)^2+\left(\frac{A^2y_0-ABx_0-BC-A^2y_0-B^2y_0}{A^2+B^2}\right)^2}=$$

$$=\sqrt{\left(\frac{-A\cdot(Ax_0+By_0+C)}{A^2+B^2}\right)^2+\left(\frac{-B\cdot(Ax_0+By_0+C)}{A^2+B^2}\right)^2}=$$

$$=\sqrt{\frac{A^2(Ax_0+By_0+C)^2}{(A^2+B^2)^2}+\frac{B^2(Ax_0+By_0+C)^2}{(A^2+B^2)^2}}=$$

$$=\sqrt{\frac{(Ax_0+By_0+C)^2}{(A^2+B^2)^2}\cdot(A^2+B^2)}=\sqrt{\frac{(Ax_0+By_0+C)^2}{A^2+B^2}}=$$

$$=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

Udowodniliśmy twierdzenie.

Twierdzenie 1.

Odległość punktu $P(x_0, y_0)$ od prostej k opisanej równaniem $Ax+By+C=0$, gdzie $A^2+B^2 \neq 0$, wyraża się wzorem:

$$d(P,k)=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Przykład 2.

Obliczymy odległość punktu $P(5, -2)$ od prostych k i l, gdzie:
a) $k: -x + 3y + 11 = 0$ b) $l: 2x - 9y + 1 = 0$

Ad a) Obliczamy odległość punktu P od prostej k, korzystając z ostatniego twierdzenia.

$$d(P, k) = \frac{|-5 + 3 \cdot (-2) + 11|}{\sqrt{(-1)^2 + 3^2}} = \frac{0}{\sqrt{10}} = 0$$

Odległość punktu P od prostej k jest równa 0, co znaczy, że P należy do prostej k.

Ad b) Obliczamy:

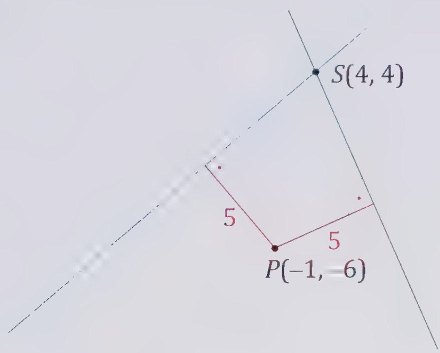
$$d(P, l) = \frac{|2 \cdot 5 - 9 \cdot (-2) + 1|}{\sqrt{2^2 + (-9)^2}} = \frac{|10 + 18 + 1|}{\sqrt{4 + 81}} = \frac{29}{\sqrt{85}} = \frac{29\sqrt{85}}{85}$$

Odległość punktu P od prostej l wynosi $\frac{29\sqrt{85}}{85}$.

Przykład 3.

Wyznaczymy równanie prostej, do której należy punkt $S(4, 4)$, i takiej, że odległość punktu $P(-1, -6)$ od tej prostej wynosi 5.

Wykonamy najpierw rysunek przedstawiający sytuację opisaną w zadaniu.



Zadanie rozwiążemy na dwa sposoby.

I sposób – skorzystamy z równania ogólnego prostej.
Niech $Ax + By + C = 0$, gdzie $A^2 + B^2 \neq 0$, będzie równaniem szukanej prostej. Punkt $S(4, 4)$ należy do tej prostej, więc

$4A + 4B + C = 0$, skąd

$C = -4A - 4B$

Prostą opisuje równanie

$Ax + By - 4A - 4B = 0$, gdzie $A^2 + B^2 \neq 0$

Punkt $P(-1, -6)$ jest odległy od prostej o 5, zatem

$$\frac{|-A - 6B - 4A - 4B|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = 5$$

Stąd

$$|-5A - 10B| = 5\sqrt{A^2 + B^2}$$

$$5|A + 2B| = 5\sqrt{A^2 + B^2}$$

$$|A + 2B| = \sqrt{A^2 + B^2}$$

Obie strony otrzymanego równania są nieujemne, więc po podniesieniu obu stron do kwadratu otrzymujemy równanie równoważne danemu.

$$(A + 2B)^2 = A^2 + B^2$$

$$A^2 + 4AB + 4B^2 = A^2 + B^2$$

$$4AB + 3B^2 = 0$$

$$B(4A + 3B) = 0$$

$$B = 0 \vee B = -\frac{4}{3}A$$

Jeśli $B = 0$, to równanie prostej ma postać

$Ax - 4A = 0$, czyli

$x - 4 = 0$ (bo $A \neq 0$)

Jeśli $B = -\frac{4}{3}A$, to równanie prostej ma postać

$$Ax - \frac{4}{3}Ay - 4A - 4\left(-\frac{4}{3}A\right) = 0 \quad /:A, \quad A \neq 0, \quad \text{czyli}$$

$$x \quad \frac{4}{3}y + \frac{4}{3} = 0 \quad /\cdot 3$$

$$3x - 4y + 4 = 0$$

Otrzymaliśmy dwie proste spełniające warunki zadania. Mają one równania: $x - 4 = 0$ oraz $3x - 4y + 4 = 0$.

<u>II sposób</u> – skorzystamy z równania kierunkowego prostej.
Niech $y = ax + b$ będzie równaniem szukanej prostej.
Punkt $S(4, 4)$ należy do tej prostej, więc po podstawieniu jego współrzędnych do równania prostej otrzymujemy:

$4 = 4a + b$, skąd

$b = 4 - 4a$

Zatem równanie prostej ma postać:

$$y = ax + 4 - 4a$$

Po sprowadzeniu otrzymanego równania do postaci ogólnej mamy:

$$ax - y + 4 - 4a = 0$$

Odległość punktu $P(-1, -6)$ od szukanej prostej wynosi 5, zatem

$$\frac{|-1 \cdot a - (-6) + 4 - 4a|}{\sqrt{a^2 + (-1)^2}} = 5,$$

skąd

$$|-5a + 10| = 5 \cdot \sqrt{a^2 + 1}$$

$$5 \cdot |2 - a| = 5 \cdot \sqrt{a^2 + 1}$$

$$|2 - a| = \sqrt{a^2 + 1}$$

$$(2 - a)^2 = a^2 + 1$$

$$4 - 4a + a^2 = a^2 + 1$$

$$a = \frac{3}{4}$$

Jeśli $a = \frac{3}{4}$, to równanie prostej spełniającej warunki zadania ma postać:

$$y = \frac{3}{4}x - 4 \cdot \frac{3}{4} + 4,$$

czyli

$$y = \frac{3}{4}x + 1$$

Otrzymaliśmy tylko jedno równanie prostej! Jeśli szukamy równania prostej i korzystamy z postaci kierunkowej tego równania, to zawsze powinniśmy zbadać, czy wśród prostych spełniających warunki zadania istnieje taka, której nie można opisać równaniem kierunkowym. W przypadku naszego zadania jest jedna prosta, którą należy rozważyć. To prosta prostopadła do osi OX, przechodząca przez punkt $S(4, 4)$, czyli prosta opisana równaniem

$$x = 4$$

Łatwo sprawdzić, że odległość punktu $P(-1, -6)$ od tej prostej jest równa $|-1 - 4|$, czyli 5. Zatem prosta o równaniu $x = 4$ spełnia warunki zadania.

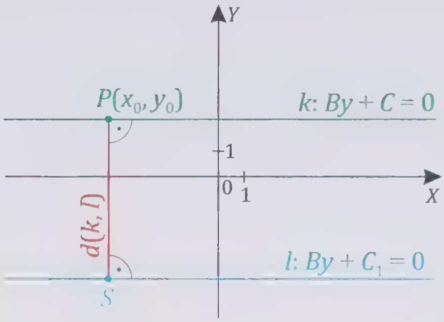
Istnieją dwie proste przechodzące przez punkt $S(4, 4)$, takie że punkt $P(-1, -6)$ jest od nich odległy o 5. Proste te mają równania: $y = \frac{3}{4}x + 1$ oraz $x = 4$.

Na koniec wyznaczymy odległość $d(k, l)$ między dwiema prostymi równoległymi $k\colon Ax + By + C = 0$ i $l\colon Ax + By + C_1 = 0$, gdzie $A^2 + B^2 \neq 0$.

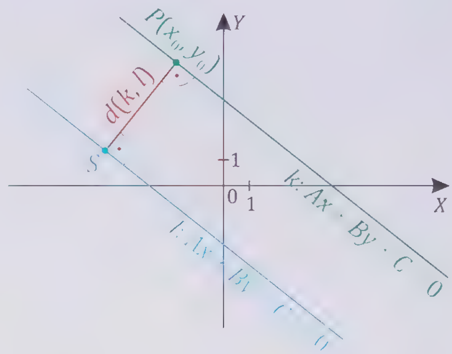
Jeśli $C = C_1$, to proste pokrywają się i odległość między nimi jest równa zero. Załóżmy, że $C \neq C_1$, i rozpatrzmy dwa przypadki:
I. A – dowolna liczba rzeczywista, $B \neq 0$ oraz
II. $A \neq 0$ i $B = 0$.

<u>I przypadek</u> Niech A – dowolna liczba rzeczywista i $B \neq 0$.

a) $A = 0$ i $B \neq 0$



b) $A \neq 0$ i $B \neq 0$



Na prostej k wybieramy dowolnie punkt $P(x_0, y_0)$. Zatem współrzędne punktu P spełniają równanie prostej k, czyli $Ax_0 + By_0 + C = 0$, skąd

$$y_0 = -\frac{A}{B}x_0 - \frac{C}{B} \quad (\text{bo } B \neq 0)$$

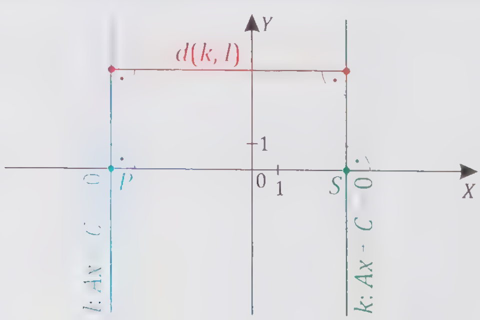
Współrzędne punktu P możemy zapisać w postaci:

$$P\left(x_0,\ -\frac{A}{B}x_0 - \frac{C}{B}\right)$$

Skorzystamy teraz ze wzoru na odległość punktu P od prostej $l\colon Ax + By + C_1 = 0$. Otrzymujemy:

$$d(P, l) = \frac{\left|Ax_0 + B\cdot\left(-\frac{A}{B}x_0 - \frac{C}{B}\right) + C_1\right|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|Ax_0 - Ax_0 - C + C_1|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|C_1 - C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

<u>II przypadek</u> Jeśli $A \neq 0$ i $B = 0$, to proste k i l są prostopadłe do osi OX.



Prosta l przecina oś OX w punkcie $P\left(-\frac{C_1}{A}, 0\right)$, zaś prosta k – w punkcie $S\left(-\frac{C}{A}, 0\right)$.

Zatem

$$d(k, l) = |PS| = \left|-\frac{C}{A} - \left(-\frac{C_1}{A}\right)\right| = \left|\frac{C_1 - C}{A}\right| = \frac{|C_1 - C|}{|A|} = \frac{|C_1 - C|}{\sqrt{A^2 + 0^2}} = \frac{|C_1 - C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Zatem odległość między prostymi k oraz l jest równa $d(k, l) = \frac{|C_1 - C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$.
Udowodniliśmy twierdzenie.

Twierdzenie 2.

Odległość między dwiema prostymi równoległymi k i l danymi równaniami ogólnymi $k: Ax + By + C = 0$ i $l: Ax + By + C_1 = 0$, gdzie $A^2 + B^2 \neq 0$, wyraża się wzorem:

$$d(k, l) = \frac{|C_1 - C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Przykład 3.

Podstawy trapezu zawierają się w prostych o równaniach $k: -5x + 2y + 3 = 0$ i $l: -5x + 2y + 10 = 0$. Obliczymy wysokość tego trapezu.

Wysokość h trapezu jest równa odległości podstaw trapezu. Zatem:

$$h = d(k, l) = \frac{|3 - 10|}{\sqrt{(-5)^2 + 2^2}} = \frac{|-7|}{\sqrt{29}} = \frac{7\sqrt{29}}{29}.$$

Wysokość trapezu jest równa $\frac{7\sqrt{29}}{29}$.

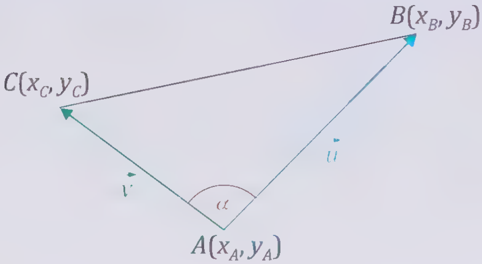
Sprawdź, czy rozumiesz

1. Napisz równanie prostej przechodzącej przez początek układu współrzędnych takiej, że odległość punktu $P(-5, 3)$ od tej prostej jest równa 5.
2. Boki trójkąta ABC zawierają się w prostych $k: x + 2 = 0$, $l: 2x - 7y - 10 = 0$, $m: 3x + 5y - 15 = 0$. Oblicz wszystkie wysokości tego trójkąta.
3. Oblicz wysokości równoległoboku, którego boki zawierają się w prostych o równaniach
$k: -3x + 4y + 1 = 0$, $l: 3x - 4y + 7 = 0$, $m: 2x + y - 6 = 0$, $p: 2x + y + 4 = 0$.
4. Wyznacz równania prostych, w których zawierają się dwusieczne kątów, pod jakimi przecinają się proste o równaniach $k: 12x + 5y - 2 = 0$ oraz $m: -3x + 4y + 1 = 0$.

Pole trójkąta. Pole wielokąta

W tym temacie nauczymy się obliczać pole wielokąta, gdy dane są współrzędne wszystkich jego wierzchołków. Najpierw wyprowadzimy wzór na pole trójkąta.

Niech punkty $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$, $C(x_C, y_C)$ będą wierzchołkami dowolnego trójkąta ABC. Wprowadzimy oznaczenia: $\vec{AB} = \vec{u}$, $\vec{AC} = \vec{v}$ oraz $|\sphericalangle BAC| = \alpha = |\sphericalangle(\vec{u}, \vec{v})|$ (patrz rysunek poniżej).



$\vec{u} = [x_B - x_A, y_B - y_A]$

$\vec{v} = [x_C - x_A, y_C - y_A]$

Pole trójkąta ABC jest równe połowie iloczynu długości boków trójkąta i sinusa kąta zawartego między nimi, czyli

$$P_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |AC| \cdot \sin\alpha$$

Zatem

$$P_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \sin|\sphericalangle(\vec{u}, \vec{v})|$$

Wiemy, że

$$\sin|\sphericalangle(\vec{u}, \vec{v})| = \frac{|u_1v_2 - u_2v_1|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$$

Zatem pole trójkąta ABC wyraża się wzorem

$$P_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \sin\alpha = \frac{1}{2} \cdot |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \frac{|u_1v_2 - u_2v_1|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{1}{2} \cdot |u_1v_2 - u_2v_1|$$

Liczbę $u_1v_2 - u_2v_1$ nazywamy wyznacznikiem wektorów $\vec{u} = [u_1, u_2]$ oraz $\vec{v} = [v_1, v_2]$ i oznaczamy $\det(\vec{u}, \vec{v})$. Wzór na pole trójkąta ABC możemy zapisać w postaci

$$P_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot |\det(\vec{u}, \vec{v})|, \quad \text{gdzie } \vec{u} = [x_B - x_A, y_B - y_A],\ \vec{v} = [x_C - x_A, y_C - y_A]$$

Stąd

$$P_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \left| \begin{vmatrix} x_B - x_A & y_B - y_A \\ x_C - x_A & y_C - y_A \end{vmatrix} \right|$$

$$P_{ABC} = \frac{1}{2} |(x_B - x_A)(y_C - y_A) - (x_C - x_A)(y_B - y_A)|$$

Podsumujmy nasze spostrzeżenia.

Aby obliczyć pole trójkąta, gdy znamy współrzędne wszystkich jego wierzchołków wystarczy obliczyć współrzędne dwóch wektorów zaczepionych w jednym z wierzchołków trójkąta, o końcach w pozostałych wierzchołkach, a następnie obliczyć połowę wartości bezwzględnej wyznacznika tych wektorów.

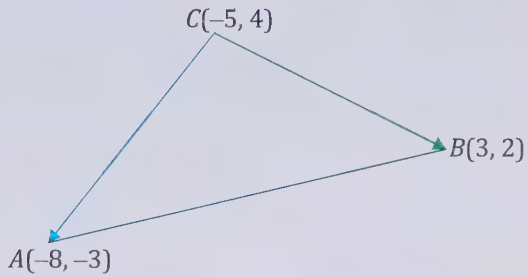
Przykład 1.

Obliczymy pole trójkąta ABC o wierzchołkach $A(-8, -3)$, $B(3, 2)$, $C(-5, 4)$.

Wyznaczamy współrzędne wektorów:

$$\overrightarrow{CB} = [3-(-5), 2-4] = [8, -2]$$

$$\overrightarrow{CA} = [-8-(-5), -3-4] = [-3, -7]$$



$$P_{ABC} = \frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}\right)\right|$$

$$P_{ABC} = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} 8 & -2 \\ -3 & -7 \end{vmatrix}\right| = \frac{1}{2}\cdot|-56-6| =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot|-62| = 31$$

Pole trójkąta ABC jest równe 31.

Przykład 2.

Obliczymy pole czworokąta $ABCD$, gdzie $A(1, -2)$, $B(2, 1)$, $C(-1, 4)$, $D(-3, 0)$.

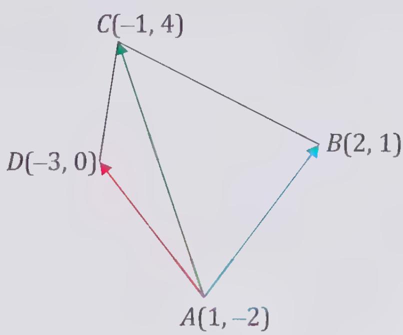
Dzielimy czworokąt $ABCD$ na trójkąty: ABC i ACD.
Obliczamy pola tych trójkątów:

$$P_{ABC} = \frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)\right|,$$

gdzie $\overrightarrow{AB} = [1, 3]$, $\overrightarrow{AC} = [-2, 6]$

$$P_{ACD} = \frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right)\right|,$$

gdzie $\overrightarrow{AD} = [-4, 2]$



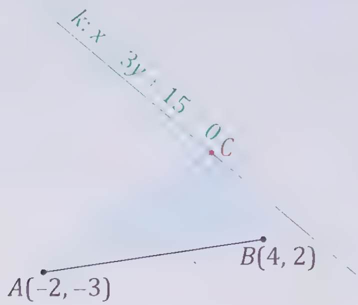
$$P_{ABC} = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 6 \end{vmatrix}\right| = \frac{1}{2}|6+6| = 6$$

$$P_{ACD} = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} -2 & 6 \\ -4 & 2 \end{vmatrix}\right| = \frac{1}{2}|-4+24| = 10$$

Pole czworokąta $ABCD$ jest sumą pól obu trójkątów i wynosi 16.

Przykład 3.

Na prostej k o równaniu $x - 3y + 15 = 0$ wyznaczymy punkt C tak, aby pole trójkąta ABC, gdzie $A(-2, -3)$ i $B(4, 2)$, było równe 23,5 (zobacz rysunek poniżej).



Równanie $x - 3y + 15 = 0$ prostej k sprowadzamy do postaci kierunkowej

$$y = \frac{1}{3}x + 5$$

Współrzędne punktu C możemy zapisać w postaci

$$\left(x_C, \frac{1}{3}x_C + 5\right)$$

Następnie obliczamy współrzędne dwóch wektorów o wspólnym początku, na przykład, $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AC}$. Mamy:

$$\overrightarrow{AB} = [6, 5] \text{ oraz}$$

$$\overrightarrow{AC} = \left[x_C + 2, \frac{1}{3}x_C + 8\right]$$

Stosujemy wzór na pole trójkąta.

$$P_{ABC} = \frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}\right)\right|$$

$$P_{ABC} = \frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} x_C + 2 & \frac{1}{3}x_C + 8 \\ 6 & 5 \end{matrix}\right\|$$

$$P_{ABC} = \frac{1}{2}\left|5(x_C + 2) - 6\left(\frac{1}{3}x_C + 8\right)\right|$$

$$P_{ABC} = \frac{1}{2}|3x_C - 38|$$

Pole trójkąta ABC jest równe 23,5, więc

$$|3x_C - 38| = 47, \quad \text{stąd}$$

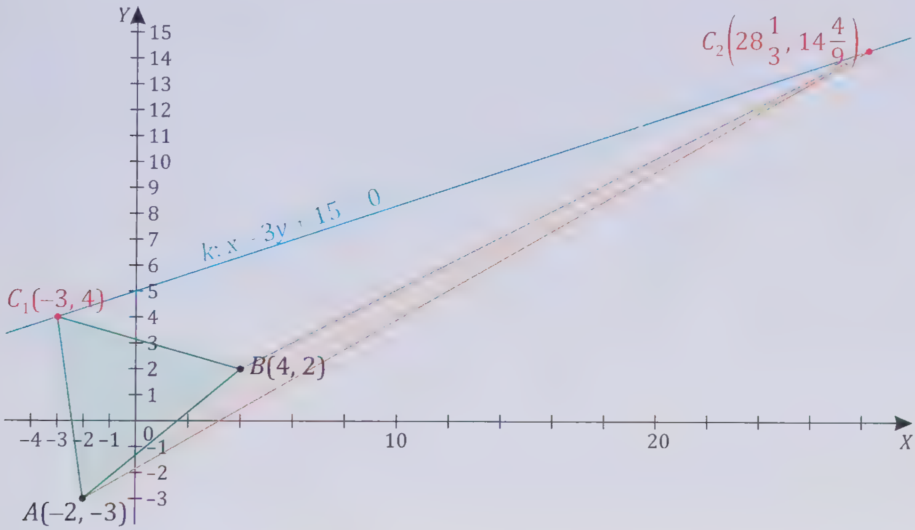
$$3x_C - 38 = -47 \ \vee \ 3x_C - 38 = 47$$

$$x_C = -3 \ \vee \ x_C = 28\frac{1}{3}$$

Jeśli $x_C = -3$, to wtedy $y_C = \frac{1}{3}(-3) + 5 = 4$.

Jeśli $x_C = 28\frac{1}{3}$, to otrzymujemy $y_C = \frac{1}{3} \cdot 28\frac{1}{3} + 5 = 14\frac{4}{9}$.

Otrzymaliśmy dwa punkty spełniające warunki zadania: $C_1(-3, 4)$, $C_2\left(28\frac{1}{3}, 14\frac{4}{9}\right)$. Sytuację tę ilustruje poniższy rysunek.

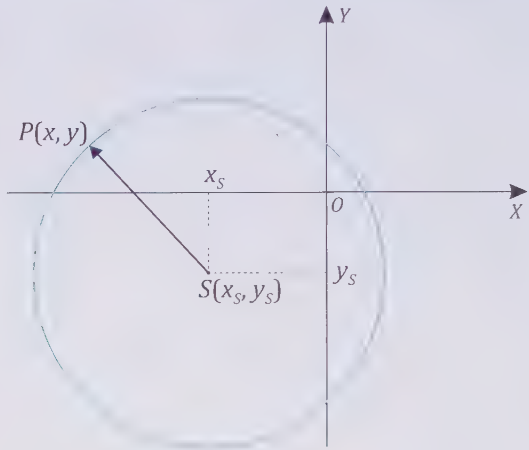


Sprawdź, czy rozumiesz

1. Boki trójkąta ABC zawierają się w prostych o równaniach: $y = \frac{1}{2}x + 3$, $y = -x + 6$ oraz $y = -\frac{1}{4}x + 1\frac{1}{2}$. Wyznacz:
   a) współrzędne wierzchołków trójkąta
   b) cosinusy miar kątów wewnętrznych trójkąta
   c) obwód trójkąta
   d) pole trójkąta ABC.
2. Oblicz pole pięciokąta $ABCDE$, jeśli $A(2, -5)$, $B(6, -4)$, $C(8, 2)$, $D(1, 6)$, $E(-6, 2)$.
3. W rombie $ABCD$, którego pole wynosi 48, dane są przeciwległe wierzchołki $A(1, -5)$ i $C(-5, 1)$. Oblicz współrzędne pozostałych wierzchołków.
4. W trójkącie prostokątnym ABC $(|\sphericalangle ABC| = 90°)$ dwa wierzchołki mają współrzędne $A(4, -2)$ i $C(0, 8)$. Wyznacz współrzędne wierzchołka B, wiedząc, że pole trójkąta ABC jest równe 20.

Równanie okręgu. Nierówność opisująca koło

Wiesz, że okrąg o środku w punkcie S i promieniu r, to zbiór wszystkich punktów płaszczyzny P, których odległość od środka S jest równa r, czyli $|SP| = r$, $r > 0$. Wyznaczymy równanie opisujące zbiór wszystkich punktów w prostokątnym układzie współrzędnych, które leżą w odległości r od ustalonego punktu $S(x_s, y_s)$.



Obliczamy długość wektora $\overrightarrow{SP}$.

$$\overrightarrow{SP} = [x - x_s, y - y_s]$$

$$|\overrightarrow{SP}| = \sqrt{(x - x_s)^2 + (y - y_s)^2}, \text{ zatem}$$

$$\sqrt{(x - x_s)^2 + (y - y_s)^2} = r$$

(ponieważ obie strony równania są nieujemne, możemy je podnieść do kwadratu i w ten sposób otrzymamy równanie równoważne)

$$(x - x_s)^2 + (y - y_s)^2 = r^2$$

Otrzymaliśmy równanie okręgu o środku w punkcie $S(x_s, y_s)$ i promieniu r, $r > 0$. Współrzędne każdego punktu należącego do tego okręgu spełniają równanie $(x - x_s)^2 + (y - y_s)^2 = r^2$ i odwrotnie, jeśli współrzędne punktu $P(x, y)$ spełniają to równanie, to punkt $P(x, y)$ należy do okręgu o środku w punkcie $S(x_s, y_s)$ i promieniu r, $r > 0$.

Równanie $(x - x_s)^2 + (y - y_s)^2 = r^2$, gdzie $r > 0$, nazywamy **równaniem kanonicznym okręgu**.

Z tego równania łatwo jest odczytać współrzędne środka okręgu i jego promień.

Przykład 1.

Równanie $x^2 + (y - 9)^2 = 10$ opisuje okrąg o środku w punkcie o współrzędnych $(0, 9)$ i promieniu równym $\sqrt{10}$.

Przekształcamy równanie $(x - x_s)^2 + (y - y_s)^2 = r^2$, gdzie $r > 0$. Mamy

$$x^2 - 2x_s x + x_s^2 + y^2 - 2y_s y + y_s^2 = r^2$$

$$x^2 + y^2 - 2x_s x - 2y_s y + x_s^2 + y_s^2 - r^2 = 0$$

Wprowadźmy oznaczenia:

$$a = -2x_s,\ \ b = -2y_s,\ \ c = x_s^2 + y_s^2 - r^2$$

Otrzymujemy wówczas równanie $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$, które jest równaniem okręgu, o ile $x_s^2 + y_s^2 - c > 0$, czyli $a^2 + b^2 - 4c > 0$ (dlaczego?).

Wniosek: Jeśli $a^2 + b^2 - 4c > 0$, to równanie $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ opisuje okrąg o środku w punkcie $S(x_s, y_s)$ i promieniu r, gdzie $r = \dfrac{\sqrt{a^2 + b^2 - 4c}}{2}$ oraz $x_s = -\dfrac{a}{2}$, $y_s = -\dfrac{b}{2}$.

Równanie $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$, gdzie $a^2 + b^2 - 4c > 0$ nazywamy **równaniem okręgu w postaci zredukowanej**.

Przykład 2.

Wykażemy, że równanie $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 6 = 0$ opisuje okrąg, wyznaczymy jego promień i współrzędne środka.

Pokażemy najpierw, że równanie $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 6 = 0$ opisuje okrąg. Przyjmujemy oznaczenia:

$$a = -6,\ \ b = 2,\ \ c = 6$$

Sprawdzamy, czy

$$a^2 + b^2 - 4c > 0$$

Ponieważ $a^2 + b^2 - 4c = 16$, $16 > 0$, więc równanie $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 6 = 0$ jest równaniem okręgu w postaci zredukowanej. Obliczamy współrzędne środka okręgu i promień:

$$x_s = -\frac{1}{2}a,\text{ czyli } x_s = 3 \text{ oraz } y_s = -\frac{1}{2}b,\text{ czyli } y_s = -1,$$

$$\text{promień } r = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 - 4c}}{2},\text{ czyli } r = 2.$$

Środek okręgu ma współrzędne $(3, -1)$, a promień okręgu jest równy 2.

Przykład 3.

Współrzędne środka S i promień r okręgu opisanego równaniem w postaci zredukowanej

$$x^2+y^2-6x+8y+16=0$$

można wyznaczyć w następujący sposób:

$$x^2+y^2-6x+8y+16=0$$

$$\underbrace{x^2-6x}+\underbrace{y^2+8y}+16=0$$

$$\underbrace{(x-3)^2-9}+\underbrace{(y+4)^2-16}+16=0$$

$$(x-3)^2+(y+4)^2=9, \quad \text{zatem}$$

$$S(3,-4) \qquad r=3$$

Postępując analogicznie, wyznacz współrzędne środka i promień okręgu z poprzedniego przykładu.

Przykład 4.

Wyznaczymy równanie okręgu przechodzącego przez punkty $A(1, 2)$ oraz $B(4, 3)$, którego środek znajduje się na prostej k: $2x-3y-3=0$.

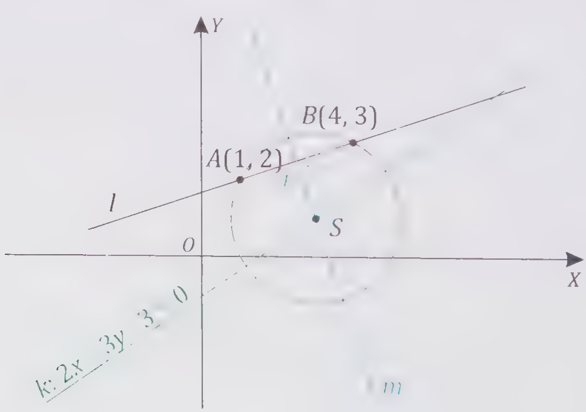
I sposób

Zastanówmy się najpierw, jak geometrycznie rozwiązać to zadanie. Wiemy, że każdy punkt znajdujący się na okręgu jest równo odległy od jego środka S, więc $|AS|=|BS|$. Zatem należy znaleźć taki punkt S, aby spełniał dwa warunki:

1) $|AS|=|BS|$

2) $S \in k$

Punkty równo odległe od punktów A i B znajdują się na symetralnej odcinka AB. Wśród tych punktów znajduje się tylko jeden taki punkt, który należy do prostej k – jest to punkt wspólny symetralnej odcinka AB i prostej k. Ten punkt to środek szukanego okręgu. Sytuację tę ilustruje poniższy rysunek.



Rozwiążemy to zadanie algebraicznie, korzystając z naszych spostrzeżeń.

- Wyznaczamy równanie prostej l przechodzącej przez punkty A i B. Równanie to zapiszemy w postaci ogólnej $Ax + By + C = 0$, gdzie $A^2 + B^2 \neq 0$.
  Wykorzystamy wzór na równanie prostej przechodzącej przez dwa punkty.

  $$y - 2 = \frac{3-2}{4-1}(x-1)$$

  $$y - 2 = \frac{1}{3}(x-1)$$

  $$y = \frac{1}{3}x - \frac{1}{3} + 2, \text{ stąd}$$

  $$l\colon x - 3y + 5 = 0$$

- Obliczamy współrzędne środka E odcinka AB:

  $$E\left(\frac{1+4}{2}, \frac{2+3}{2}\right), \text{ czyli } E\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right).$$

- Symetralna odcinka AB to prosta prostopadła do prostej $l\colon x - 3y + 5 = 0$, przechodząca przez punkt $E\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)$. Zatem

  $$-3x - y + C_1 = 0$$

  $$-3 \cdot \frac{5}{2} - \frac{5}{2} + C_1 = 0$$

  $$C_1 = 10$$

  $$m\colon -3x - y + 10 = 0$$

  $$m\colon\ 3x + y - 10 = 0$$

- Środek S okręgu znajduje się na przecięciu prostych m i k. Stąd:

  $$\begin{cases} 3x + y - 10 = 0 & | \cdot 3 \\ 2x - 3y - 3 = 0 \end{cases}$$

  $$+\begin{cases} 9x + 3y - 30 = 0 \\ 2x - 3y - 3 = 0 \end{cases}$$

  $$11x - 33 = 0$$

  $$x = 3$$

  $$2 \cdot 3 - 3y - 3 = 0$$

  $$-3y = -3$$

  $$y = 1$$

Środek okręgu ma współrzędne $S(3, 1)$.

- Promień jest równy odległości punktu S od dowolnego punktu na okręgu. Stąd:

  $r = |SA| = \sqrt{(3-1)^2 + (1-2)^2} = \sqrt{5}$

- Równanie okręgu ma postać:

  $(x-3)^2 + (y-1)^2 = 5$

<u>II sposób</u>

Oznaczymy środek szukanego okręgu $S(a, b)$. Ponieważ $S(a, b)$ należy do prostej k: $2x - 3y \quad 3 = 0$, więc współrzędne punktu S spełniają równanie prostej k. Wobec tego:

$2a - 3b - 3 = 0$, skąd

$b = \frac{2}{3}a - 1$, czyli

$S\left(a, \frac{2}{3}a - 1\right)$

Punkt S jest równo odległy od punktów A i B, więc:

$|AS| = |BS|$

$$\sqrt{(a-1)^2 + \left(\frac{2}{3}a - 3\right)^2} = \sqrt{(a-4)^2 + \left(\frac{2}{3}a - 4\right)^2}$$

Obie strony równania są nieujemne, więc po podniesieniu ich do kwadratu mamy:

$$a^2 - 2a + 1 + \frac{4}{9}a^2 - 4a + 9 = a^2 - 8a + 16 + \frac{4}{9}a^2 - \frac{16}{3}a + 16$$

$$-6a + 10 = -\frac{40}{3}a + 32$$

$$\frac{22}{3}a = 22$$

$$a = 3 \qquad\qquad |AS| = \sqrt{5}$$

Zatem

$$b = \frac{2}{3} \cdot 3 - 1$$

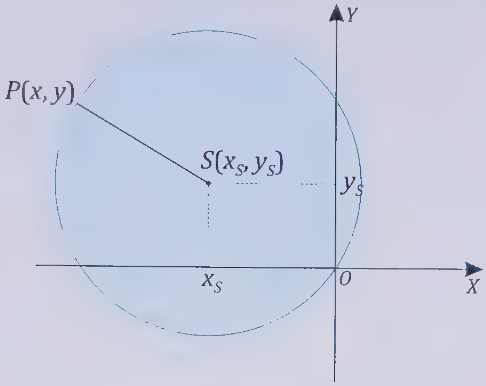
$$b = 1$$

Środek okręgu ma współrzędne $S(3, 1)$. Promień jest równy $\sqrt{5}$.
Równanie okręgu ma postać $(x-3)^2 + (y-1)^2 = 5$.

Jak pamiętasz, koło o środku w punkcie S i promieniu r to zbiór wszystkich punktów płaszczyzny P, których odległość od środka S nie jest większa od r, czyli $|SP| \leqslant r$, $r > 0$.

Opierając się na powyższej definicji, łatwo wykazać, że nierówność $(x \quad x_s)^2 + (y \quad y_s)^2 \leqslant r^2$ opisuje koło o środku $S(x_s, y_s)$ i promieniu r, gdzie $r > 0$.

Ponadto, po wykonaniu prostych przekształceń, można sformułować następujący wniosek.



Wniosek: Jeśli $a^2 + b^2 - 4c > 0$, to nierówność $x^2 + y^2 + ax + by + c \leqslant 0$ opisuje koło o środku w punkcie $S(x_s, y_s)$ i promieniu r, gdzie $r = \dfrac{\sqrt{a^2 + b^2 - 4c}}{2}$ oraz $x_s = -\dfrac{a}{2}$, $y_s = -\dfrac{b}{2}$.

Przykład 4.

Podamy współrzędne środka i długość promienia koła opisanego nierównością $x^2 + y^2 - 4y + 3 \leqslant 0$.

Przekształcamy nierówność $x^2 + y^2 - 4y + 3 \leqslant 0$ w następujący sposób:

$$x^2 + \underbrace{y^2 - 4y} + 3 \leqslant 0$$

$$x^2 + \underbrace{(y-2)^2 - 4} + 3 \leqslant 0$$

$$(x-0)^2 + (y-2)^2 \leqslant 1$$

Środkiem koła jest punkt o współrzędnych (0, 2); promień koła jest równy 1.

Przykład 5.

Proste $k: x + 1 = 0$ i $l: x + y - 2 = 0$ przecinają się w punkcie E należącym do wnętrza koła $(x+4)^2 + (y-2)^2 \leqslant 58$, dzieląc je na cztery figury. Obliczymy pole figury ograniczonej przez te proste i łuk LK, gdzie L i K są punktami wspólnymi o rzędnych dodatnich, okręgu koła i prostych odpowiednio l i k. Wynik podamy z dokładnością do jednego miejsca po przecinku.

Koło ma środek w punkcie $S(-4, 2)$. Promień koła jest równy $\sqrt{58}$.

Obliczamy współrzędne punktu E:

$$\begin{cases} x+1=0 \\ x+y-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=-x+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=3 \end{cases},$$

stąd

$E(-1, 3)$

Wyznaczamy współrzędne punktów wspólnych okręgu

o: $(x+4)^2+(y-2)^2=58$ i prostej l: $y=-x+2$.

Mamy:

$$\begin{cases} (x+4)^2+(y-2)^2=58 \\ y=-x+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+4)^2+(-x+2-2)^2=58 \\ y=-x+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+8x+16+x^2=58 \\ y=-x+2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+4x-21=0 \\ y=-x+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-7 \\ y=9 \end{cases} \vee \begin{cases} x=3 \\ y=-1 \end{cases}$$

Zatem

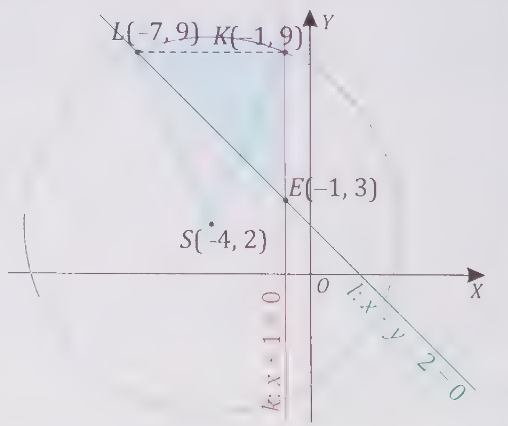
$L(-7, 9)$

Współrzędne punktów wspólnych okręgu i prostej k: $x+1=0$ wynoszą (1, –5) oraz (–1, 9) (sprawdź!), więc

$K(-1, 9)$

Sytuację przedstawioną w zadaniu ilustruje poniższy rysunek (figura pomalowana jest na niebiesko).

Figura, której pole mamy obliczyć, składa się z trójkąta LEK oraz odcinka kołowego f.



Obliczamy pole P_{LEK} trójkąta LEK:

$\overrightarrow{EK}=[0, 6]$ $\overrightarrow{EL}=[-6, 6]$

$$P_{LEK}=\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} 0 & 6 \\ -6 & 6 \end{matrix}\right\|=\frac{1}{2}\cdot|36|=18$$

Pole P_f odcinka kołowego f obliczymy jako różnicę pola P_w wycinka kołowego odpowiadającego kątowi środkowemu α i pola P_{SKL} trójkąta SKL, czyli

$$P_f=P_w-P_{SKL}$$

$$P_f=\frac{\alpha}{360^\circ}\cdot\pi r^2-\frac{1}{2}\cdot r^2\cdot\sin\alpha=r^2\cdot\left(\frac{\alpha\cdot\pi}{360^\circ}-\frac{\sin\alpha}{2}\right),$$ gdzie r – promień koła

Korzystamy ze wzoru na sinus kąta utworzonego przez dwa niezerowe wektory

$\overrightarrow{SK} = [3, 7]$ i $\overrightarrow{SL} = [-3, 7]$

$$\sin\alpha = \frac{|3 \cdot 7 - 7 \cdot (-3)|}{\sqrt{58} \cdot \sqrt{58}} = \frac{42}{58} = \frac{21}{29} \quad (\approx 0{,}7241)$$

Z tablic odczytujemy, że $\alpha \approx 46°$.
Zatem

$$P_f \approx \left(\sqrt{58}\right)^2 \cdot \left(\frac{46° \cdot \pi}{360°} - \frac{21}{58}\right)$$

$$P_f \approx 58 \cdot \left(\frac{23\pi}{180} - \frac{21}{58}\right)$$

$$P_f \approx 2{,}3$$

Przystępujemy do obliczenia pola zamalowanej figury.

$$P = P_{LEK} + P_f \approx 18 + 2{,}3,$$

czyli

$$P \approx 20{,}3$$

Pole szukanej figury jest równe około 20,3.

Sprawdź, czy rozumiesz

1. Napisz równanie okręgu przechodzącego przez punkty $A(0,\ 0)$, $B(-6,\ 0)$, $C(-6,\ 8)$.
2. Podaj współrzędne środka i promień koła opisanego nierównością $x^2 + y^2 - 10x - 2y + 19 \leqslant 0$.
3. Napisz równanie okręgu o promieniu 6, współśrodkowego z okręgiem o_1: $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 5 = 0$. Oblicz pole pierścienia kołowego ograniczonego tymi okręgami.
4. Udowodnij, że jeśli $b \neq 4a$ i $a, b \in \boldsymbol{R}$, to równanie $x^2 + y^2 - 4ax - 2by - 12a^2 + 8ab = 0$ opisuje okrąg. Podaj współrzędne środka i długość promienia okręgu.
5. Dane są zbiory $A = \{(x, y):\ x^2 + y^2 - 6x - 2y + 6 \leqslant 0\}$ oraz $B = \{(x, y):\ x^2 + y^2 - 12x - 10y + 45 \leqslant 0\}$. W prostokątnym układzie współrzędnych zaznacz zbiory: A, B, $A \cup B$, $A \cap B$, $A - B$ oraz $B - A$.
6. Środek okręgu należy do prostej l, o równaniu $x - 5y - 30 = 0$, a okrąg przechodzi przez punkty wspólne prostej k: $x - y - 1 = 0$ i paraboli $y = x^2 - 6x + 5$. Napisz równanie okręgu i oblicz pole trójkąta równobocznego opisanego na tym okręgu.

Wzajemne położenie prostej i okręgu. Styczna do okręgu

Prosta może być styczną do okręgu, sieczną okręgu lub rozłączna z okręgiem. Aby określić wzajemne położenie prostej i okręgu wystarczy obliczyć odległość środka okręgu od prostej i porównać tę odległość z promieniem okręgu.

Przykład 1.

Określimy położenie prostej l: $3x + 4y - 2 = 0$ względem okręgu o: $x^2 + y^2 + 2x + 6y + 1 = 0$.

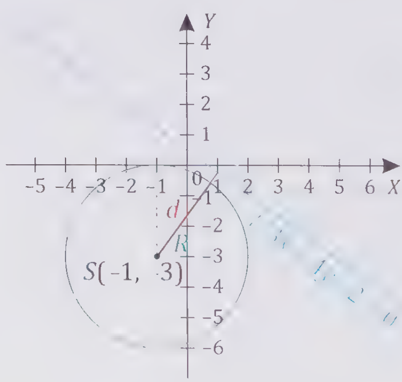
Sprowadzamy najpierw równanie okręgu $x^2 + y^2 + 2x + 6y + 1 = 0$ do postaci kanonicznej

$$(x + 1)^2 + (y + 3)^2 = 9,$$

skąd odczytujemy: współrzędne środka okręgu $S(-1, -3)$, promień r jest równy 3. Następnie obliczamy odległość punktu S od prostej l. Mamy:

$$d(S, l) = \frac{|3\cdot(-1) + 4\cdot(-3) - 2|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|-17|}{\sqrt{25}} = \frac{17}{5} = 3\frac{2}{5}$$

Ponieważ $r = 3$, zatem $d(S, l) > r$, czyli prosta l jest rozłączna z okręgiem. Poniższy rysunek ilustruje tę sytuację.



Przykład 2.

Wykażemy, że prosta l: $x + y = 0$ jest sieczną okręgu $x^2 + (y + 2)^2 = 4$. Wyznaczymy współrzędne punktów wspólnych okręgu i prostej. Następnie przez punkt $K(-5, 5)$ prostej l poprowadzimy styczną do okręgu w punkcie P i obliczymy długość odcinka KP (bez obliczania współrzędnych punktu P).

Okrąg ma środek w punkcie $S(0, -2)$ i promień $r = 2$.

$$d(S, l) = \frac{|0 - 2|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{|2|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

$$d(S, l) < r,$$

zatem prosta l jest sieczną okręgu.
Obliczamy współrzędne punktów wspólnych prostej i okręgu.

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x^2 + (y+2)^2 = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -x \\ x^2 + (-x+2)^2 = 4 \end{cases}$$

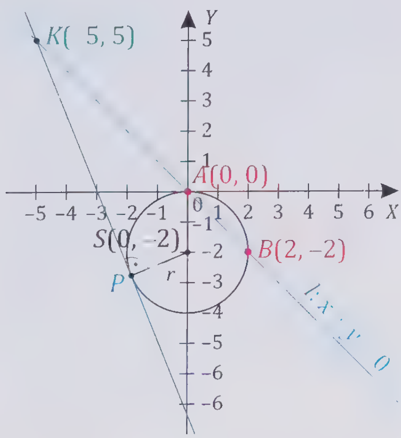
$$\begin{cases} y = -x \\ x^2 - 2x = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -x \\ x(x-2) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 0 \ \vee \ x = 2 \\ y = -x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 2 \\ y = -2 \end{cases}$$

Prosta l ma z okręgiem dwa punkty wspólne: $A(0, 0)$ i $B(2,\ \ 2)$. Sytuację tę ilustruje poniższy rysunek.



Aby obliczyć długość odcinka KP, skorzystamy z twierdzenia o stycznej i siecznej. Mamy:

$$|KP|^2 = |KB| \cdot |KA|$$

Obliczamy długości odcinków KB i KA:

$$|KB| = \sqrt{(2+5)^2 + (-2-5)^2} = \sqrt{49+49} = \sqrt{2 \cdot 49} = 7\sqrt{2}$$

$$|KA| = \sqrt{(0+5)^2 + (0-5)^2} = \sqrt{25+25} = \sqrt{2 \cdot 25} = 5\sqrt{2}$$

Zatem

$$|KP|^2 = 7\sqrt{2} \cdot 5\sqrt{2}$$

$$|KP|^2 = 70$$

$$|KP| = \sqrt{70}$$

Długość odcinka KP jest równa $\sqrt{70}$.

Przykład 3.

Wyznaczymy te wartości parametru m, $m \in \mathbf{R}$, dla których równanie $x^2 + y^2 - 2x + 4y - m = 0$ opisuje okrąg, a następnie zbadamy wzajemne położenie prostej $k: x + y - 3 = 0$ i okręgu, w zależności od wartości parametru m.

Równanie $x^2 + y^2 - 2x + 4y - m = 0$ jest równaniem okręgu w postaci zredukowanej, o ile $a^2 + b^2 - 4c > 0$, gdzie $a = -2$, $b = 4$, $c = -m$. Mamy więc

$(-2)^2 + 4^2 - 4(-m) > 0$, skąd

$m > -5$

Jeśli $m \in (-5, +\infty)$, to równanie $x^2 + y^2 - 2x + 4y - m = 0$ opisuje okrąg. Współrzędne środka S okręgu i długość promienia r obliczamy, korzystając ze wzorów:

$$x_S = -\frac{a}{2},\ y_S = -\frac{b}{2} \quad \text{oraz} \quad r = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 - 4c}}{2}$$

Otrzymujemy:

$$S(1, -2),\ r = \frac{\sqrt{4 + 16 + 4m}}{2} = \frac{2\sqrt{m+5}}{2} = \sqrt{m+5}$$

Aby określić wzajemne położenie prostej $k: x + y - 3 = 0$ i okręgu $(x-1)^2 + (y+2)^2 = m + 5$, gdzie $m \in (-5, +\infty)$, rozwiążemy układ równań z parametrem m:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x + 4y - m = 0 \\ x + y - 3 = 0 \end{cases}, \text{gdzie } m \in (-5, +\infty).$$

Po podstawieniu $(-x + 3)$ w miejsce y do równania $x^2 + y^2 - 2x + 4y - m = 0$ otrzymujemy równanie kwadratowe z parametrem m:

$x^2 + (-x+3)^2 - 2x + 4(-x+3) - m = 0$,

skąd

$2x^2 - 12x + 21 - m = 0$, gdzie $m \in (-5, +\infty)$

Liczba punktów wspólnych prostej k i okręgu zależy od liczby rozwiązań równania kwadratowego. Obliczamy wyróżnik równania kwadratowego:

$$\Delta = (-12)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (21 - m)$$

$$\Delta = 8m - 24$$

Prosta i okrąg mają:

- dwa punkty wspólne wtedy i tylko wtedy, gdy
  $[\Delta > 0 \wedge m \in (-5, +\infty)] \Leftrightarrow [8m - 24 > 0 \wedge m \in (-5, +\infty)] \Leftrightarrow m \in (3, +\infty)$
- jeden punkt wspólny wtedy i tylko wtedy, gdy
  $[\Delta = 0 \wedge m \in (-5, +\infty)] \Leftrightarrow [8m - 24 = 0 \wedge m \in (-5, +\infty)] \Leftrightarrow m = 3$
- zero punktów wspólnych wtedy i tylko wtedy, gdy
  $[\Delta < 0 \wedge m \in (-5, +\infty)] \Leftrightarrow [8m - 24 < 0 \wedge m \in (-5, +\infty)] \Leftrightarrow m \in (-5, 3)$

Prosta $k: x + y - 3 = 0$ jest sieczną okręgu wtedy, gdy $m \in (3, +\infty)$;
jest styczną do okręgu wtedy, gdy $m = 3$;
nie ma punktów wspólnych z okręgiem wtedy, gdy $m \in (-5, 3)$.

Przykład 4.

Prosta l o równaniu $12x - 5y - 5 = 0$ jest styczna do okręgu o promieniu 2. Wyznaczymy równanie tego okręgu, wiedząc, że jego środek należy do prostej k o równaniu $2x - 5y + 5 = 0$.

Oznaczamy współrzędne S środka okręgu jako (a, b). Punkt S należy do prostej $k: y = \frac{2}{5}x + 1$, więc jego współrzędne można zapisać w postaci

$$\left(a, \frac{2}{5}a + 1\right), \text{ gdzie } a \in \boldsymbol{R}$$

Prosta $l: 12x - 5y - 5 = 0$ jest styczna do okręgu, zatem odległość punktu S od prostej l jest równa 2. Otrzymujemy równanie:

$$\frac{\left|12 \cdot a - 5 \cdot \left(\frac{2}{5}a + 1\right) - 5\right|}{\sqrt{12^2 + (-5)^2}} = 2$$

$$|10a - 10| = 26$$

$$|a - 1| = 2{,}6$$

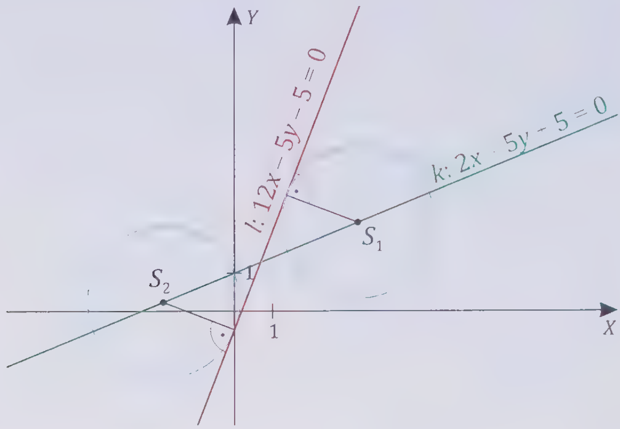
$$a = 3{,}6 \vee a = -1{,}6$$

- jeśli $a = 3{,}6$, to $b = 0{,}4 \cdot 3{,}6 + 1$, czyli $b = 2{,}44$, zatem
  $S_1(3{,}6;\ 2{,}44)$
- jeśli $a = -1{,}6$, to $b = 0{,}4 \cdot (-1{,}6) + 1$, czyli $b = 0{,}36$, zatem
  $S_2(-1{,}6;\ 0{,}36)$

Otrzymaliśmy dwa okręgi spełniające warunki zadania:

o_1: $(x-3{,}6)^2+(y-2{,}44)^2=4$ oraz o_2: $(x+1{,}6)^2+(y-0{,}36)^2=4$

Sytuację tę ilustruje poniższy rysunek.



Przykład 5.

Wyznaczymy równania stycznych do okręgu o równaniu $\left(x-2\sqrt{3}\right)^2+(y-1)^2=16$, jeśli styczne te są nachylone do osi OX pod kątem 120°.

Stycznych do okręgu szukamy wśród prostych opisanych równaniem $y=ax+b$, gdzie $a=\operatorname{tg}120^\circ$ i $b\in\mathbf{R}$. Ze wzoru redukcyjnego obliczamy współczynnik kierunkowy prostej:

$$a=\operatorname{tg}120^\circ=-\operatorname{tg}60^\circ=-\sqrt{3}$$

Zatem rodzinę prostych, wśród których szukamy stycznych, możemy opisać równaniem

$$y=-\sqrt{3}x+b$$

Wiemy, że odległość środka $S\left(2\sqrt{3},1\right)$ okręgu od stycznej jest równa 4 (bo $r=4$).

Sprowadzamy równanie prostej do postaci ogólnej $\sqrt{3}x+y-b=0$ i korzystamy ze wzoru na odległość punktu od prostej. Mamy:

$$d=\frac{\left|\sqrt{3}\cdot 2\sqrt{3}+1-b\right|}{\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+1^2}}=\frac{|7-b|}{2}$$

Ponieważ $d=r$, więc otrzymujemy równanie

$$\frac{|7-b|}{2}=4$$

Teraz możemy obliczyć współczynnik b:

$$|7-b|=8$$

$$7-b=-8 \ \vee \ 7-b=8$$

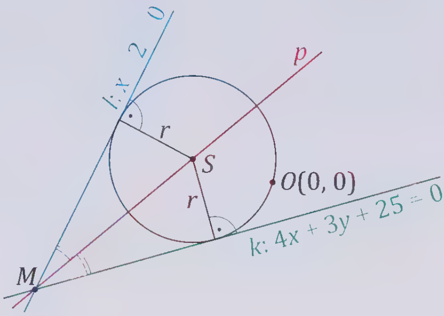
$$b=15 \qquad \vee \ b=-1$$

Otrzymaliśmy dwie styczne spełniające warunki zadania: $y=-\sqrt{3}\,x+15$ oraz $y=-\sqrt{3}\,x-1$.

Przykład 6.

Wyznaczymy równanie okręgu przechodzącego przez początek układu współrzędnych i stycznego do prostych k: $4x+3y+25=0$ oraz l: $x-2=0$.

Okrąg jest styczny do prostych k i l oraz przechodzi przez punkt O, więc jego środek S należy do dwusiecznej p kąta wyznaczonego przez proste k i l, w obszarze którego znajduje się punkt O (zobacz rysunek obok).



Proste k: $4x+3y+25=0$ oraz l: $x-2=0$ wyznaczają na płaszczyźnie cztery kąty wypukłe, które można opisać odpowiednimi układami nierówności liniowych (napisz je!). Punkt $O(0, 0)$ należy do kąta opisanego układem nierówności

$$\begin{cases} x \leqslant 2 \\ y \geqslant -\dfrac{4}{3}x-\dfrac{25}{3} \end{cases} \qquad \text{(sprawdź!)}$$

Oznaczmy: $S(a, b)$ – środek szukanego okręgu. Punkt S jest różny od punktu M (punktu wspólnego prostych k i l) i nie należy do ramion kąta, zatem jego współrzędne spełniają warunki:

$$a<2 \ \text{ i } \ b>-\frac{4}{3}a-\frac{25}{3},$$

czyli

(*) $\qquad a<2 \ \text{ i } \ 4a+3b+25>0$

Z warunków zadania wiemy, że środek $S(a, b)$ okręgu jest równo odległy od prostych k i l, więc

$$d(S,k)=d(S,l)$$

$$\frac{|4a+3b+25|}{\sqrt{4^2+3^2}}=|a-2|$$

$$|4a+3b+25|=5|a-2|$$

Z założenia (*) mamy:

$4a + 3b + 25 > 0$, więc $|4a + 3b + 25| = 4a + 3b + 25$

$a < 2$, więc $5|a - 2| = -5a + 10$

Otrzymujemy:

$4a + 3b + 25 = -5a + 10$

(1) $3a + b + 5 = 0$

Ponadto odległość środka okręgu $S(a, b)$ od punktu $O(0, 0)$ jest równa odległości punktu S od prostej l (k). Zatem

$d(S, l) = |SO|$

$|a - 2| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Po podniesieniu stron równania do kwadratu (obie są nieujemne) otrzymujemy równanie równoważne danemu:

$(a - 2)^2 = a^2 + b^2$

$a^2 - 4a + 4 = a^2 + b^2$

(2) $b^2 + 4a - 4 = 0$

Warunki zadania są spełnione wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$\begin{cases} (1) \quad 3a + b + 5 = 0 \\ (2) \quad b^2 + 4a - 4 = 0 \end{cases}$$

Otrzymany układ równań rozwiążemy metodą przez podstawienie. Z pierwszego równania wyznaczamy $b = -3a - 5$ i podstawiamy $(-3a - 5)$ do drugiego równania w miejsce b. Mamy

$(-3a - 5)^2 + 4a - 4 = 0$

$9a^2 + 34a + 21 = 0$

$\Delta = 400 \qquad \sqrt{\Delta} = 20$

$a_1 = -3,\ a_2 = -\frac{7}{9}$

Jeśli $a = -3$, to $b = -3 \cdot (-3) - 5 = 4$, czyli

$S_1(-3, 4)$

Jeśli $a = -\frac{7}{9}$, to $b = -3 \cdot \left(-\frac{7}{9}\right) - 5 = -2\frac{2}{3}$, czyli

$S_2\left(-\frac{7}{9}, -2\frac{2}{3}\right)$

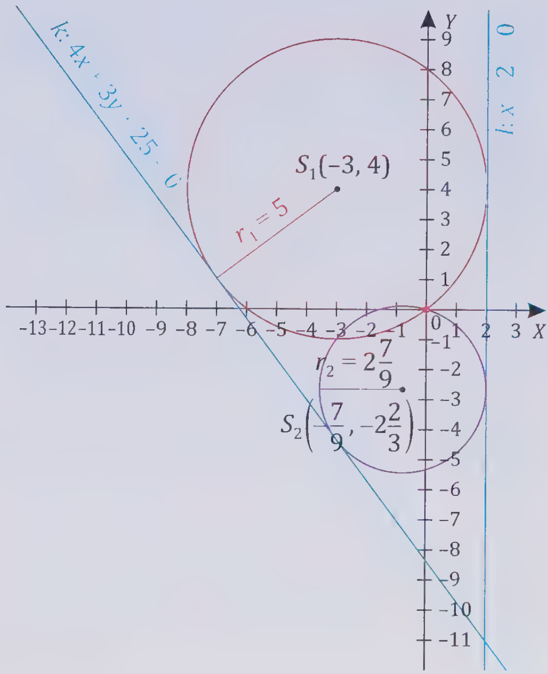
Otrzymaliśmy dwa okręgi spełniające warunki zadania: jeden o środku $S_1(-3, 4)$, drugi o środku $S_2\left(-\frac{7}{9}, -2\frac{2}{3}\right)$.

Obliczamy promienie r_1 i r_2 tych okręgów:

$$r_1 = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5 \qquad r_2 = \sqrt{\left(-\frac{7}{9}\right)^2 + \left(-\frac{8}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{625}{81}} = \frac{25}{9} = 2\frac{7}{9}$$

Warunki zadania spełniają okręgi: o_1: $(x+3)^2 + (y-4)^2 = 25$ oraz
o_2: $\left(x + \frac{7}{9}\right)^2 + \left(y + 2\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{625}{81}$.

Sytuację tę przedstawia rysunek obok.



Sprawdź, czy rozumiesz

1. Określ wzajemne położenie prostej i okręgu, jeśli:
   a) $k: x + y - 2 = 0$ $\qquad o: x^2 + y^2 + 6x + 4y + 4 = 0$
   b) $k: 3x - 4y + 12 = 0$ $\qquad o: x^2 + y^2 - 8y + 12 = 0$

2. Wykaż, że prosta $k: x - y = 0$ jest styczna do okręgu $x^2 + y^2 - 2x + 10y + 8 = 0$. Oblicz współrzędne punktu styczności.

3. Wyznacz zbiór tych wartości parametru m, $m \in \mathbf{R}$, dla których równanie $x^2 + y^2 - 12x + 4y + m^2 - 1 = 0$ opisuje okrąg. Zbadaj wzajemne położenie prostej $k: 4x - 3y - 5 = 0$ i okręgu w zależności od wartości parametru m.

4. Napisz równania stycznych do okręgu o równaniu $\left(x + \sqrt{3}\right)^2 + (y-4)^2 = 16$ i nachylonych do osi OX pod kątem 150°. Podaj te równania w postaci kierunkowej.

5. Napisz równania stycznych do okręgu o równaniu $x^2 + y^2 + 8x - 2y + 4 = 0$ przechodzących przez punkt $A(3, 10)$. Podaj te równania w postaci ogólnej.

Wzajemne położenie dwóch okręgów

W klasie pierwszej poznałeś twierdzenia, które pozwalają określić wzajemne położenie dwóch okręgów. Przypominamy dwa okręgi $o_1(S_1, r_1)$ i $o_2(S_2, r_2)$:

- są rozłączne zewnętrznie wtedy i tylko wtedy, gdy $|S_1S_2| > r_1 + r_2$
- są styczne zewnętrznie wtedy i tylko wtedy, gdy $|S_1S_2| = r_1 + r_2$
- przecinają się wtedy i tylko wtedy, gdy $|r_1 - r_2| < |S_1S_2| < r_1 + r_2$
- są styczne wewnętrznie wtedy i tylko wtedy, gdy $|S_1S_2| = |r_1 - r_2| \neq 0$
- są rozłączne wewnętrznie wtedy i tylko wtedy, gdy $|S_1S_2| < |r_1 - r_2|$.

Przykład 1.

Określimy wzajemne położenie dwóch okręgów

$$o_1\colon x^2 + y^2 - 2\sqrt{3}\,x + 2 = 0 \quad \text{oraz} \quad o_2\colon (x-2)^2 + (y+3)^2 = 25.$$

Po sprowadzeniu równania okręgu o_1 do postaci kanonicznej

$$\left(x - \sqrt{3}\right)^2 + y^2 = 1$$

stwierdzamy, że środek okręgu ma współrzędne $S_1\left(\sqrt{3}, 0\right)$, natomiast $r_1 = 1$. Okrąg o_2 ma środek w punkcie $S_2(2, -3)$ i promień $r_2 = 5$. Odległość między środkami okręgów o_1 i o_2 wynosi:

$$|S_1S_2| = \sqrt{\left(2 - \sqrt{3}\right)^2 + 9} = \sqrt{16 - 4\sqrt{3}} = 2\sqrt{4 - \sqrt{3}}$$

Obliczamy sumę promieni

$$r_1 + r_2 = 6$$

oraz wartość bezwzględną różnicy promieni

$$|r_1 - r_2| = 4$$

Łatwo stwierdzić, że

$$|S_1S_2| < r_1 + r_2$$

Porównajmy więc liczby 4 oraz $2\sqrt{4 - \sqrt{3}}$. Zauważmy, że

$$\sqrt{4 - \sqrt{3}} < \sqrt{4} \quad /\cdot 2$$

$$2\sqrt{4 - \sqrt{3}} < 2 \cdot 2$$

$$2\sqrt{4 - \sqrt{3}} < 4, \text{ czyli}$$

$$|S_1S_2| < |r_1 - r_2|$$

Okręgi o_1 i o_2 są rozłączne wewnętrznie.

Przykład 2.

Wyznaczymy te wartości parametru m, $m \in \boldsymbol{R}$, dla których okręgi o_1: $(x+2)^2+(y-m)^2=9$ i o_2: $(x+m)^2+(y-1)^2=4$ mają tylko jeden punkt wspólny.

Dwa okręgi mają jeden punkt wspólny wtedy i tylko wtedy, gdy są styczne wewnętrznie lub są styczne zewnętrznie. Środkiem okręgu o_1 jest punkt $S_1(-2, m)$, promień r_1 jest równy 3, a środkiem okręgu o_2 jest punkt $S_2(-m, 1)$, a promień r_2 tego okręgu jest równy 2.

Rozważymy dwa przypadki:

I. $|S_1S_2|=r_1+r_2$ (okręgi są styczne zewnętrznie) oraz
II. $|S_1S_2|=|r_1-r_2|$ (okręgi są styczne wewnętrznie).

Ad I.
Obliczamy:

$$|S_1S_2|=\sqrt{(-m+2)^2+(1-m)^2}=\sqrt{2m^2-6m+5}$$

$$r_1+r_2=3+2=5$$

Zatem

$$|S_1S_2|=r_1+r_2,$$

czyli

$$\sqrt{2m^2-6m+5}=5$$

Po podniesieniu obu stron równania do kwadratu (obie strony są dodatnie) otrzymujemy równanie równoważne danemu:

$$2m^2-6m+5=25,$$

skąd

$$m^2-3m-10=0$$

$$(m-5)(m+2)=0$$

$$m=5 \quad \vee \quad m=-2$$

- Jeśli $m=5$, to otrzymamy dwa okręgi

  o_1: $(x+2)^2+(y-5)^2=9$ i o_2: $(x+5)^2+(y-1)^2=4$,

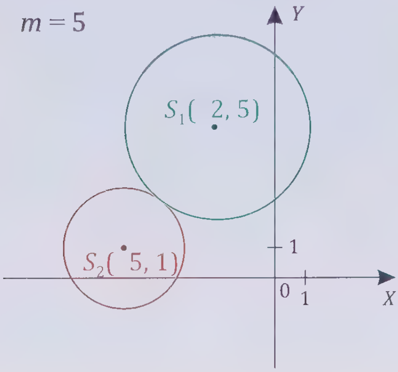
które są styczne zewnętrznie.

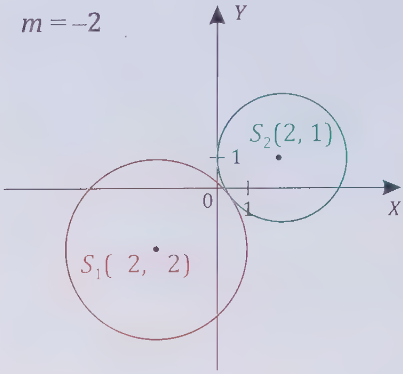
- Jeśli $m=-2$, to otrzymamy dwa okręgi

  o_1: $(x+2)^2+(y+2)^2=9$ i o_2: $(x-2)^2+(y-1)^2=4$,

które są styczne zewnętrznie.

Poniższe rysunki ilustrują tę sytuację.





Ad II.

Okręgi o_1 i o_2 są wewnętrznie styczne wtedy i tylko wtedy, gdy $|S_1S_2| = |r_1 - r_2|$. Otrzymujemy równanie

$$\sqrt{2m^2 - 6m + 5} = 1,$$

skąd

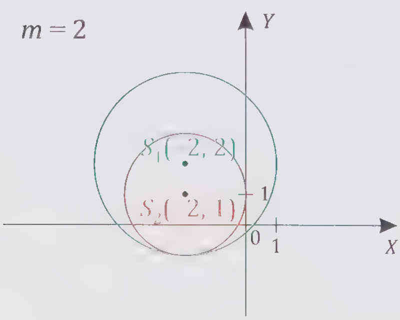
$$m^2 - 3m + 2 = 0$$

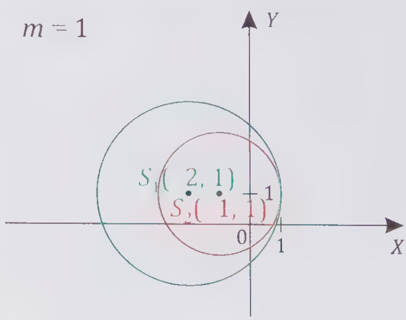
$$(m-2)(m-1) = 0$$

$$m = 2 \quad \vee \quad m = 1$$

- Jeśli $m = 2$, to mamy okręgi o_1: $(x+2)^2 + (y-2)^2 = 9$ oraz o_2: $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 4$.
- Jeśli $m = 1$, to mamy okręgi o_1: $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 9$ oraz o_2: $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 4$.

Sytuację, w której okręgi o_1 i o_2 są wewnętrznie styczne, ilustruje rysunek poniżej.





Przykład 3.

Udowodnimy, że obrazem okręgu o: $(x-1)^2+(y+2)^2=1$ w przekształceniu P określonym wzorem $P((x,y))=(2x+1,3-2y)$, gdzie $x,y\in \boldsymbol{R}$, jest okrąg. Następnie zbadamy wzajemne położenie obu okręgów na płaszczyźnie i wyznaczymy równanie osi symetrii figury będącej sumą danego okręgu i jego obrazu.

Weźmy dowolny punkt $A(x, y)$ należący do danego okręgu. Jego obrazem w przekształceniu P jest punkt $A_1(x_1, y_1)$, gdzie

$$x_1=2x+1 \text{ i } y_1=3-2y.$$

Z otrzymanych zależności wyznaczamy x i y, a następnie podstawiamy do równania danego okręgu. Otrzymujemy:

$$x=\frac{x_1-1}{2} \quad \text{i} \quad y=\frac{3-y_1}{2}$$

Zatem

$$\left(\frac{x_1-1}{2}-1\right)^2+\left(\frac{3-y_1}{2}+2\right)^2=1$$

$$\frac{(x_1-3)^2}{4}+\frac{(7-y_1)^2}{4}=1 \quad /\cdot 4$$

$$(x_1-3)^2+(y_1-7)^2=4$$

Otrzymane równanie jest równaniem okręgu.
Obrazem okręgu o środku $S(1,-2)$ i promieniu $r=1$ jest okrąg o środku $S_1(3, 7)$ i promieniu $r_1=2$, co kończy dowód.

Obliczamy odległość między środkami okręgów

$$|SS_1|=\sqrt{(3-1)^2+(7+2)^2}=\sqrt{85}, \text{ zaś } r_1+r_2=3.$$

Ponieważ $|SS_1|>r_1+r_2$, więc okręgi są rozłączne zewnętrznie.
Okrąg i jego obraz mają różne środki i różne promienie, zatem figura będąca sumą tych okręgów ma tylko jedną oś symetrii. Jest nią prosta k przechodząca przez punkty $S(1,-2)$ i $S_1(3, 7)$.
Wyznaczamy spółczynnik kierunkowy prostej k.

$$a=\frac{7-(-2)}{3-1}=\frac{9}{2}$$

Równanie prostej k ma postać:

$$y-7=\frac{9}{2}(x-3), \text{ czyli}$$

$$y=4\frac{1}{2}x-6\frac{1}{2}$$

Oś symetrii figury będącej sumą danego okręgu i jego obrazu w przekształceniu P opisuje równanie $y = 4\frac{1}{2}x - 6\frac{1}{2}$.

Przykład 4.

Wyznaczymy współrzędne punktów wspólnych dwóch okręgów:

$o_1\colon x^2 + y^2 - 4y = 0$ oraz $o_2\colon x^2 + y^2 - 8x - 12y + 32 = 0$.

W tym celu rozwiążemy układ równań:

$$-\begin{cases} x^2 + y^2 - 4y = 0 \\ x^2 + y^2 - 8x - 12y + 32 = 0 \end{cases}$$

$$-4y + 8x + 12y - 32 = 0$$

$$8x + 8y - 32 = 0 \quad /:8$$

$$x + y - 4 = 0$$

Odejmujemy równania układu stronami i porządkujemy otrzymane równanie.

$$\begin{cases} x + y - 4 = 0 \\ x^2 + y^2 - 4y = 0 \end{cases}$$

Z otrzymanego równania i dowolnego z równań wyjściowego układu równań tworzymy nowy układ równań, który rozwiązujemy metodą podstawiania.

$$\begin{cases} y = -x + 4 \\ x^2 + y^2 - 4y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x + 4 \\ x^2 + (-x + 4)^2 - 4(-x + 4) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x + 4 \\ x^2 - 2x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

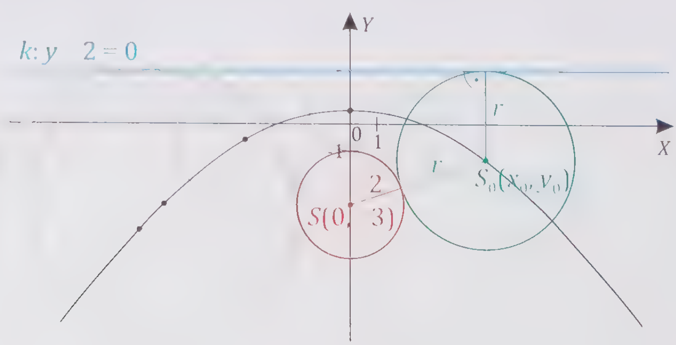
$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -x + 4 \\ x = 0 \vee x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 4 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases}$$

Okręgi przecinają się w dwóch punktach $A(0, 4)$ i $B(2, 2)$.

Przykład 5.

Wyznaczymy równanie zbioru środków wszystkich okręgów stycznych zewnętrznie do okręgu $o\colon x^2 + (y + 3)^2 = 4$ i jednocześnie stycznych do prostej $k\colon y - 2 = 0$.

Najpierw wykonamy rysunek ilustrujący treść zadania.



Niech punkt $S_0(x_0, y_0)$ będzie jednym z nieskończenie wielu środków okręgów stycznych do prostej $k: y = 2$ i jednocześnie stycznych do okręgu o środku $S(0, -3)$ i promieniu 2. Zauważmy, że rzędna środka każdego z takich okręgów jest mniejsza od 2, więc

$$y_0 < 2$$

Okrąg o środku $S_0(x_0, y_0)$ jest styczny do prostej $k: y - 2 = 0$, więc odległość środka S_0 od prostej k jest równa promieniowi okręgu r. Mamy:

$$r = d(S_0, k) = \frac{|y_0 - 2|}{\sqrt{0^2 + 1^2}} = |y_0 - 2|, \text{ gdzie } y_0 < 2, \text{ więc } r = 2 - y_0$$

Okrąg o środku $S_0(x_0, y_0)$ i promieniu $r = 2 - y_0$ jest styczny zewnętrznie do okręgu o środku $S(0, -3)$ i promieniu 2, zatem

$$|S_0S| = 2 - y_0 + 2 = 4 - y_0,$$

czyli

$$\sqrt{x_0^2 + (3 + y_0)^2} = 4 - y_0, \text{ gdzie } y_0 < 2$$

Po podniesieniu stron równości do kwadratu (obie są dodatnie) otrzymujemy równość równoważną danej:

$$x_0^2 + (3 + y_0)^2 = (4 - y_0)^2$$

$$x_0^2 + 9 + 6y_0 + y_0^2 = 16 - 8y_0 + y_0^2, \quad \text{skąd}$$

$$14y_0 = -x_0^2 + 7$$

$$y_0 = -\frac{1}{14}x_0^2 + \frac{1}{2}$$

Środki wszystkich okręgów stycznych zewnętrznie do okręgu $o: x^2 + (y + 3)^2 = 4$ i jednocześnie stycznych do prostej $k: y - 2 = 0$ należą do paraboli o równaniu

$$y = -\frac{1}{14}x^2 + \frac{1}{2}.$$

Sprawdź, czy rozumiesz

1. Określ wzajemne położenie okręgów o_1 i o_2, jeśli:
   a) $o_1: x^2 + y^2 - 4x + 6y + 4 = 0$ i $o_2: x^2 + y^2 - 2x + 2y + 4 = 0$
   b) $o_1: x^2 + y^2 + 6x + 5 = 0$ i $o_2: x^2 + y^2 + 4x - 2y - 3 = 0$
   c) $o_1: x^2 + y^2 + 8x - 4y = 0$ i $o_2: x^2 + y^2 - 8x - 12y + 32 = 0$.
2. Wyznacz te wartości parametru m, dla których okręgi $o_1: x^2 + y^2 - 4mx - 2y + 4m^2 - 3 = 0$, $o_2: x^2 + y^2 + 6x + 2my + m^2 + 8 = 0$ są rozłączne zewnętrznie.
3. Wyznacz współrzędne punktów wspólnych dwóch okręgów $o_1: (x - 3)^2 + (y - 6)^2 = 73$, $o_2: x^2 + y^2 - 6x + 8y + 12 = 0$.
4. Wykaż, że obrazem okręgu $o: x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$ w przekształceniu określonym wzorem $P((x, y)) = (-x, y + 1)$, gdzie $x, y \in \boldsymbol{R}$, jest okrąg przystający do danego. Napisz równania osi symetrii figury będącej sumą danego okręgu i jego obrazu.

Jednokładność. Jednokładność w układzie współrzędnych

W klasie pierwszej poznałeś różne przekształcenia płaszczyzny. Niektóre z nich, takie jak: symetria osiowa względem prostej, symetria środkowa względem punktu czy przesunięcie równoległe o wektor, zachowują odległość między punktami i nazywamy je izometriami. Inne nie zachowują odległości między punktami, np. rzut równoległy na prostą czy powinowactwo prostokątne o danej osi i skali różnej od 1 i różnej od (–1). Są to przekształcenia nieizometryczne.

W tym temacie poznasz określenie i własności jeszcze jednego przekształcenia płaszczyzny zwanego jednokładnością.

Definicja 1.

Jednokładnością o środku w punkcie S i skali k, $k \neq 0$, nazywamy takie przekształcenie płaszczyzny, które każdemu punktowi A płaszczyzny przyporządkowuje taki punkt A_1, że

$$\overrightarrow{SA_1} = k \cdot \overrightarrow{SA}.$$

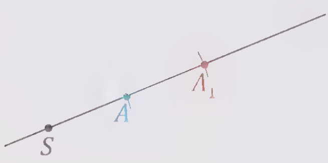
Jednokładność taką będziemy oznaczać J_S^k. Punkt A_1 nazywamy obrazem punktu A.

Przykład 1.

Na płaszczyźnie dany jest punkt S oraz punkt A, różny od S. Znajdziemy obraz A_1 punktu A w jednokładności o środku w punkcie S i skali:

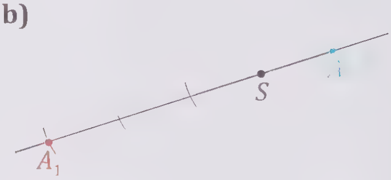
a) $k = 2$ b) $k = -3$.

Ad a)



Z definicji jednokładności: $A_1 = J_S^2(A)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\overrightarrow{SA_1} = 2 \cdot \overrightarrow{SA}$. Zatem punkt A_1 znajduje się na prostej SA, po tej samej stronie punktu S co punkt A oraz $|SA_1| = 2 \cdot |SA|$.

Ad b)



W tym przypadku $A_1 = J_S^{-3}(A)$, więc $\overrightarrow{SA_1} = -3 \cdot \overrightarrow{SA}$. Zatem punkt A_1 znajduje się na prostej SA, po przeciwnej stronie punktu S niż punkt A oraz $|SA_1| = 3 \cdot |SA|$.

Zauważ, że jednokładność o skali 1 jest przekształceniem tożsamościowym, natomiast jednokładność o skali –1 jest symetrią środkową (względem środka jednokładności).

Poznamy teraz twierdzenia charakteryzujące jednokładność.

Twierdzenie 1.

Obrazem wektora $\overrightarrow{AB}$ w jednokładności J_S^k jest wektor do niego równoległy $\overrightarrow{A_1B_1}$, gdzie $A_1 = J_S^k(A)$ i $B_1 = J_S^k(B)$. Ponadto $\left|\overrightarrow{A_1B_1}\right| = |k| \cdot \left|\overrightarrow{AB}\right|$.

Założenie: $A_1 = J_S^k(A)$, $B_1 = J_S^k(B)$, $k \neq 0$

Teza: $\overrightarrow{A_1B_1} = k \cdot \overrightarrow{AB}$ i $\left|\overrightarrow{A_1B_1}\right| = |k| \cdot \left|\overrightarrow{AB}\right|$

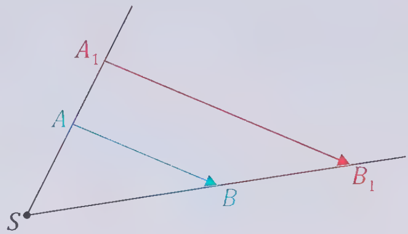
Dowód:

Zauważmy, że $\overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{A_1S} + \overrightarrow{SB_1}$,

czyli $\overrightarrow{A_1B_1} = -\overrightarrow{SA_1} + \overrightarrow{SB_1}$.

Z definicji jednokładności wiemy, że

$\overrightarrow{SA_1} = k \cdot \overrightarrow{SA}$ i $\overrightarrow{SB_1} = k \cdot \overrightarrow{SB}$, zatem



$$\overrightarrow{A_1B_1} = -k \cdot \overrightarrow{SA} + k \cdot \overrightarrow{SB}$$

$$\overrightarrow{A_1B_1} = k \cdot \overrightarrow{AS} + k \cdot \overrightarrow{SB}$$

$$\overrightarrow{A_1B_1} = k \cdot \left(\overrightarrow{AS} + \overrightarrow{SB}\right)$$

$\overrightarrow{A_1B_1} = k \cdot \overrightarrow{AB}$, skąd wynika, że wektory $\overrightarrow{A_1B_1}$ i $\overrightarrow{AB}$ są równoległe

oraz $\left|\overrightarrow{A_1B_1}\right| = |k| \cdot \left|\overrightarrow{AB}\right|$, co kończy dowód.

Twierdzenie 2.

Jeśli $A_1 = J_S^k(A)$ i $B_1 = J_S^k(B)$, $A \neq B$, to obrazem prostej AB w tej jednokładności jest prosta A_1B_1 równoległa do prostej AB, zaś obrazem odcinka AB – równoległy do niego odcinek A_1B_1.

Założenie: $A_1 = J_S^k(A)$, $B_1 = J_S^k(B)$, $k \neq 0$

Teza: prosta A_1B_1 jest równoległa do prostej AB i odcinek A_1B_1 jest równoległy do odcinka AB

Dowód:

Punkt X leży na prostej AB wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taka liczba p, dla której

$$\overrightarrow{AX} = p \cdot \overrightarrow{AB}$$

Niech $X_1 = J_S^k(X)$. Z poprzedniego twierdzenia wynika, że

$\overrightarrow{A_1X_1} = k \cdot \overrightarrow{AX}$, czyli $\overrightarrow{A_1X_1} = k \cdot \left(p \cdot \overrightarrow{AB}\right)$

Otrzymujemy:

$$\overrightarrow{A_1X_1} = k \cdot \left(p \cdot \overrightarrow{AB}\right) = p \cdot \left(k \cdot \overrightarrow{AB}\right) = p \cdot \overrightarrow{A_1B_1},$$

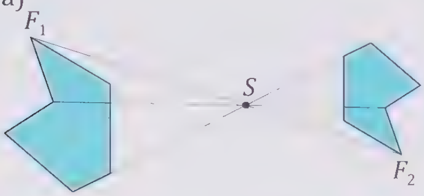
więc X_1 należy do prostej A_1B_1. Zatem punkt X należy do prostej AB wtedy i tylko wtedy, gdy punkt X_1 należy do prostej A_1B_1, co dowodzi, że (wobec równoległości wektorów $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{A_1B_1}$) proste AB i A_1B_1 są równoległe.
Podobny dowód można przeprowadzić dla odcinka.

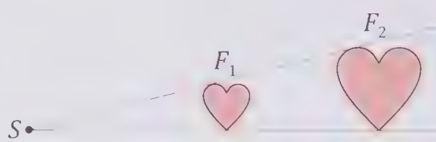
Prawdziwe jest również kolejne twierdzenie, które przyjmujemy bez dowodu.

Twierdzenie 3.
Obrazem kąta w jednokładności jest kąt do niego przystający (czyli kąt o tej samej mierze).

Definicja 2.
Figury F_1 i F_2 nazywamy **figurami jednokładnymi**, jeśli istnieje jednokładność J_S^k przekształcająca figurę F_1 na F_2.

Poniższe rysunki ilustrują pary figur jednokładnych. Punkt S na każdym rysunku oznacza środek jednokładności.

a)


b)


Rozpatrzymy teraz jednokładność na płaszczyźnie z prostokątnym układem współrzędnych. Załóżmy, że dany jest punkt $A(x, y)$ oraz punkt $S(a, b)$. Rozważymy jednokładność o środku w punkcie S i skali k, $k \neq 0$. Wyznaczymy współrzędne obrazu $A_1(x_1, y_1)$ punktu A w tej jednokładności.

Z definicji jednokładności: $A_1 = J_S^k(X)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\overrightarrow{SA_1} = k \cdot \overrightarrow{SA}$.
Obliczamy współrzędne wektorów:

$$\overrightarrow{SA_1} = [x_1 - a, y_1 - b] \quad \text{oraz} \quad \overrightarrow{SA} = [x - a, y - b]$$

Zatem

$$[x_1 - a, y_1 - b] = k \cdot [x - a, y - b]$$

$$[x_1 - a, y_1 - b] = [kx - ka, ky - kb],$$

skąd

$$x_1 - a = kx - ka \quad \text{i} \quad y_1 - b = ky - kb$$

$$x_1 = kx - ka + a \quad \text{i} \quad y_1 = ky - kb + b$$

$$x_1 = kx + (1 - k)a \quad \text{i} \quad y_1 = ky + (1 - k)b$$

Udowodniliśmy twierdzenie.

Twierdzenie 4.

Obrazem punktu $A(x, y)$ w jednokładności o środku $S(a, b)$ i skali k, $k \neq 0$, jest punkt $A_1(x_1, y_1)$, dla którego $x_1 = kx + (1-k)a$ i $y_1 = ky + (1-k)b$.

Z powyższego twierdzenia wynika następujący wniosek.

Wniosek: W jednokładności o środku $O(0, 0)$ i skali k, $k \neq 0$, obrazem punktu $A(x, y)$ jest taki punkt $A_1(x_1, y_1)$, dla którego $x_1 = k \cdot x$ i $y_1 = k \cdot y$.

Przykład 2.

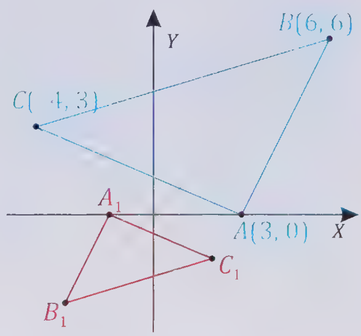
Wyznaczymy współrzędne wierzchołków oraz pole trójkąta $A_1B_1C_1$, który jest obrazem trójkąta ABC, w jednokładności $J_O^{0,5}$, gdzie $O(0, 0)$, wiedząc, że $A(3, 0)$, $B(6, 6)$, $C(-4, 3)$.

Współrzędne wierzchołków trójkąta $A_1B_1C_1$ obliczamy, korzystając z wniosku:

$$A_1\left(-\frac{1}{2}\cdot 3,\ -\frac{1}{2}\cdot 0\right),\ \text{czyli } A_1\left(-1\frac{1}{2},\ 0\right)$$

$$B_1\left(-\frac{1}{2}\cdot 6,\ -\frac{1}{2}\cdot 6\right),\ \text{czyli } B_1(-3, -3)$$

$$C_1\left(-\frac{1}{2}\cdot(-4),\ -\frac{1}{2}\cdot 3\right),\ \text{czyli } C_1\left(2, -1\frac{1}{2}\right)$$



Trójkąt $A_1B_1C_1$ jest podobny do trójkąta ABC w skali $k_1 = \left|-\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$ (dlaczego?). Zatem

$$P_{A_1B_1C_1} = \frac{1}{4}\cdot P_{ABC} \qquad P_{ABC} = \frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} 3 & 6 \\ -7 & 3 \end{matrix}\right\| = \frac{1}{2}\cdot|9+42| = \frac{51}{2},\ \text{stąd}$$

$$P_{A_1B_1C_1} = \frac{1}{4}\cdot\frac{51}{2} = \frac{51}{8} = 6\frac{3}{8}$$

Wierzchołki trójkąta $A_1B_1C_1$ mają współrzędne $A_1\left(-1\frac{1}{2},\ 0\right)$, $B_1(-3, -3)$, $C_1\left(2, -1\frac{1}{2}\right)$.

Pole trójkąta $A_1B_1C_1$ jest równe $6\frac{3}{8}$.

Prawdziwe jest twierdzenie.

Twierdzenie 5.

Dowolne dwa okręgi są jednokładne.

Przykład 3.

W prostokątnym układzie współrzędnych dane są dwa okręgi o_1: $(x-1)^2+(y-2)^2=1$ oraz o_2: $(x+4)^2+(y+1)^2=9$. Wiadomo, że $o_2 = J_S^k(o_1)$, gdzie $S(a, b)$ i $k \neq 0$. Wyznaczymy współrzędne środka jednokładności S oraz skalę jednokładności k.

Rozważymy dwa przypadki:
I. skala jednokładności jest liczbą dodatnią oraz
II. skala jednokładności jest liczbą ujemną.
Okrąg o_1 ma środek w punkcie $O_1(1, 2)$ i promień $r_1 = 1$; okrąg o_2 ma środek w punkcie $O_2(-4, -1)$ i promień $r_2 = 3$.
Niech punkt $S(a, b)$ będzie środkiem jednokładności o skali k, $k \neq 0$, która przekształca okrąg o_1 na okrąg o_2. Na okręgu o_1 wybieramy dowolny punkt A_1; punkt A_2 należący do okręgu o_2 jest obrazem punktu A_1 w tej samej jednokładności.

$$|O_1A_1| = r_1 = 1 \text{ oraz } |O_2A_2| = r_2 = 3$$

Z twierdzenia 1. wiemy, że $|O_2A_2| = |k| \cdot |O_1A_1|$, czyli

$$|k| = 3$$

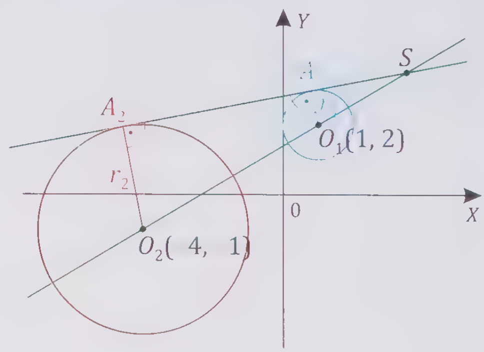
Zatem w I przypadku skala jednokładności jest równa 3, a w II przypadku skala jednokładności jest równa –3. Sytuację tę ilustrują poniższe rysunki.

<u>I przypadek</u> $k = 3$

Aby obliczyć współrzędne środka jednokładności $S(a, b)$, skorzystamy ze wzorów z twierdzenia 4.
Otrzymujemy:

$$\begin{cases} -4 = 3 \cdot 1 + (1-3)a \\ -1 = 3 \cdot 2 + (1-3)b \end{cases}$$

$$\begin{cases} -4 = 3 - 2a \\ -1 = 6 - 2b \end{cases}, \quad \text{skąd} \quad \begin{cases} a = 3{,}5 \\ b = 3{,}5 \end{cases}$$



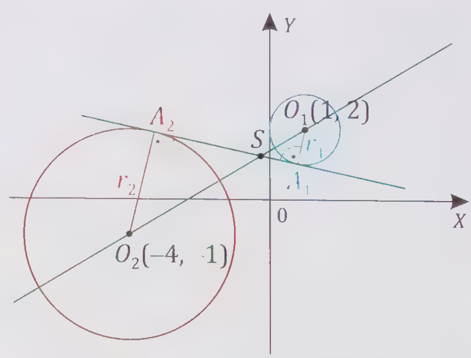
Środek jednokładności to punkt $S\left(3\frac{1}{2}, 3\frac{1}{2}\right)$, a skala tej jednokładności jest równa 3.

<u>II przypadek</u> $k = -3$

Po zastosowaniu wzorów z twierdzenia 4. mamy:

$$\begin{cases} -4 = -3 \cdot 1 + (1+3)a \\ -1 = -3 \cdot 2 + (1+3)b \end{cases}$$

$$\begin{cases} -1 = 4a \\ 5 = 4b \end{cases}, \quad \text{więc} \quad \begin{cases} a = -\dfrac{1}{4} \\ b = 1\dfrac{1}{4} \end{cases}$$



Środek jednokładności S ma współrzędne $\left(-\frac{1}{4}, 1\frac{1}{4}\right)$, zaś skala jednokładności jest równa –3.

Rozwiąż to samo zadanie, przyjmując, że okrąg o_1: $(x-1)^2+(y-2)^2=1$ jest obrazem okręgu o_2: $(x+4)^2+(y+1)^2=9$ w jednokładności o środku w punkcie $S(a, b)$ i skali k, $k \neq 0$.

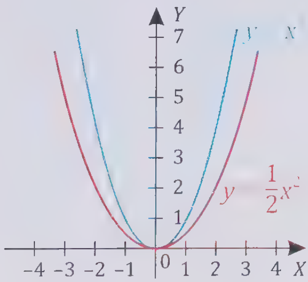
Przykład 4.

Znajdziemy obraz paraboli o równaniu $y=x^2$ w jednokładności J_O^2, gdzie $O(0, 0)$.

Weźmy dowolny punkt $A(x, y)$ danej paraboli. Jego obrazem w tej jednokładności będzie punkt $A_1(x_1, y_1)$, przy czym $x_1=2x$ i $y_1=2y$, skąd $x=\frac{1}{2}x_1$ i $y=\frac{1}{2}y_1$.
Punkt $A\left(\frac{1}{2}x_1, \frac{1}{2}y_1\right)$ należy do paraboli o równaniu $y=x^2$, więc

$$\frac{1}{2}y_1=\left(\frac{1}{2}x_1\right)^2, \quad \text{czyli} \quad y_1=\frac{1}{2}(x_1)^2$$

Równanie $y_1=\frac{1}{2}(x_1)^2$ jest równaniem paraboli, która jest obrazem paraboli $y=x^2$ w jednokładności J_O^2. Aby obie parabole można było narysować w jednym układzie współrzędnych, równanie obrazu paraboli zapiszemy w postaci $y=\frac{1}{2}x^2$.



Z przykładu 4. wynika nieoczekiwany wniosek: parabole opisane równaniami $y=x^2$ i $y=\frac{1}{2}x^2$ są podobne. Co więcej, dowolne parabole są podobne, ponieważ parabola $y=ax^2$, $a \neq 0$, jest obrazem paraboli $y=x^2$ w jednokładności o środku $O(0, 0)$ i skali $\frac{1}{a}$ (sprawdź!).

Sprawdź, czy rozumiesz

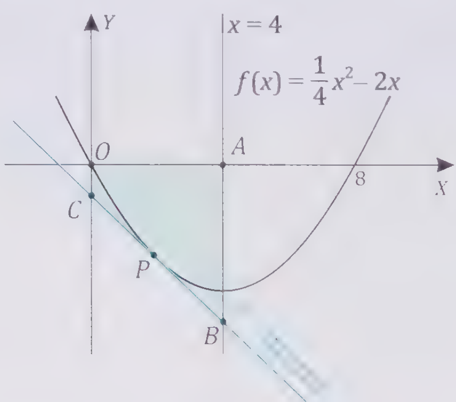
1. Trójkąt ABC, gdzie $A(-2, 1)$, $B(3, -2)$, $C(1, 4)$ przesunięto równolegle o wektor $\vec{u}=[-3, -4]$ i otrzymano trójkąt $A_1B_1C_1$, który przekształcono w J_S^{-2}, gdzie $S(5, -1)$, otrzymując trójkąt $A_2B_2C_2$. Wyznacz współrzędne wierzchołków i pole trójkąta $A_2B_2C_2$.

Zastosowanie analizy matematycznej w rozwiązywaniu zadań z geometrii analitycznej

Przykład 1.

Na wykresie funkcji $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - 2x$ wyznaczymy współrzędne takiego punktu P o odciętej a, $a \in (0, 8)$, że styczna do paraboli w punkcie P wraz z prostymi o równaniach: $x = 0$, $y = 0$ i $x = 4$ ogranicza trapez o najmniejszym polu. Wyznaczymy pole tego trapezu.

Zapiszemy wzór funkcji f w postaci iloczynowej: $f(x) = \frac{1}{4}x(x - 8)$. Funkcja f ma dwa miejsca zerowe 8 oraz 0. Wierzchołek paraboli będącej wykresem funkcji f ma współrzędne $(4, -4)$
Sytuację opisaną w zadaniu ilustruje poniższy rysunek.



Rozważmy trapez $OABC$ przedstawiony na rysunku. Oznaczamy współrzędne punktu

$$P\left(a, \frac{1}{4}a^2 - 2a\right), \text{ gdzie } a \in (0, 8)$$

Wyznaczamy, w zależności od a, równanie prostej k stycznej do paraboli w punkcie P.
Obliczamy pochodną funkcji

$$f(x) = \frac{1}{4}x^2 - 2x$$

Otrzymujemy:

$$f'(x) = \frac{1}{2}x - 2$$

Współczynnik kierunkowy stycznej jest równy $f'(a)$, mamy:

$$f'(a) = \frac{1}{2}a - 2$$

Prosta k przechodzi przez punkt $P\left(a, \frac{1}{4}a^2 - 2a\right)$, zatem równanie stycznej ma postać:

$$y - \left(\frac{1}{4}a^2 - 2a\right) = \left(\frac{1}{2}a - 2\right)(x - a), \quad \text{skąd}$$

$$y = \left(\frac{1}{2}a - 2\right)x - \frac{1}{2}a^2 + 2a + \frac{1}{4}a^2 - 2a, \quad \text{czyli}$$

$$y = \frac{a-4}{2} \cdot x - \frac{1}{4}a^2$$

Obliczamy współrzędne wierzchołków B i C rozważanego trapezu.
Wierzchołek C jest punktem wspólnym stycznej k i osi OY. Stąd

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{a-4}{2} \cdot x - \frac{1}{4}a^2 \end{cases}, \quad \text{czyli} \quad C\left(0, -\frac{1}{4}a^2\right)$$

Wierzchołek B to przecięcie prostej o równaniu $x = 4$ z prostą styczną. Zatem

$$\begin{cases} x = 4 \\ y = \frac{a-4}{2} \cdot x - \frac{1}{4}a^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 4 \\ y = \frac{a-4}{2} \cdot 4 - \frac{1}{4}a^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 4 \\ y = -\frac{1}{4}a^2 + 2a - 8 \end{cases}, \quad \text{stąd}$$

$$B\left(4, -\frac{1}{4}a^2 + 2a - 8\right)$$

Pozostałe wierzchołki trapezu to $O(0, 0)$ i $A(4, 0)$.
Pole S trapezu $OABC$ wyraża się wzorem

$$S = \frac{|OC| + |AB|}{2} \cdot |OA|, \quad \text{gdzie}$$

$$|OC| = \left|-\frac{1}{4}a^2\right| = \frac{1}{4}a^2,$$

$$|AB| = \left|-\frac{1}{4}a^2 + 2a - 8\right|, \ |OA| = 4, \quad \text{stąd}$$

$$S(a) = \frac{\frac{1}{4}a^2 + \left|-\frac{1}{4}a^2 + 2a - 8\right|}{2} \cdot 4, \quad \text{czyli}$$

$$S(a) = \frac{1}{2}a^2 + 2\left|-\frac{1}{4}a^2 + 2a - 8\right|, \quad \text{gdzie } a \in (0, 8)$$

Zauważmy, że wyrażenie $-\frac{1}{4}a^2 + 2a - 8$ jest ujemne dla dowolnej liczby a $(\Delta = -4$, $-4 < 0$, współczynnik przy a^2 jest ujemny), zatem

$$\left|-\frac{1}{4}a^2+2a-8\right|=\frac{1}{4}a^2-2a+8$$

Pole trapezu $OABC$ wyraża się wzorem

$$S(a)=\frac{1}{2}a^2+2\cdot\left(\frac{1}{4}a^2-2a+8\right),\text{ czyli}\quad S(a)=a^2-4a+16,\text{ gdzie } a\in(0,8).$$

Pole trapezu jest najmniejsze wtedy i tylko wtedy, gdy funkcja kwadratowa $S(a)=a^2-4a+16$ przyjmuje najmniejszą wartość w przedziale $(0, 8)$. Ma to miejsce dla argumentu 2 (uzasadnij to dokładnie!). Wówczas punkt P ma współrzędne $(2, -3)$.

Pole trapezu jest równe:

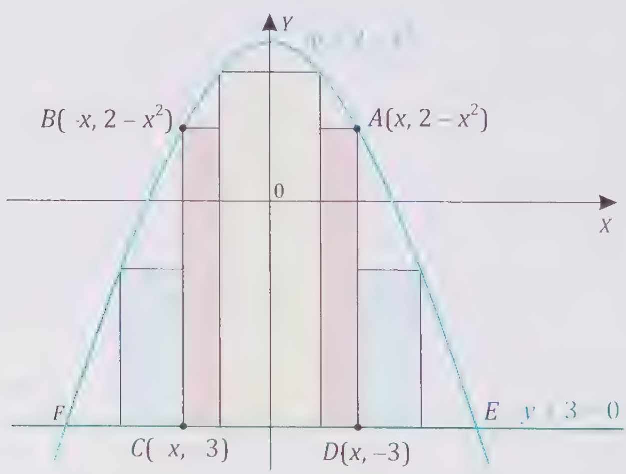
$$S(2)=2^2-4\cdot 2+16=12$$

Pole trapezu jest najmniejsze wtedy, gdy styczną do paraboli poprowadzimy w punkcie $P(2, -3)$. Najmniejsze pole jest równe 12.

Przykład 2.

Wśród prostokątów, których dwa wierzchołki należą do paraboli o równaniu $y=2-x^2$, a dwa pozostałe leżą na prostej $k\colon y+3=0$, znajduje się taki, którego pole jest największe. Wyznaczymy współrzędne wierzchołków tego prostokąta i obliczymy jego pole.

Sytuację przedstawioną w treści zadania ilustruje poniższy rysunek.



Niech punkt $A(x, 2-x^2)$, gdzie $x>0$, będzie jednym z wierzchołków prostokąta, który należy do paraboli o równaniu $y=2-x^2$. Wówczas wierzchołek B, który jest symetryczny do A względem osi OY, ma współrzędne $(-x, 2-x^2)$.

Pozostałe dwa wierzchołki należą do prostej k: $y + 3 = 0$, zatem ich współrzędne mają postać $C(-x, -3)$ oraz $D(x, -3)$. Prosta k przecina parabolę w punktach E i F, których współrzędne obliczymy, rozwiązując układ równań:

$$\begin{cases} y = -3 \\ y = 2 - x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 - x^2 = -3 \\ y = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 5 \\ y = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\sqrt{5} \\ y = -3 \end{cases} \vee \begin{cases} x = \sqrt{5} \\ y = -3 \end{cases}$$

Zatem $E\left(\sqrt{5}, -3\right)$ oraz $F\left(-\sqrt{5}, -3\right)$. Ponieważ wierzchołki C i D prostokąta znajdują się na prostej k pomiędzy punktami E i F, więc $0 < x < \sqrt{5}$.

Pole P prostokąta $ABCD$ wyraża się wzorem

$P = |AB| \cdot |AD|$, gdzie

$$|AB| = \sqrt{(-x-x)^2 + \left(2 - x^2 - 2 + x^2\right)^2} = \sqrt{4x^2} = 2|x| = 2x, \text{ bo } x \in \left(0, \sqrt{5}\right)$$

$$|AD| = \sqrt{(x-x)^2 + \left(-3 - 2 + x^2\right)^2} = \sqrt{\left(x^2 - 5\right)^2} = |x^2 - 5| = 5 - x^2, \text{ bo } x \in \left(0, \sqrt{5}\right)$$

Pole prostokąta w zależności od x wyraża się więc wzorem:

$P(x) = 2x(5 - x^2)$, czyli

$P(x) = -2x^3 + 10x$, gdzie $x \in \left(0, \sqrt{5}\right)$

Funkcja pola jest funkcją wielomianową, a więc ciągłą i różniczkowalną.

Obliczamy pochodną funkcji $P(x) = -2x^3 + 10x$, $x \in \left(0, \sqrt{5}\right)$. Otrzymujemy:

$P'(x) = -6x^2 + 10$, $x \in \left(0, \sqrt{5}\right)$

Obliczamy miejsca zerowe pochodnej:

$$\left[-6x^2 + 10 = 0 \wedge x \in \left(0, \sqrt{5}\right)\right] \Leftrightarrow \left[x^2 = \frac{5}{3} \wedge x \in \left(0, \sqrt{5}\right)\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\left(x = \frac{\sqrt{15}}{3} \vee x = -\frac{\sqrt{15}}{3}\right) \wedge x \in \left(0, \sqrt{5}\right)\right] \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{15}}{3}$$

Określamy znak pochodnej w sąsiedztwie punktu $x = \frac{\sqrt{15}}{3}$.

$$\left[P'(x) < 0 \wedge x \in \left(0, \sqrt{5}\right)\right] \Leftrightarrow \left[x \in \left(-\infty, -\frac{\sqrt{15}}{3}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{15}}{3}, +\infty\right) \wedge x \in \left(0, \sqrt{5}\right)\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in \left(\frac{\sqrt{15}}{3}, \sqrt{5}\right)$$

$$\left[P'(x) > 0 \wedge x \in \left(0, \sqrt{5}\right)\right] \Leftrightarrow \left[x \in \left(-\frac{\sqrt{15}}{3}, \frac{\sqrt{15}}{3}\right) \wedge x \in \left(0, \sqrt{5}\right)\right] \Leftrightarrow x \in \left(0, \frac{\sqrt{15}}{3}\right)$$

Dla argumentu $\frac{\sqrt{15}}{3}$ funkcja $y = P(x)$ przyjmuje największą wartość:

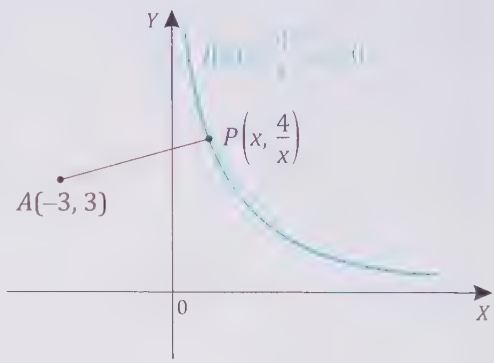
$$P_{\max}\left(\frac{\sqrt{15}}{3}\right) = 2 \cdot \frac{\sqrt{15}}{3} \cdot \left[5 - \left(\frac{\sqrt{15}}{3}\right)^2\right] = \frac{2\sqrt{15}}{3} \cdot \left(5 - \frac{15}{9}\right) = \frac{2\sqrt{15}}{3} \cdot \frac{10}{3} = \frac{20\sqrt{15}}{9}$$

Pole największego prostokąta jest równe $\frac{20\sqrt{15}}{9}$. Wierzchołki tego prostokąta mają współrzędne

$$A\left(\frac{\sqrt{15}}{3}, \frac{1}{3}\right), B\left(-\frac{\sqrt{15}}{3}, \frac{1}{3}\right), C\left(-\frac{\sqrt{15}}{3}, -3\right), D\left(\frac{\sqrt{15}}{3}, -3\right).$$

Przykład 3.

Wyznaczymy na gałęzi hiperboli o równaniu $f(x) = \frac{4}{x}$, gdzie $x \in (0, +\infty)$, taki punkt P, którego odległość od punktu $A(-3, 3)$ jest najmniejsza.



I sposób – skorzystamy z rachunku pochodnych.
Oznaczmy współrzędne punktu P należącego do hiperboli jako $P\left(x, \frac{4}{x}\right)$, gdzie $x \in (0, +\infty)$.
Wówczas odległość punktu A od P wyraża się wzorem

$$|AP| = \sqrt{(x+3)^2 + \left(\frac{4}{x} - 3\right)^2}$$

$$|AP| = \sqrt{x^2 + 6x + 9 + \frac{16}{x^2} - \frac{24}{x} + 9}$$

$$|AP| = \sqrt{\frac{x^4 + 6x^3 + 18x^2 - 24x + 16}{x^2}}$$

Rozważamy funkcję wymierną

$$g(x) = \frac{x^4 + 6x^3 + 18x^2 - 24x + 16}{x^2}, \text{ określoną w przedziale } (0, +\infty).$$

Zauważ, że funkcja „pierwiastek kwadratowy" $\left(y = \sqrt{t}\right)$ jest funkcją rosnącą. Zatem funkcja $y = \sqrt{g(x)}$, $x \in (0, +\infty)$, przyjmuje najmniejszą wartość wtedy, gdy funkcja $y = g(x)$ przyjmie najmniejszą wartość. Wyznaczymy więc taki argument, dla którego funkcja $y = g(x)$ przyjmuje najmniejszą wartość.

Funkcja g, jako funkcja wymierna, jest ciągła i różniczkowalna. Obliczamy pochodną funkcji g:

$$g'(x) = \frac{(4x^3 + 18x^2 + 36x - 24)\cdot x^2 - (x^4 + 6x^3 + 18x^2 - 24x + 16)\cdot 2x}{x^4}$$

$$g'(x) = \frac{2x^4 + 6x^3 + 24x - 32}{x^3}, \quad x \in (0, +\infty)$$

Obliczamy miejsca zerowe pochodnej:

$$[g'(x) = 0 \ \wedge \ x \in (0, +\infty)] \Leftrightarrow \left[\frac{2x^4 + 6x^3 + 24x - 32}{x^3} = 0 \wedge x \in (0, +\infty)\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow [x^4 + 3x^3 + 12x - 16 = 0 \ \wedge \ x \in (0, +\infty)]$$

Zauważmy, że jednym z pierwiastków wielomianu $W(x) = x^4 + 3x^3 + 12x - 16$ jest liczba 1 (sprawdź!).

Zatem na mocy twierdzenia Bezouta wielomian $W(x)$ jest podzielny przez dwumian $x - 1$ (wykonaj to dzielenie!). Mamy

$W(x) = (x-1)\cdot(x^3 + 4x^2 + 4x + 16) = (x-1)\cdot[x^2(x+4) + 4(x+4)]$, czyli

$W(x) = (x-1)(x+4)(x^2+4)$

Zatem

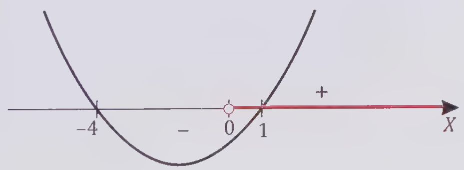
$g'(x) = 0$ i $x \in (0, +\infty)$, więc

$x = 1$

Określamy znak pochodnej $g'(x) = \dfrac{2\cdot(x-1)(x+4)(x^2+4)}{x^3}$ w zbiorze $\boldsymbol{R}_+$ na podstawie szkicu wykresu funkcji wielomianowej

$g_1(x) = 2(x-1)(x+4)(x^2+4)$

(wyrażenie x^3 jest dodatnie dla dowolnej liczby rzeczywistej dodatniej). Otrzymujemy



$g'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (0, 1)$

$g'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (1, +\infty)$

Zatem dla argumentu 1 funkcja $y = g(x)$ ma minimum lokalne. Obliczamy minimalną wartość funkcji g:

$$g_{\min}(1) = \frac{1^4 + 6\cdot 1^3 + 18\cdot 1^2 - 24\cdot 1 + 16}{1^2} = 17$$

Wykażemy, że minimum lokalne funkcji g jest jednocześnie najmniejszą wartością funkcji g.

Obliczamy granice funkcji g na końcach przedziału $(0, +\infty)$.

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\overset{\to 16}{\boxed{x^4+6x^3+18x^2-24x+16}}}{\underset{\to 0^+}{\boxed{x^2}}} = +\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x^4+6x^3+18x^2-24x+16}{x^2} = \lim_{x\to +\infty}\left(\overset{\to +\infty}{\boxed{x^2+6x+18}} \overset{\to 0}{\boxed{-\frac{24}{x}+\frac{16}{x^2}}}\right) = +\infty$$

Poniższa tabela ilustruje przebieg zmienności funkcji g.

x	$(0, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	$+\infty \searrow$	17	$\nearrow +\infty$

Ponieważ funkcja g jest funkcją ciągłą, więc na podstawie tabeli stwierdzamy, że minimum lokalne jest jednocześnie najmniejszą wartością funkcji g.
Funkcja g przyjmuje najmniejszą wartość dla argumentu 1. Wartość ta wynosi 17.

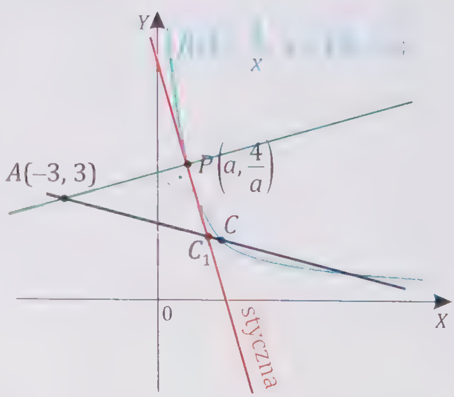
Wówczas najmniejsza odległość punktu A od punktu P jest równa $\sqrt{17}$. Punkt P ma współrzędne $(1, 4)$.

<u>II sposób</u> – skorzystamy z własności stycznej do wykresu funkcji i prostej prostopadłej do stycznej poprowadzonej w punkcie styczności.

Znajdziemy taki punkt $P\left(a, \frac{4}{a}\right)$ należący do hiperboli o równaniu $f(x) = \frac{4}{x}$, gdzie $x \in \mathbf{R}_+$, że styczna do wykresu funkcji f w punkcie P jest prostopadła do prostej AP (zauważ, że dla dowolnego punktu $C \neq P$, gdzie C należy do hiperboli, zachodzi warunek:

$$|AC| > |AC_1| > |AP|,$$

gdzie C_1 jest punktem wspólnym stycznej i odcinka AC).



Wyznaczamy współczynnik kierunkowy stycznej do gałęzi hiperboli o równaniu $f(x) = \frac{4}{x}$, gdzie $x \in \mathbf{R}_+$, poprowadzonej w punkcie $P\left(a, \frac{4}{a}\right)$. Obliczamy pochodną funkcji f:

$$f'(x) = -\frac{4}{x^2}, \quad x \in \mathbf{R}_+$$

Współczynnik kierunkowy stycznej a_1 to wartość pochodnej funkcji f dla argumentu a. Zatem

$$a_1 = f'(a) = -\frac{4}{a^2}, \text{ gdzie } a > 0$$

Współczynnik kierunkowy a_2 prostej AP obliczymy ze wzoru:

$$a_2 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \text{ gdzie } A(-3, 3), P\left(a, \frac{4}{a}\right)$$

Stąd

$$a_2 = \frac{\frac{4}{a} - 3}{a + 3} = \frac{4 - 3a}{a^2 + 3a}, \text{ gdzie } a > 0$$

Korzystając z warunku na prostopadłość prostych o równaniach kierunkowych, mamy:

$$a_1 \cdot a_2 = -1$$

$$-\frac{4}{a^2} \cdot \frac{4 - 3a}{a^2 + 3a} = -1$$

$$16 - 12a = a^4 + 3a^3$$

$$a^4 + 3a^3 + 12a - 16 = 0, \text{ gdzie } a > 0,$$

skąd

$$(a - 1)(a + 4)(a^2 + 4) = 0 \text{ i } a > 0, \text{ więc}$$

$$a = 1$$

Szukany punkt należący do wykresu funkcji $f(x) = \frac{4}{x}$, gdzie $x \in (0, +\infty)$, położony najbliżej punktu $A(-3, 3)$ ma współrzędne $P(1, 4)$.

Sprawdź, czy rozumiesz

1. Wykaż, że styczna do paraboli o równaniu $y = \frac{1}{2}x^2 - x - 2$, która jest równoległa do cięciwy AB, gdzie $A(0, -2)$ i $B(4, 2)$, ogranicza wraz z osiami układu współrzędnych trójkąt o polu równym 8.

2. Wyznacz na paraboli o równaniu $y = \frac{1}{2}x^2$ punkt, którego odległość od punktu $A(8, -1)$ jest najmniejsza. Podaj tę odległość.

3. Na hiperboli o równaniu $y = \frac{-3}{x}$, gdzie $x < 0$, wyznacz współrzędne takiego punktu C, aby pole trójkąta ABC, gdzie $A(1, -4)$ i $B(5, -2)$ było najmniejsze.

4. Kombinatoryka i rachunek prawdopodobieństwa

Reguła mnożenia i reguła dodawania

Kombinatoryka, mówiąc bardzo ogólnie, zajmuje się ustalaniem liczebności zbiorów skończonych. Mając zadanie dotyczące liczebności, tworzymy odpowiedni model matematyczny, który sprowadza rozpatrywane zadanie do wyznaczenia liczby elementów pewnego zbioru skończonego.

Przykład 1.

W grupie są 3 dziewczynki i 5 chłopców. Z tej grupy trzeba wybrać delegację złożoną z jednej dziewczynki i jednego chłopca. Ile jest możliwości dokonania wyboru takiej delegacji?

Wprowadźmy oznaczenia:
X_1, X_2, X_3 – dziewczynki
Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, Y_5 – chłopcy

I sposób
Liczba możliwości dokonania wyboru delegacji jest oczywiście równa liczbie par składających się z jednej dziewczynki i jednego chłopca. Aby ustalić tę liczbę, można posłużyć się tabelą:

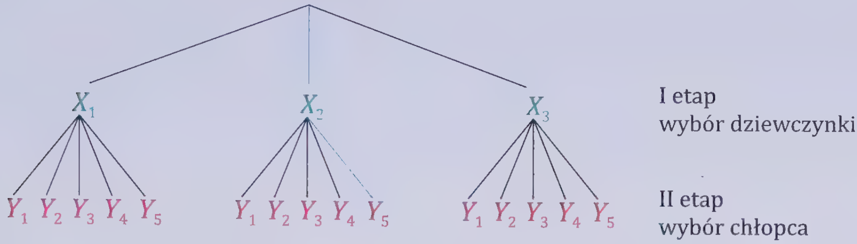
	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5
X_1	(X_1, Y_1)	(X_1, Y_2)	(X_1, Y_3)	(X_1, Y_4)	(X_1, Y_5)
X_2	(X_2, Y_1)	(X_2, Y_2)	(X_2, Y_3)	(X_2, Y_4)	(X_2, Y_5)
X_3	(X_3, Y_1)	(X_3, Y_2)	(X_3, Y_3)	(X_3, Y_4)	(X_3, Y_5)

Liczba par jest równa liczbie komórek w części tabeli zaznaczonej grubą linią, czyli

$$3 \cdot 5 \quad (= 15)$$

Jest 15 możliwości dokonania wyboru delegacji.

II sposób
Aby rozwiązać to zadanie, można posłużyć się diagramem, który nazywa się **drzewem**. Zauważ, że wybór pary spełniającej warunki zadania może przebiegać w dwóch etapach: pierwszym etapem może być wybór dziewczynki, drugim – wybór chłopca (oczywiście kolejność może być też odwrotna). Na drzewie te etapy przedstawiamy tak:



Odcinki na tym diagramie nazywamy krawędziami, które spotykają się w punktach zwanych węzłami. Każdy ciąg krawędzi od pierwszego do ostatniego etapu nazywamy gałęzią. Tak więc gałąź składa się z tylu krawędzi, ile etapów przedstawia drzewo.

Gałąź zaznaczona kolorem niebieskim odpowiada parze (X_2, Y_5).

Każda dziewczynka może być w parze z jednym z 5 chłopców, może więc utworzyć 5 par. W klasie są 3 dziewczynki, zatem wszystkich par jest

$$3 \cdot 5$$

Jest 15 możliwości dokonania wyboru delegacji.

Podsumujmy dotychczasowe rozważania.

Załóżmy, że dokonywany przez nas wybór przebiega w dwóch etapach. W I etapie możemy podjąć decyzję na k_1 sposobów, a w II etapie – na k_2 sposobów. Wówczas liczba wszystkich wyników naszego (dwuetapowego) wyboru jest równa

$$k_1 \cdot k_2$$

Jest to tzw. reguła mnożenia. Oczywiście, można ją uogólnić na większą liczbę etapów.

Przykład 2.

Restauracja oferuje swoim gościom: 5 rodzajów zup, 10 rodzajów drugich dań i 6 rodzajów napojów. Ile różnych zestawów obiadowych złożonych z zupy, drugiego dania i napoju można zamówić w tej restauracji?

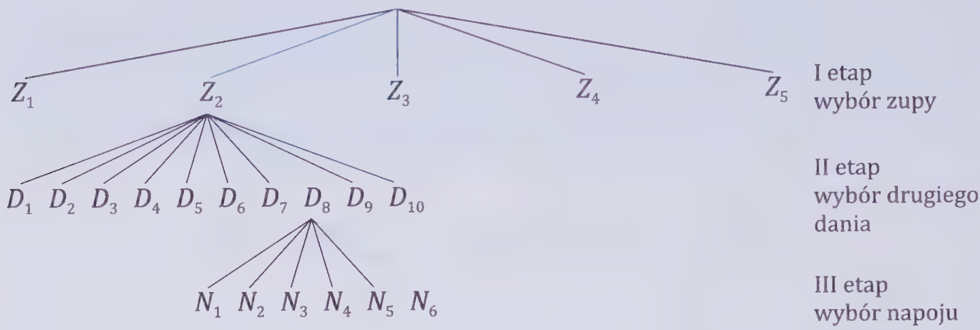
Oznaczmy:

$Z_1, \ldots, Z_5$ – rodzaje zup

$D_1, \ldots, D_{10}$ – rodzaje drugich dań

$N_1, \ldots, N_6$ – rodzaje napojów.

Wyboru zestawu obiadowego możemy dokonać w trzech etapach. Narysujemy częściowe drzewo przedstawiające te etapy.



Na drzewie kolorem niebieskim zaznaczono gałąź odpowiadającą zestawowi obiadowemu złożonemu z drugiej zupy, ósmego dania drugiego i szóstego napoju.

Zupę możemy wybrać na 5 sposobów. Do każdej tak wybranej zupy możemy wybrać drugie danie na 10 sposobów. Zatem możemy utworzyć $5 \cdot 10$ zestawów złożonych z zupy i drugiego dania. Do każdego z 50 takich zestawów możemy wybrać napój na 6 sposobów. W restauracji można więc zamówić

$5 \cdot 10 \cdot 6$ (czyli 300)

różnych zestawów obiadowych.

Ogólnie możemy stwierdzić, że jeśli dokonywany przez nas wybór przebiega w trzech etapach i w I etapie możemy podjąć decyzję na k_1 sposobów, w II etapie – na k_2 sposobów, a w III etapie – na k_3 sposobów, to liczba wszystkich wyników naszego (trójetapowego) wyboru jest równa $k_1 \cdot k_2 \cdot k_3$.

Przykład 3.

Ania spośród sześciu różnych bluzek – 4 niebieskich i 2 zielonych – ma wybrać jedną oraz spośród trzech różnych spódnic – 2 niebieskich i 1 zielonej – też ma wybrać jedną.

a) Ile Ania ma możliwości wyboru jednej bluzki i jednej spódnicy?

b) Ile Ania ma możliwości wyboru jednej bluzki i jednej spódnicy tak, by bluzka i spódnica były w tym samym kolorze?

Ad a) Ania do każdej z 6 bluzek może wybrać jedną z 3 spódnic, zatem wszystkich możliwości wyboru jest

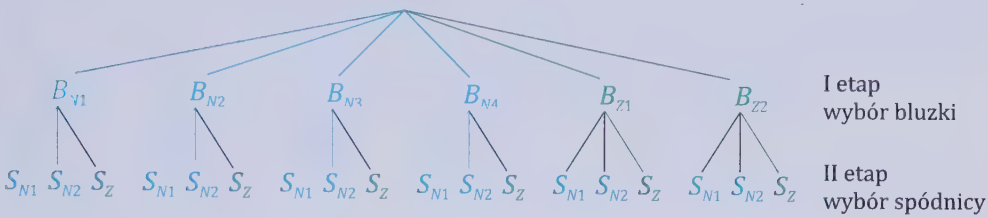
$6 \cdot 3$

Ania ma 18 możliwości wyboru jednej bluzki i jednej spódnicy.

Ad b) Narysujemy drzewo ilustrujące wybór bluzki i spódnicy. Oznaczymy:

$B_{N1}, B_{N4}, B_{N4}, B_{N4}$ – bluzki niebieskie B_{Z1}, B_{Z2} – bluzki zielone

S_{N1}, S_{N2} – spódnice niebieskie S_Z – spódnica zielona



Zbiór wyników wyboru bluzki i spódnicy w tym samym kolorze można podzielić na dwa rozłączne podzbiory:

- wybrana bluzka i spódnica są niebieskie
- wybrana bluzka i spódnica są zielone.

Taki podział ułatwia obliczenia. Mamy bowiem:

- Do każdej z 4 niebieskich bluzek Ania może dobrać jedną z 2 niebieskich spódnic. Zatem zestawów: niebieska bluzka i niebieska spódnica jest

  $4 \cdot 2$ (czyli 8)

- Do każdej z 2 zielonych bluzek Ania może dobrać tylko 1 zieloną spódnicę. Zatem liczba zestawów: zielona bluzka i zielona spódnica jest równa

  $2 \cdot 1$ (czyli 2)

Ania ma 10 $(= 8 + 2)$ możliwości wyboru jednej bluzki i jednej spódnicy tak, by były one w tym samym kolorze.

W punkcie b) ostatniego przykładu posłużyliśmy się – intuicyjnie oczywistą – regułą dodawania. Reguła ta stwierdza, że jeśli zbiór wszystkich wyników podzielimy na dwa rozłączne (czyli niemające wspólnych elementów) podzbiory i w pierwszym podzbiorze jest m_1 wyników oraz w drugim podzbiorze jest m_2 wyników, to wszystkich wyników jest $m_1 + m_2$.
Regułę dodawania można uogólnić na większą niż dwa liczbę podzbiorów. Należy wówczas założyć, że dowolne dwa podzbiory są rozłączne.

Sprawdź, czy rozumiesz

1. Proste k i l są równoległe. Na prostej k zaznaczono 4 różne punkty, a na prostej l – 5 różnych punktów. Ile różnych odcinków wyznaczają te punkty, jeśli jeden koniec każdego odcinka należy do prostej k, a drugi do prostej l?

2. Pewna dama ma 5 kapeluszy i 8 apaszek. Na ile różnych sposobów może włożyć kapelusz wraz z apaszką?

3. W szufladzie znajdują się różne czapki i szaliki: 3 czapki białe, 4 czapki czerwone i 2 czapki szare oraz 2 szaliki białe, 1 szalik czarny i 5 szalików szarych. Na ile różnych sposobów można wybrać:
   a) jedną czapkę i jeden szalik
   b) czapkę czerwoną i jeden dowolny szalik
   c) czapkę i szalik w kolorze białym
   d) czapkę i szalik w jednym kolorze?

Wariacje

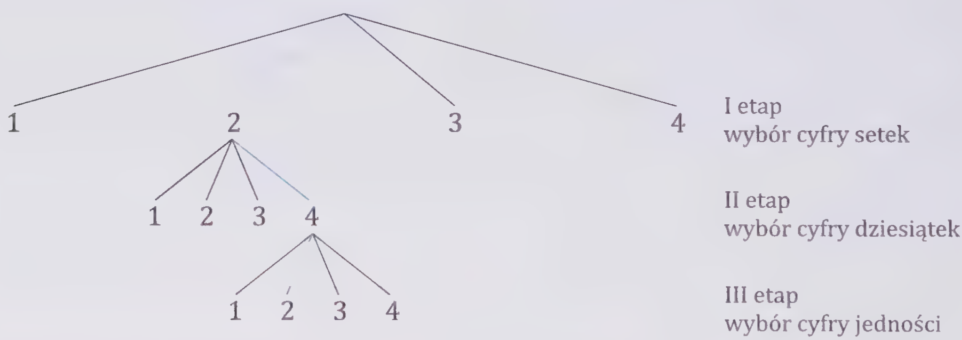
W poprzednim temacie wyznaczaliśmy w różnych sytuacjach liczbę wieloetapowych wyborów. Zauważ, że we wszystkich przykładach wybór dokonywany na każdym etapie dotyczył innego zbioru, na przykład w przykładzie 1. etap pierwszy dotyczył wyboru dziewczynki, a drugi – wyboru chłopca.

Teraz zajmiemy się wyborami wieloetapowymi, ale na każdym etapie wybór będzie dokonywany z tego samego zbioru.

Przykład 1.

Ile liczb trzycyfrowych można utworzyć, dysponując cyframi należącymi do zbioru $\{1, 2, 3, 4\}$?

Aby utworzyć liczbę trzycyfrową, wystarczy wskazać cyfrę setek, cyfrę dziesiątek i cyfrę jedności. Częściowe drzewo przedstawione poniżej pokazuje etapy tworzenia liczby trzycyfrowej.



Kolorem niebieskim zaznaczona została gałąź odpowiadająca liczbie 242.

Cyfrę setek możemy wybrać na 4 sposoby. Do każdej tak wybranej cyfry setek cyfrę dziesiątek możemy wybrać również na 4 sposoby. Do każdej z 16 $(= 4 \cdot 4)$ tak utworzonych par możemy dobrać cyfrę jedności na 4 sposoby. Ostatecznie – zgodnie z regułą mnożenia – wszystkich liczb trzycyfrowych jest

$4 \cdot 4 \cdot 4$ (czyli 4^3)

Można utworzyć 64 liczby trzycyfrowe.

Zwróć uwagę, że rozważając wybory wieloetapowe, możemy mówić o pewnych przyporządkowaniach. Odnosząc się do ostatniego przykładu, możemy na przykład rozpatrzyć przyporządkowanie (odpowiadające utworzeniu liczby 242):

I etap → 2   1. → 2
II etap → 4   co można też zapisać tak   2. → 4
III etap → 2   3. → 2

Takie przyporządkowania, w którym kolejnym początkowym liczbom naturalnym (większym od 0) przypisuje się elementy z danego zbioru, nazywamy ciągami. Pojęcie ciągu poznałeś w klasie drugiej.
Można więc powiedzieć (odnosząc się do ostatniego przykładu), że liczb trzycyfrowych jest tyle, ile trójwyrazowych ciągów o wyrazach należących do zbioru $\{1, 2, 3, 4\}$.

Zauważ też, że w rozpatrywanym przykładzie:

- kolejność wybieranych (przyporządkowywanych) cyfr jest istotna (np. wybór najpierw 2, następnie 4 i na końcu znowu 2 da w efekcie liczbę 242, jeśli natomiast najpierw wybierzemy 4, a potem dwa razy 2, to otrzymamy inny wynik – liczbę 422)
- cyfry, z których tworzymy liczbę, mogą (ale nie muszą!) się powtarzać.

Przykład 2.

Ile liczb trzycyfrowych można utworzyć, dysponując cyframi należącymi do zbioru $\{0, 1, 2, 3\}$?

Zadanie na pierwszy rzut oka wydaje się takie samo jak zadanie z poprzedniego przykładu. Kolejność wybieranych cyfr jest istotna oraz cyfry mogą się powtarzać. Różnica polega na tym, że cyfra setek nie może być równa 0. Można więc powiedzieć, że liczb trzycyfrowych spełniających warunki zadania jest tyle, ile trójwyrazowych ciągów o wyrazach należących do zbioru $\{0, 1, 2, 3\}$ i pierwszym wyrazie różnym od 0.
Cyfrę setek możemy więc wybrać na 3 sposoby, cyfrę dziesiątek na 4 sposoby i cyfrę jedności na 4 sposoby. Wszystkich liczb trzycyfrowych jest więc

$$3 \cdot 4 \cdot 4$$

Można utworzyć 48 liczb trzycyfrowych.

Przykład 3.

Ile napisów czteroliterowych można utworzyć, dysponując literami należącymi do zbioru $\{A, B, C\}$?

Kolejność wybieranych liter jest istotna (np. napisy ABBA i BABA są różne) i litery mogą się powtarzać.
Wszystkich napisów czteroliterowych jest

$$3^4 \text{ (czyli 81)}$$

(Uzasadnij to dokładnie).

Przykład 4.

Pięciu pasażerów, których oznaczymy literami A, B, C, D, E, wsiada do pociągu, wybierając losowo jeden z sześciu wagonów. Na ile sposobów pasażerowie ci mogą zająć miejsca w wagonach tego pociągu?

Każdemu pasażerowi można przyporządkować numer wagonu, do którego wsiadł. Jeśli pasażer A wsiadł do wagonu 2., pasażerowie B i C do wagonu 3., pasażer D do wagonu 4., a pasażer E do wagonu 6., to sytuację taką można opisać ciągiem

$$(2, 3, 3, 4, 6)$$

Zatem liczba sposobów, w jakie pasażerowie mogą zająć miejsca w wagonach pociągu, jest równa liczbie pięciowyrazowych ciągów o wyrazach należących do zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, czyli

$$6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6$$

Pasażerowie mogą zająć miejsca w wagonach na 6^5 sposobów.

Rozpatrywane przykłady prowadzą do następującej definicji.

Definicja 1.

Wariacją k-wyrazową z powtórzeniami n-elementowego zbioru A, gdzie $k, n \in \mathbf{N}_+$, nazywamy każdy k-wyrazowy ciąg (mogących się powtarzać) elementów zbioru A.

Łatwo zauważyć, że prawdziwe jest następujące twierdzenie.

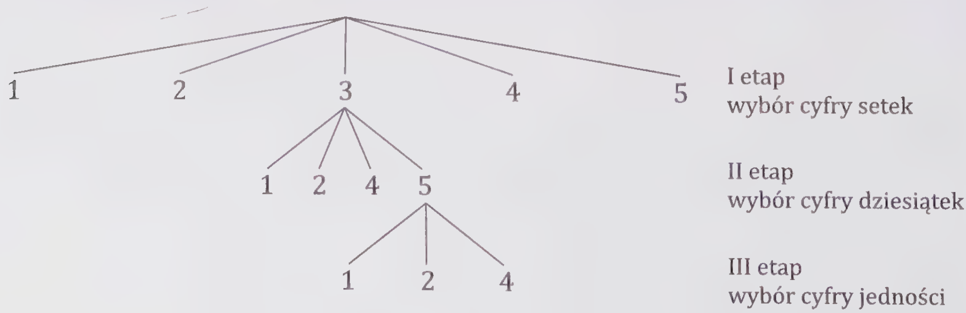
Twierdzenie 1.

Liczba k-wyrazowych wariacji z powtórzeniami zbioru n-elementowego jest równa n^k.

Przykład 5.

Ile liczb trzycyfrowych o różnych cyfrach można utworzyć, dysponując cyframi należącymi do zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5\}$?

Naszkicujemy częściowe drzewo przedstawiające etapy tworzenia liczby trzycyfrowej o różnych cyfrach.



Kolejność wybieranych cyfr oczywiście jest istotna, ale cyfry nie mogą się powtarzać. Cyfrę setek możemy wybrać na 5 sposobów, cyfrę dziesiątek – na 4 sposoby (jeśli jako cyfrę setek wybraliśmy 3, to cyfrę dziesiątek możemy wybrać spośród cyfr: 1, 2, 4, 5), a cyfrę jedności możemy wybrać już tylko na 3 sposoby (pomijamy wybraną cyfrę setek i cyfrę dziesiątek). Zgodnie z regułą mnożenia wszystkich takich liczb trzycyfrowych jest więc

$5 \cdot 4 \cdot 3$

Można utworzyć 60 liczb trzycyfrowych.

Przykład 6.

Pięciu pasażerów, których oznaczymy literami A, B, C, D, E, wsiada do pociągu, wybierając losowo jeden z sześciu wagonów. Na ile sposobów pasażerowie ci mogą zająć miejsca w wagonach tego pociągu, jeśli wiadomo, że każdy z pasażerów wybrał inny wagon?

Liczba sposobów, w jakie pasażerowie mogą zająć miejsca w wagonach pociągu, jest równa liczbie pięciowyrazowych ciągów o różnych wyrazach należących do zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, czyli

$6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2$

Pasażerowie mogą zająć miejsca w wagonach na 720 sposobów.

Definicja 2.

Wariacją k-wyrazową bez powtórzeń n-elementowego zbioru A, gdzie $k, n \in \mathbb{N}_+$ i $k \leqslant n$, nazywamy każdy k-wyrazowy ciąg różnych elementów zbioru A.

Prawdziwe jest następujące twierdzenie.

Twierdzenie 2.

Liczba k-wyrazowych wariacji bez powtórzeń zbioru n-elementowego, gdzie $k, n \in \mathbb{N}_+$ i $k \leqslant n$, jest równa $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$.

Sprawdź, czy rozumiesz

1. Na górę z jednej miejscowości prowadzą trzy różne szlaki. Na ile sposobów turyści mogą wybrać trasę wycieczki na górę i z powrotem?
2. Budynek ma parter i 10 pięter. Na parterze tego wieżowca do windy wsiadły 4 osoby. Na ile sposobów osoby te mogą wysiąść z windy (nie uwzględniamy kolejności wysiadania), jeśli:
   a) każda osoba może wysiąść na dowolnym piętrze
   b) wiadomo, że każda osoba wysiądzie na innym piętrze
   c) wiadomo, że wszystkie osoby wysiądą na tym samym piętrze?

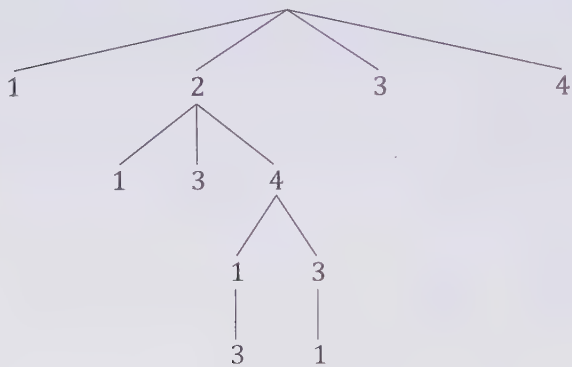
Permutacje

W tym temacie omówimy szczególny przypadek wariacji bez powtórzeń.

Przykład 1.

Ile liczb czterocyfrowych o różnych cyfrach można utworzyć, dysponując cyframi należącymi do zbioru $\{1, 2, 3, 4\}$?

Naszkicujmy częściowe drzewo przedstawiające etapy tworzenia liczb czterocyfrowych o różnych cyfrach.



I etap
wybór cyfry tysięcy

II etap
wybór cyfry setek

III etap
wybór cyfry dziesiątek

IV etap
wybór cyfry jedności

Kolejność wybieranych cyfr jest istotna, cyfry nie mogą się powtarzać. Łatwo zauważyć, że w każdej liczbie czterocyfrowej występować będą wszystkie cztery cyfry. Wyznaczmy ich liczbę: cyfrę tysięcy możemy wybrać na 4 sposoby; cyfrę setek możemy wybrać na 3 sposoby (pomijamy wybraną cyfrę tysięcy); cyfrę dziesiątek możemy wybrać na 2 sposoby (pomijamy cyfrę tysięcy i cyfrę setek). Ostatnią cyfrę możemy „wybrać" już tylko na 1 sposób, zatem wszystkich takich liczb jest

$$4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Można utworzyć 24 liczby czterocyfrowe.

UWAGA: Iloczyn kolejnych liczb naturalnych od n do 1 często występuje w kombinatoryce. W związku z tym wprowadzono specjalny symbol oznaczający taki iloczyn: $n!$ (czytaj: „n silnia").

Definicja 1.

$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1,$ jeśli $n \in \mathbf{N}, n > 1$

$0! = 1$ $1! = 1$

Przykład 2.

a) $6 \cdot 5! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6!$

b) $8! - 7! = 8 \cdot 7! - 7! = 7!(8-1) = 7 \cdot 7!$

c) $\frac{10!}{7!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7!}{7!} = 10 \cdot 9 \cdot 8$

d) $\frac{9!}{6! \cdot 3!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6!}{6! \cdot 3!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 84$

UWAGA: Zgodnie z twierdzeniem 2. ze str. 271 liczba k-wyrazowych wariacji bez powtórzeń zbioru n-elementowego, gdzie $k, n \in \mathbf{N}_+$ i $k \leqslant n$, jest równa $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$. Liczbę tę można również zapisać tak

$$\frac{n!}{(n-k)!}$$

Wracając do przykładu 1., można powiedzieć, że liczb czterocyfrowych spełniających warunki zadania jest 4!

Przykład 3.

Ile liczb czterocyfrowych o różnych cyfrach można utworzyć, dysponując cyframi należącymi do zbioru {0, 1, 2, 3}?

Liczb czterocyfrowych jest tyle, ile czterowyrazowych ciągów o różnych wyrazach należących do zbioru {0, 1, 2,3} i pierwszym wyrazie różnym od zera. Zatem:
- cyfrę tysięcy można wybrać na 3 sposoby (pomijamy zero)
- cyfrę setek można wybrać też na 3 sposoby (pomijamy cyfrę tysięcy, ale dołączamy zero)
- cyfrę dziesiątek można wybrać na 2 sposoby
- cyfrę jedności można wybrać na 1 sposób.

Wszystkich liczb jest więc

$3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ (czyli $3 \cdot 3!$)

Można utworzyć 18 liczb czterocyfrowych.

Przykład 4.

Pięcioro przyjaciół: Ania, Bartek, Cezary, Dorota i Ela kupiło bilety do kina. Mają oni zająć pięć kolejnych miejsc w jednym rzędzie.

a) Na ile sposobów mogą zająć te miejsca?

b) Na ile sposobów mogą zająć te miejsca tak, by Ania i Bartek siedzieli obok siebie?

Ad a)

Pierwsze miejsce może być zajęte na 5 sposobów, drugie – na 4 sposoby, trzecie – na 3 sposoby, czwarte – na 2 sposoby i piąte – na 1 sposób. Wszystkich możliwości jest

$5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ (czyli $5!$)

Pięcioro przyjaciół może zająć miejsca w kinie na 120 sposobów.

Ad b)
Zadanie to rozwiążemy w trzech etapach.

I etap – wybieramy dwa sąsiednie miejsca dla Ani i Bartka:

(□, □, , ,) (, □, □, ,) (, , □, □,) (, , , □, □)

Są 4 możliwości wybrania dwóch sąsiednich miejsc.

II etap – ustalamy, w jakiej kolejności zajmą miejsca Ania i Bartek:

(A, B, , ,) **(B, A, , ,)**

Są 2 możliwości wyboru miejsc dla Ani i Bartka (przy ustalonych dwóch sąsiednich miejscach).

III etap – wybieramy miejsca dla pozostałych trzech osób.
Można to zrobić na 3! sposobów (przy ustalonych miejscach dla Ani i Bartka).

Wszystkich możliwości wyboru miejsc jest więc

$4 \cdot 2 \cdot 3!$ (czyli $2 \cdot 4!$)

Pięcioro przyjaciół może zająć miejsca w kinie tak, by Ania i Bartek siedzieli obok siebie, na 48 sposobów.

Przykład 5.

W zespole tanecznym jest 5 dziewczynek i 5 chłopców. Każda dziewczynka tańczy z chłopcem. Ile jest różnych możliwości utworzenia pięciu par tanecznych?

Ustawiamy dziewczynki w szeregu. Pierwszej dziewczynce można przyporządkować jednego z 5 chłopców, drugiej – jednego z pozostałych 4 chłopców, trzeciej – jednego z pozostałych 3 chłopców, czwartej dziewczynce – jednego chłopca z pozostałych 2 i piątej dziewczynce przyporządkowujemy ostatniego chłopca. Pięć par tanecznych można utworzyć na

$5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ (czyli $5!$)

sposobów.
Pięć par tanecznych można utworzyć na 120 sposobów.

Przykład 6.

Ile jest sposobów zajęcia miejsc przy okrągłym stole przez:

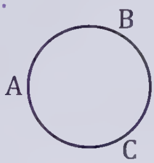
a) 3 osoby b) 10 osób?

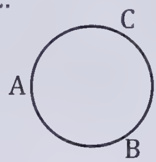
Rozwiązanie tego zadania zależy od sprecyzowania, jakie dwa rozmieszczenia osób przy stole uznamy za różne. Rozpatrzmy dwa modele.

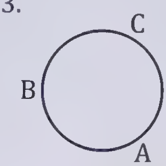
Model 1.
Dwa rozmieszczenia osób przy stole uznamy za różne, jeśli co najmniej dwie osoby będą siedziały na innych krzesłach. W takim wypadku liczba rozmieszczeń przy okrągłym stole jest taka sama, jak liczba rozmieszczeń tych osób w szeregu.

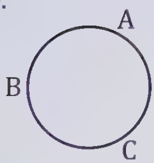
Model 2.
Dwa rozmieszczenia osób przy stole uznamy za różne, jeśli co najmniej jedna osoba po co najmniej jednej stronie będzie mieć innego sąsiada.

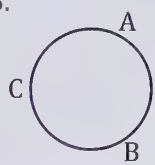
Ad a)
Model 1.
Liczba rozmieszczeń jest równa 3! (czyli 6). Rysunek poniżej przedstawia te rozmieszczenia; osoby zostały oznaczone literami A, B, C.

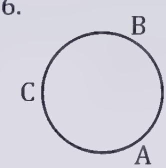
1.


2.


3.


4.


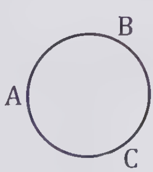
5.


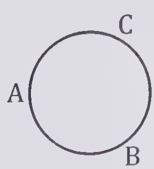
6.


Model 2.
Zauważ, że na rysunku 1., 3. i 5. każda osoba siedząca przy stole ma takich samych sąsiadów. Zatem w tym przypadku takie rozmieszczenia uznajemy za identyczne. Jeśli osoby A, B, C będą siedzieć jak na rysunku 1., a następnie przesiądą się o jedno miejsce w lewo, to otrzymamy rozmieszczenie jak na rysunku 3.; jeśli znowu przesiądą się o jedno miejsce w lewo, to otrzymamy rozmieszczenie takie, jak na rysunku 5.

Podobnie jest w wypadku rysunków 2., 4. i 6. Każda z osób przedstawionych na tych rysunkach ma takich samych sąsiadów, więc i takie trzy rozmieszczenia uznajemy za identyczne.

Ostatecznie więc – w modelu 2. – są dwa różne rozmieszczenia trzech osób przy okrągłym stole.





Ad b)

Model 1.

Liczba rozmieszczeń 10 osób przy okrągłym stole jest równa liczbie ustawień 10 osób w szeregu i wynosi 10!

Model 2.

Dla pierwszej osoby wybieramy miejsce przy okrągłym stole i ta osoba nie zmienia tego miejsca (zobacz: osoba A w punkcie a), model 2.). Pozostałych 9 osób może zmieniać miejsce na 9! sposobów. Każda zmiana miejsc przez te osoby powoduje, że co najmniej jedna osoba ma innych sąsiadów.

Liczba rozmieszczeń 10 osób przy okrągłym stole jest równa 9!

Definicja 1.

Permutacją (bez powtórzeń) n-elementowego zbioru A, gdzie $n \in \mathbf{N}_+$, nazywamy każdy n-wyrazowy ciąg utworzony ze wszystkich elementów zbioru A.

Twierdzenie 1.

Liczba permutacji (bez powtórzeń) zbioru n-elementowego, gdzie $n \in \mathbf{N}_+$, jest równa $n!$

Sprawdź, czy rozumiesz

1. Oblicz:

   a) $3! + 4!$ b) $6! - 4!$ c) $2! \cdot 3! \cdot 4!$ d) $10! : 8!$

2. Ile jest różnych liczb siedmiocyfrowych utworzonych z cyfr należących do zbioru $\{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, jeśli cyfry w liczbie się nie powtarzają?
3. Ile jest różnych liczb sześciocyfrowych parzystych, utworzonych z cyfr należących do zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, jeśli cyfry w liczbie się nie powtarzają?
4. Na ile sposobów może wejść do autokaru jednym wejściem 7 osób, wśród których są trzy kobiety i czterej mężczyźni, jeśli najpierw wsiadają kobiety?
5. Na ile sposobów Marta może wysłać cztery różne pocztówki z wakacji do czterech przyjaciółek?
6. Na ile sposobów może ustawić się w szeregu grupa 4 chłopców i 4 dziewcząt, tak aby dwie osoby tej samej płci nie stały obok siebie?

Kombinacje

Przykład 1.

Z grupy składającej się z 3 dziewcząt i 2 chłopców trzeba wybrać dwuosobową delegację. Na ile sposobów można to zrobić?

Zastanówmy się najpierw, czy kolejność wybieranych osób jest istotna. Oczywiście nie. Ważny jest tylko skład delegacji (czyli to, które osoby zostały wybrane), a nie kolejność wybierania. Zatem do opisu wyboru delegacji wygodnie jest użyć pojęcia podzbiorów (a nie ciągów). Możemy powiedzieć, że dwuosobową delegację można wybrać na tyle sposobów, ile jest dwuelementowych podzbiorów zbioru złożonego z 5 elementów.
Wprowadźmy oznaczenia:

X_1, X_2, X_3 – dziewczynki

Y_1, Y_2 – chłopcy

Wypiszemy wszystkie dwuelementowe podzbiory zbioru $\{X_1, X_2, X_3, Y_1, Y_2\}$:

$\{X_1, X_2\}$ $\{X_1, X_3\}$ $\{X_1, Y_1\}$ $\{X_1, Y_2\}$

$\{X_2, X_3\}$ $\{X_2, Y_1\}$ $\{X_2, Y_2\}$

$\{X_3, Y_1\}$ $\{X_3, Y_2\}$

$\{Y_1, Y_2\}$

Dwuosobową delegację można wybrać na 10 sposobów.

Zaznaczmy to wyraźnie: kolejność wypisywania elementów zbioru (podzbioru) <u>nie jest</u> istotna. Mamy więc na przykład:

$\{X_1, X_2\} = \{X_2, X_1\}$

Zbiory (podzbiory) nie są równe, jeśli różnią się co najmniej jednym elementem, na przykład

$\{X_1, X_2\} \neq \{X_1, X_3\}$ $\qquad$ $\{X_1, X_2\} \neq \{Y_1, Y_2\}$

Definicja 1.

Kombinacją *k*-elementową bez powtórzeń *n*-elementowego zbioru *A*, gdzie $k, n \in \boldsymbol{N}$ i $k \leqslant n$, nazywamy każdy k-elementowy podzbiór zbioru A (przy czym elementy zbioru A nie mogą się powtarzać).

Definicja 2.

Liczbę k-elementowych kombinacji bez powtórzeń zbioru n-elementowego, gdzie $k, n \in \boldsymbol{N}$ i $k \leqslant n$, oznaczamy symbolem $\binom{n}{k}$ i czytamy „n po k”.

Z przykładu 1. wiemy, że $\binom{5}{2} = 10$.

Wyznaczanie liczby podzbiorów dowolnego zbioru ułatwia następujące twierdzenie.

Twierdzenie 1.

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}, \text{ gdzie } k, n \in \boldsymbol{N} \text{ i } k \leqslant n$$

Przykład 2.

Korzystając z twierdzenia 1., obliczamy:

a) $\binom{6}{3} = \frac{6!}{(6-3)! \cdot 3!} = \frac{6!}{3! \cdot 3!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3!}{3! \cdot 3!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 20$

b) $\binom{7}{7} = \frac{7!}{(7-7)! \cdot 7!} = \frac{7!}{0! \cdot 7!} = \frac{7!}{1 \cdot 7!} = 1$

c) $\binom{10}{2} = \frac{10!}{(10-2)! \cdot 2!} = \frac{10!}{8! \cdot 2!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8!}{8! \cdot 2!} = \frac{10 \cdot 9}{2} = 45$

d) $\binom{10}{8} = \frac{10!}{(10-8)! \cdot 8!} = \frac{10!}{2! \cdot 8!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8!}{2! \cdot 8!} = \frac{10 \cdot 9}{2} = 45$

Przykład 3.

Ile różnych prostych wyznacza 100 punktów, jeśli dowolne trzy z nich nie są współliniowe?

Każdą prostą wyznaczają 2 punkty, przy czym kolejność ich wyboru oczywiście nie jest ważna. Wszystkich prostych jest zatem tyle, ile dwuelementowych podzbiorów zbioru 100-elementowego. Mamy więc:

$$\binom{100}{2} = \frac{100!}{(100-2)! \cdot 2!} = \frac{100 \cdot 99 \cdot 98!}{98! \cdot 2!} = \frac{100 \cdot 99}{2} = 4950$$

Sto punktów wyznacza 4950 prostych.

Przykład 4.

Z grupy składającej się z 3 dziewcząt i 2 chłopców trzeba wybrać dwuosobową delegację, w której ma być co najmniej jedna dziewczynka. Na ile sposobów można to zrobić?

Łatwo jest odpowiedzieć na postawione pytanie. W przykładzie 1. wypisaliśmy wszystkie możliwe składy delegacji. Jest ich 10. Tylko w jednej delegacji nie ma ani jednej dziewczynki. Zatem delegacji, w których jest co najmniej jedna dziewczynka, można utworzyć 9.

Zapiszemy teraz rozwiązanie tego zadania z wykorzystaniem symboli kombinatorycznych. Taki sposób będzie przydatny w przypadkach, gdy nie będzie możliwości wypisania wszystkich rozwiązań (ze względu na ich zbyt wielką liczbę).

Zauważ, że przy wyborze delegacji (spełniającej warunki zadania) możliwe są dwa rozłączne przypadki:

- w delegacji jest jedna dziewczynka i jeden chłopiec
- w delegacji są dwie dziewczynki.

Obliczamy, ile jest możliwości utworzenia delegacji w każdym przypadku.

- Jedną dziewczynkę z trzech można wybrać na $\binom{3}{1}$, czyli 3 sposoby. Do każdej tak wybranej dziewczynki możemy wybrać chłopca na $\binom{2}{1}$, czyli 2 sposoby.

  Zatem – zgodnie z regułą mnożenia – delegacji, w których jest jedna dziewczynka i jeden chłopiec, jest

  $$\binom{3}{1}\cdot\binom{2}{1}$$

- Dwie dziewczynki z trzech można wybrać na $\binom{3}{2}$, czyli 3 sposoby.

Możliwości utworzenia delegacji, w których jest co najmniej jedna dziewczynka – zgodnie z regułą dodawania – jest

$$\binom{3}{1}\cdot\binom{2}{1}+\binom{3}{2}=6+3=9$$

W rozwiązaniu takiego zadania trzeba uważać, by nie popełnić następującego <u>błędu</u>:

„Ponieważ w delegacji ma być co najmniej jedna dziewczynka, więc najpierw z trzech dziewczynek wybieramy jedną na $\binom{3}{1}$, czyli 3 sposoby. Z pozostałych czterech osób (dwóch dziewczynek i dwóch chłopców) wybieramy jedną na $\binom{4}{1}$, czyli 4 sposoby. Zatem możliwości utworzenia delegacji, w której jest co najmniej jedna dziewczynka, jest $\binom{3}{1}\cdot\binom{4}{1}$."

To, że rozwiązanie jest błędne, można stwierdzić natychmiast, bowiem

$$\binom{3}{1}\cdot\binom{4}{1}=3\cdot 4=12$$

Poprawną odpowiedzią jest liczba 9. Na czym jednak polega błąd? Otóż w iloczynie $\binom{3}{1}\cdot\binom{4}{1}$ trzy delegacje są liczone podwójnie. Jeśli na przykład w pierwszym etapie wybierzemy dziewczynkę X_1, a w drugim – dziewczynkę X_2, to otrzymamy delegację

$\{X_1, X_2\}$

Jeśli natomiast w pierwszym etapie wybierzemy dziewczynkę X_2, a w drugim – dziewczynkę X_1, to otrzymamy delegację

$\{X_2, X_1\}$

W iloczynie $\binom{3}{1}\cdot\binom{4}{1}$ delegacja $\{X_1, X_2\}$ jest więc liczona podwójnie (raz jako $\{X_1, X_2\}$, a raz jako $\{X_2, X_1\}$). Podobnie delegacje $\{X_1, X_3\}$ i $\{X_2, X_3\}$ są liczone podwójnie i dlatego otrzymany wynik jest o 3 większy od rozwiązania prawidłowego.

Przykład 5.

W pudełku jest 100 losów, w tym 9 wygrywających. Na ile sposobów można wyciągnąć trzy losy, tak aby wśród nich były co najmniej dwa wygrywające?

Możliwe są dwa rozłączne przypadki:
- wyciągniemy trzy losy, wśród których tylko dwa są wygrywające
- wyciągniemy trzy losy wygrywające.

Obliczamy:
- Dwa losy wygrywające możemy wyciągnąć na $\binom{9}{2}$ sposobów, jeden los pusty możemy wyciągnąć na $\binom{91}{1}$ sposobów, zatem trzy losy, wśród których tylko dwa są wygrywające, możemy wyciągnąć na

  $\binom{9}{2}\cdot\binom{91}{1}$ sposobów.
- Trzy losy wygrywające możemy wyciągnąć na $\binom{9}{3}$ sposobów.

Możliwości wyciągnięcia trzech losów tak, aby wśród nich były co najmniej dwa wygrywające, jest

$$\binom{9}{2}\cdot\binom{91}{1}+\binom{9}{3} \quad (= 36\cdot 91 + 84 = 3276 + 84 = 3360)$$

Ostatni przykład dotyczyć będzie rozkładu kart w grze w brydża. Talia do gry w brydża składa się 52 kart w czterech kolorach. Kolory to: piki (♠), kiery (♥), kara (♦) i trefle (♣). W każdym kolorze jest 13 kart (od dwójki do dziesiątki oraz walet, dama, król i as).

Przykład 6.

Każdemu z czterech graczy należy przydzielić 13 kart z talii 52-kartowej. Na ile sposobów można to zrobić tak, aby gracz A otrzymał 2 piki, gracz B – 6 pików, gracz C – 4 piki, gracz D – 1 pik?

Graczowi A należy przydzielić 2 piki (z 13) i 11 kart (z 39), które pikami nie są. Można to zrobić na

$$\binom{13}{2} \cdot \binom{39}{11} \text{ sposobów.}$$

Graczowi B należy przydzielić 6 pików (z pozostałych 11) i 7 kart (z pozostałych 28), które pikami nie są. Można to zrobić na

$$\binom{11}{6} \cdot \binom{28}{7} \text{ sposobów.}$$

Graczowi C należy przydzielić 4 piki (z pozostałych 5) i 9 kart (z pozostałych 21), które pikami nie są. Można to zrobić na

$$\binom{5}{4} \cdot \binom{21}{9} \text{ sposobów.}$$

Graczowi D należy przydzielić pozostałe 13 kart. Można to zrobić na 1 sposób. Ostatecznie, wszystkich możliwych sposobów rozdania kart, tak aby były spełnione warunki zadania, jest

$$\binom{13}{2} \cdot \binom{39}{11} \cdot \binom{11}{6} \cdot \binom{28}{7} \cdot \binom{5}{4} \cdot \binom{21}{9}$$

Liczba ta jest większa niż 10^{26}.

Sprawdź, czy rozumiesz

1. Oblicz:

a) $\binom{6}{3}$ b) $2 \cdot \binom{7}{5}$ c) $\binom{8}{2} - \binom{5}{3}$ d) $\binom{10}{9} \cdot \binom{9}{0}$

2. Wykaż, że dla dowolnych liczb naturalnych n, k takich, że $n \geqslant k$:

a) $\binom{n}{0} = 1$ b) $\binom{n}{1} = n$ c) $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ d) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

3. Na płaszczyźnie danych jest 7 punktów, z których dowolne trzy nie są współliniowe.
   a) Ile różnych odcinków można otrzymać, których końcami są te punkty?
   b) Ile można otrzymać różnych trójkątów, których wierzchołkami są te punkty?

Kombinatoryka – zadania różne

Przykład 1.

Ile różnych napisów (mających sens lub nie) można utworzyć, przestawiając litery wyrazu TEMATYKA?

W wyrazie TEMATYKA występują dwie litery T, dwie litery A, po jednej literze E, M, Y, K. Łatwo zauważyć, że nie każda zamiana dwóch liter da nam nowy napis, na przykład jeśli w dowolnym napisie zamienimy miejscami dwie litery A, to otrzymamy ten sam napis. Postępujemy tak:
Mamy osiem miejsc, które zapełniamy literami.

$$\square\ \square\ \square\ \square\ \square\ \square\ \square\ \square$$

Najpierw wybieramy 2 miejsca na literę T. Możemy to zrobić na

$\binom{8}{2}$ sposobów.

Z pozostałych 6 miejsc wybieramy 2 miejsca na literę A. Możemy to zrobić na

$\binom{6}{2}$ sposobów.

Z pozostałych 4 miejsc wybieramy jedno na literę E, z pozostałych trzech miejsc wybieramy jedno na literę M, z pozostałych dwóch – na literę Y, ostatnie miejsce przeznaczamy na literę K. Zatem wszystkich napisów jest

$$\binom{8}{2}\cdot\binom{6}{2}\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 \qquad \left(\text{czyli } \frac{8!}{2!\cdot 6!}\cdot\frac{6!}{2!\cdot 4!}\cdot 4! = \frac{8!}{2!\cdot 2!} = 10\,080\right)$$

Przykład 2.

Ile można utworzyć różnych numerów rejestracyjnych składających się z 3 liter i 5 cyfr, jeśli przyjmiemy, że alfabet składa się z 24 liter i posługujemy się tylko dużymi literami?

Część numeru rejestracyjnego złożonego z 3 liter można utworzyć na

24^3 sposobów.

(Tyle jest trójwyrazowych wariacji z powtórzeniami zbioru 24-elementowego).
Część numeru rejestracyjnego złożonego z 5 cyfr można utworzyć na

10^5 sposobów.

(Tyle jest pięciowyrazowych wariacji z powtórzeniami zbioru 10-elementowego.)
Zatem – zgodnie z regułą mnożenia – wszystkich numerów rejestracyjnych jest

$24^3\cdot 10^5$

Przykład 3.

Z cyfr należących do zbioru $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ tworzymy liczby czterocyfrowe o różnych cyfrach. Ile wśród nich jest liczb podzielnych przez 5?

Liczba jest podzielna przez 5, jeśli jej cyfra jedności jest równa 0 lub 5. Rozpatrzmy więc dwa rozłączne przypadki:

- cyfra jedności liczby czterocyfrowej jest równa 0
- cyfra jedności liczby czterocyfrowej jest równa 5.

Obliczamy:

- Cyfrę tysięcy możemy wybrać na 6 sposobów, cyfrę setek – na 5 sposobów, cyfrę dziesiątek – na 4 sposoby i cyfrę jedności na 1 sposób (cyfra 0). Zatem możliwości utworzenia liczby czterocyfrowej jest
  $$6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 1$$
- Cyfrę tysięcy możemy wybrać na 5 sposobów (nie może być to 0 ani 5), cyfrę setek – na 5 sposobów, cyfrę dziesiątek – na 4 sposoby i cyfrę jedności na 1 sposób (cyfra 5). Zatem możliwości utworzenia liczby czterocyfrowej jest
  $$5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 1$$

Liczb czterocyfrowych o różnych cyfrach, podzielnych przez 5 – zgodnie z regułą dodawania – jest $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 1 + 5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 1$ (czyli $120 + 100 = 220$).

Przykład 4.

W klasie jest 12 dziewcząt i 10 chłopców. Z tej klasy wybieramy delegację liczącą 4 osoby. Na ile sposobów można to zrobić tak, by wśród wybranych osób był co najmniej jeden chłopiec?

Zadanie to można rozwiązać, rozpatrując cztery rozłączne przypadki (wskaż je). Można też postąpić tak: wyznaczamy liczbę wszystkich możliwych delegacji. Jest ich

$$\binom{22}{4}$$

Od tej liczby odejmujemy liczbę delegacji, które można utworzyć z samych dziewcząt. Wówczas pozostanie liczba delegacji, w których jest co najmniej jeden chłopiec:

$$\binom{22}{4} - \binom{12}{4} \quad (\text{czyli } 7315 - 495 = 6820)$$

Przykład 5.

Obliczymy, ile jest liczb dwunastocyfrowych utworzonych w następujący sposób:

– do zapisania każdej liczby wybieramy trzy cyfry ze zbioru $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$,
– jedna cyfra występuje 3 razy, druga cyfra występuje 4 razy, trzecia cyfra występuje 5 razy.

Rozważymy dwa przypadki.

I przypadek: Żadna z trzech wybranych cyfr nie jest zerem. W tym przypadku wszystkich liczb dwunastocyfrowych jest

$$\binom{6}{3}\cdot\binom{12}{3}\cdot 3\cdot\binom{9}{4}\cdot 2\cdot\binom{5}{5}\cdot 1,\qquad \text{czyli}\qquad 3\,326\,400.$$

Mamy:

$\binom{6}{3}$ – na tyle sposobów możemy wybrać 3 cyfry spośród cyfr od 1 do 6,

$\binom{12}{3}\cdot 3$ – na tyle sposobów wybieramy 3 miejsca i cyfrę (spośród wybranych wyżej), która ma w zapisie liczby dwunastocyfrowej wystąpić trzy razy,

$\binom{9}{4}\cdot 2$ – na tyle sposobów wybieramy 4 miejsca z pozostałych 9 i cyfrę (spośród wybranych wyżej), która ma w zapisie liczby dwunastocyfrowej wystąpić cztery razy.

W ostatnie 5 miejsc wpisujemy ostatnią cyfrę (spośród wybranych wyżej).

II przypadek: Jedna z trzech wybranych cyfr jest zerem. Mamy trzy możliwości.

a) Zero występuje w zapisie liczby dwunastocyfrowej 3 razy (i oczywiście nie występuje na początku tej liczby). Takich liczb jest

$$\binom{6}{2}\cdot\binom{11}{3}\cdot\binom{9}{4}\cdot 2\cdot\binom{5}{5}\cdot 1,\qquad \text{czyli}\qquad 623\,700,\qquad \text{gdzie}$$

$\binom{6}{2}$ – na tyle sposobów wybieramy dwie cyfry (obie różne od zera),

$\binom{11}{3}$ – na tyle sposobów wybieramy trzy miejsca dla zer (pomijamy pierwsze miejsce),

$\binom{9}{4}\cdot 2$ – na tyle sposobów możemy wybrać miejsce i pierwszą (niezerową) cyfrę (spośród wybranych wyżej), która ma w zapisie liczby dwunastocyfrowej wystąpić cztery razy (tu już uwzględniamy pierwsze miejsce). W pozostałe 5 miejsc wstawiamy drugą wybraną cyfrę.

b) Zero występuje w zapisie liczby dwunastocyfrowej 4 razy (i oczywiście nie występuje na początku tej liczby). Takich liczb jest

$$\binom{6}{2}\cdot\binom{11}{4}\cdot\binom{8}{3}\cdot 2\cdot\binom{5}{5}\cdot 1,\qquad \text{czyli}\qquad 554\,400.$$

c) Zero występuje w zapisie liczby dwunastocyfrowej 5 razy (i oczywiście nie występuje na początku tej liczby). Takich liczb jest

$$\binom{6}{2}\cdot\binom{11}{5}\cdot\binom{7}{3}\cdot 2\cdot\binom{4}{4}\cdot 1,\qquad \text{czyli}\qquad 485\,100.$$

Wszystkich liczb spełniających warunki zadania jest

$3\,326\,400 + 623\,700 + 554\,400 + 485\,100$, czyli $4\,989\,600$.

Przykład 6.

Ile jest liczb sześciocyfrowych, w których suma cyfr:

a) jest równa 4 b) jest równa 9?

Ad a) Rozważmy następujące przypadki.

<u>I przypadek:</u> Wśród cyfr liczby sześciocyfrowej jest czwórka i pięć zer.
Cyfrą na pierwszym miejscu (czyli cyfrą setek tysięcy) jest czwórka, pozostałe cyfry to zera, zatem jest 1 taka liczba.

<u>II przypadek:</u> Wśród cyfr liczby sześciocyfrowej jest trójka, jedynka i cztery zera.
Cyfrę na pierwszym miejscu wybieramy na 2 sposoby, miejsce dla drugiej cyfry różnej od zera wybieramy na 5 sposobów, zatem liczb sześciocyfrowych w tym przypadku jest $2 \cdot 5$, czyli 10.

<u>III przypadek:</u> Wśród cyfr liczby sześciocyfrowej są dwie dwójki i cztery zera.
Cyfrą na pierwszym miejscu jest dwójka, miejsce dla drugiej dwójki można wybrać na 5 sposobów, zatem w tym przypadku jest 5 liczb.

<u>IV przypadek:</u> Wśród cyfr liczby sześciocyfrowej jest dwójka, dwie jedynki i trzy zera.
Jeśli na pierwszym miejscu jest dwójka, to miejsca dla dwóch jedynek możemy wybrać na $\binom{5}{2}$ sposobów, jeśli na pierwszym miejscu jest 1, to miejsce dla drugiej jedynki i dwójki można wybrać na $\binom{5}{2} \cdot 2$ sposobów, zatem w tym przypadku jest $\binom{5}{2} + \binom{5}{2} \cdot 2$, czyli 30 liczb.

<u>V przypadek:</u> Wśród cyfr liczby sześciocyfrowej są cztery jedynki i dwa zera.
Na pierwszym miejscu jest jedynka, miejsca dla trzech pozostałych jedynek można wybrać na $\binom{5}{3}$ sposobów, czyli w tym przypadku jest 10 liczb.

Innych przypadków nie ma. Wszystkich liczb spełniających warunki zadania jest $1 + 10 + 5 + 30 + 10$, czyli 56.

Ad b) Rozwiązanie tego zadania metodą zaprezentowaną w punkcie a) byłoby bardzo żmudne. Opracujemy więc inną metodę. Liczbę sześciocyfrową, na przykład 203 112, można przedstawić „graficznie” w następujący sposób

```
| • • | | • • • | • | • | • • |
   2   0    3    1   1    2
```

Mamy sześć komórek wyznaczone przez pionowe kreski | (kresek jest 7) oraz 9 kropek (•). Liczba kropek w pierwszej komórce określa liczbę setek tysięcy (u nas 2), liczba kropek w drugiej komórce określa liczbę dziesiątek tysięcy (u nas 0) i tak dalej, aż do szóstej komórki, w której liczba kropek określa liczbę jedności (u nas 2). Jeśli teraz poprzestawiamy pionowe kreski, to otrzymamy „zapis” innej liczby, na przykład

| • • • • • | • | • | • • | | |
5 1 1 2 0 0

To odpowiada liczbie 511 200. Czy każde przestawienie kresek pozwoli otrzymać zapis liczby sześciocyfrowej? Otóż nie! Pierwsza komórka nie może być pusta! Zapis, na przykład taki

| | • | • | • | • • • • • • | |
0 1 1 1 6 0

oznacza liczbę 11 160, czyli liczbę pięciocyfrową. Ponadto zauważ, że zapis każdej liczby zaczyna się i kończy pionową kreską. Możemy więc założyć, że pionowe kreski skrajne są nieruchome. Aby pierwsza komórka nie była pusta, „doklejamy” jedną kropkę. W zapisie na rysunku poniżej

| • • • | • | • | • | • | • • |

kolorem czerwonym zaznaczone zostały elementy nieruchome, kolorem zielonym elementy, które mogą zmieniać miejsce. Elementów zielonych jest 13 (= 8 + 5). Każdy wybór pięciu miejsc z trzynastu – na zielone kreski (albo ośmiu miejsc z trzynastu – na zielone kropki) wyznacza nam zapis liczby sześciocyfrowej, w której suma cyfr jest równa 9. Zatem wszystkich takich liczb jest

$$\binom{13}{5}, \qquad \text{czyli} \qquad 1287.$$

Przykład 7.

Rozważmy równanie $x + y + z + t = 54$. Jego rozwiązaniami są uporządkowane czwórki liczb, na przykład (48, 2, 1, 3). Obliczymy, ile jest takich rozwiązań, które składają się z czterech liczb naturalnych dodatnich.

Zauważ, że możemy zastosować metodę rozwiązania zaprezentowaną w poprzednim przykładzie w punkcie b).

| • • ... • | • • | • | • • • |
48 2 1 3

Ponieważ rozwiązania mają składać się z liczb naturalnych dodatnich, to oznacza – w naszym modelu – że żadna z komórek nie może być pusta. Aby to zapewnić, „doklejamy” do pierwszych czterech kresek z prawej strony po jednej kropce (co zaznaczone zostało pętelką).

| • • ... • | • • | • • • • | • • • |

Kolorem czerwonym zostały zaznaczone elementy, które są nieruchome, kolorem zielonym – elementy, które mogą zmieniać położenie. Elementów zielonych („ruchomych”) jest

$$54 + 5 - 2 - 4, \qquad \text{czyli} \qquad 53.$$

Każdy wybór trzech miejsc z 53 na trzy kreski (z „przyklejonymi” kropkami) wyznacza rozmieszczenie kropek, a więc i rozwiązanie równania. Zatem wszystkich rozwiązań spełniających warunki zadania jest

$$\binom{53}{3}, \quad \text{czyli} \quad 23\,426.$$

Przykład 8.

Obliczymy, ile różnych napisów czteroliterowych z różnych liter można otrzymać z 24 liter alfabetu, zakładając, że litery występujące w każdym napisie należą do grupy składającej się z siedmiu stojących obok siebie w alfabecie liter.

Pierwszą siedmioliterową grupą kolejnych liter alfabetu (grupą pierwszego rodzaju) jest grupa

A B C D E F G

Napisów czteroliterowych złożonych z różnych liter z tej grupy można utworzyć

$$\binom{7}{4} \cdot 4!, \quad \text{czyli} \quad 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4, \quad \text{to jest} \quad 840.$$

Drugą siedmioliterową grupą kolejnych liter alfabety (grupą drugiego rodzaju) jest grupa

B C D E F G H

Liczbę nowych napisów utworzonych z liter tej grupy można obliczyć na dwa sposoby.

I sposób – wyznaczamy liczbę nowych napisów bezpośrednio.
Nowe napisy składają się z litery **H** i trzech spośród liter **B C D E F G**. Jest ich

$$\binom{6}{3} \cdot 4!, \quad \text{czyli} \quad 480.$$

II sposób – od liczby wszystkich napisów utworzonych z liter tej grupy odejmujemy liczbę napisów utworzonych w ramach grupy poprzedniej.

$$\binom{7}{4} \cdot 4! - \binom{6}{4} \cdot 4!, \quad \text{czyli} \quad 840 - 360, \quad \text{to jest} \quad 480.$$

Wszystkie pozostałe grupy siedmioliterowe są grupami drugiego rodzaju. Wszystkich grup drugiego rodzaju jest 17. Zatem wszystkich napisów jest

$$840 + 17 \cdot 480, \quad \text{czyli} \quad 9000.$$

Sprawdź, czy rozumiesz

1. Ile różnych kodów można otrzymać, przestawiając litery wyrazu:
   a) KOS b) MAMA c) DAMA d) KARATEKA?

2. Ile jest różnych liczb trzycyfrowych:
   a) o różnych cyfrach
   b) podzielnych przez 10
   c) mniejszych niż 400
   d) większych od 759?

Doświadczenie losowe

Słuchając różnych informacji (np. sportowych lub politycznych), często można się spotkać z wypowiedziami odnoszącymi się do możliwości zajścia jakiegoś zdarzenia (w przyszłości lub przeszłości), na przykład:

„Ten zawodnik ma duże szanse na zwycięstwo w biegu na 10 km..."

„Szanse zwycięstwa w wyborach prezydenckich obu kandydatów są równe..."

„Z bardzo dużym prawdopodobieństwem, graniczącym z pewnością, można stwierdzić, że przestępstwo to popełnił..."

Wypowiedzi tego typu zawierają opisową ocenę możliwości zajścia omawianego zdarzenia.

W tym rozdziale zajmiemy się matematycznym opisem zjawisk (doświadczeń) losowych i powiemy, jak wyrażać prawdopodobieństwo za pomocą liczb.

Doświadczeniem losowym nazywamy taki powtarzalny eksperyment, w którym konkretnego wyniku nie jesteśmy w stanie przewidzieć, znamy natomiast pełną listę możliwych wyników. Dodatkowo zakładamy, że każdy z tych wyników jest rozłączny z pozostałymi wynikami na liście.
Wyniki te będziemy nazywać **zdarzeniami elementarnymi**, a zbiór wszystkich tych zdarzeń – **przestrzenią zdarzeń elementarnych**.
Przestrzeń zdarzeń elementarnych oznacza się dużą grecką literą omega (Ω).

Przykład 1.

Doświadczenie losowe polega na jednokrotnym rzucie monetą.

W tym wypadku rozpatrujemy dwa zdarzenia elementarne: „wypadł orzeł", „wypadła reszka".
Mamy więc

$\Omega = \{$„wypadł orzeł", „wypadła reszka"$\}$

Zwykle – jeśli to możliwe – zdarzenia elementarne oznacza się krócej, ale tak, by nie prowadziło to do nieporozumień.
I tak zdarzenie elementarne:

„wypadł orzeł" oznaczamy zwykle literą O,

„wypadła reszka" oznaczamy zwykle literą R, stąd

$\Omega = \{O, R\}$

UWAGA: Określając przestrzeń zdarzeń elementarnych danego doświadczenia losowego, dokonujemy zwykle pewnych uproszczeń. Na przykład rozpatrując rzut monetą, pomijamy przypadki:

„moneta stanie na krawędzi", „moneta wpadnie pod regał" itp.

Takie uproszczenia z jednej strony ułatwiają opis przestrzeni zdarzeń, z drugiej – nie ograniczają stosowalności takiej przestrzeni zdarzeń w rozwiązywaniu zadań.

Przykład 2.

Doświadczenie losowe polega na jednokrotnym rzucie sześcienną kostką do gry. Możemy wówczas zapisać:

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\},$$

gdzie

1 oznacza zdarzenie elementarne „wypadła ścianka z jednym oczkiem",

2 oznacza zdarzenie elementarne „wypadła ścianka z dwoma oczkami",

3 oznacza zdarzenie elementarne „wypadła ścianka z trzema oczkami",

4 oznacza zdarzenie elementarne „wypadła ścianka z czterema oczkami",

5 oznacza zdarzenie elementarne „wypadła ścianka z pięcioma oczkami",

6 oznacza zdarzenie elementarne „wypadła ścianka z sześcioma oczkami".

Przykład 3.

W pudełku są trzy kartki: na pierwszej jest zapisana liczba 2, na drugiej – liczba 3, na trzeciej – liczba 4. Doświadczenie losowe polega na dwukrotnym losowaniu kartki z pudełka: losujemy jedną kartkę, zapisujemy liczbę, odkładamy kartkę na bok, ponownie losujemy kartkę z pudełka i zapisujemy otrzymaną liczbę. (Takie losowanie nazywamy losowaniem bez zwracania).

W tym wypadku zdarzenie elementarne możemy określić jako ciąg dwuwyrazowy: pierwsza liczba jest wynikiem pierwszego losowania, druga liczba – wynikiem drugiego losowania. Mamy więc:

$$\Omega = \{(2, 3), (2, 4), (3, 2), (3, 4), (4, 2), (4, 3)\}$$

Tę przestrzeń można też opisać tak:

$$\Omega = \{(a, b):\ a, b \in \{2, 3, 4\}\ \text{ i }\ a \neq b\}$$

lub tak:

Ω jest to zbiór wszystkich dwuwyrazowych wariacji bez powtórzeń zbioru $\{2, 3, 4\}$.

Opis symboliczny lub słowny przestrzeni zdarzeń elementarnych warto stosować szczególnie wtedy, gdy liczba zdarzeń elementarnych jest duża.

Przykład 4.

Mamy dane pudełko z kartkami, takimi jak w przykładzie 3. Doświadczenie losowe polega na dwukrotnym losowaniu kartki z pudełka: losujemy jedną kartkę, zapisujemy liczbę, wrzucamy kartkę do pudełka, losujemy drugi raz kartkę i zapisujemy otrzymaną liczbę. (Takie losowanie nazywamy losowaniem ze zwracaniem).
W tym wypadku otrzymujemy:

$$\Omega = \{(2,2), (2,3), (2,4), (3,2), (3,3), (3,4), (4,2), (4,3), (4,4)\}$$

Przestrzeń Ω można też opisać tak:

$$\Omega = \{(a,b):\ a, b \in \{2,3,4\}\}$$

lub tak:

Ω jest to zbiór wszystkich dwuwyrazowych wariacji z powtórzeniami zbioru $\{2, 3, 4\}$.

Przykład 5.

Doświadczenie losowe polega na jednym rzucie dwiema monetami.

Model 1. Zakładamy, że monety są rozróżnialne.

Monety możemy traktować jako rozróżnialne, na przykład rzucając jedną monetę lewą ręką, a drugą monetę – prawą ręką. Za zdarzenia elementarne możemy więc uważać ciągi dwuwyrazowe, których pierwszym wyrazem jest wynik rzutu lewą ręką, a drugim wyrazem – wynik rzutu prawą ręką. Zatem

$$\Omega = \{(\mathrm{R},\mathrm{R}), (\mathrm{R},\mathrm{O}), (\mathrm{O},\mathrm{R}), (\mathrm{O},\mathrm{O})\}$$

Model 2. Zakładamy, że monety są nierozróżnialne.

W takim wypadku za zdarzenie elementarne możemy uznać na przykład liczbę otrzymanych orłów. Wówczas

$\Omega = \{$„nie wypadł ani jeden orzeł", „wypadł tylko jeden orzeł", „wypadły dwa orły"$\}$

Jak pokazuje ostatni przykład, do jednego doświadczenia losowego można określić przestrzeń zdarzeń elementarnych na różne sposoby. Wybór przestrzeni zdarzeń elementarnych może zależeć od tego, jaki problem związany z danym eksperymentem losowym mamy rozwiązać.
Warto jednak zaznaczyć, że zwykle wygodniej posługiwać się przestrzeniami, w których wszystkie zdarzenia elementarne są jednakowo prawdopodobne. Jeśli monety rozpatrywane w doświadczeniu są symetryczne, to tak jest w modelu 1., natomiast w modelu 2. zdarzenie elementarne „wypadł tylko jeden orzeł" jest bardziej prawdopodobne niż każde z dwóch pozostałych zdarzeń elementarnych.

Przykład 6.

W pudełku są cztery klocki: na pierwszym jest litera L, na drugim – litera A, na trzecim – litera T, na czwartym – litera O. Losujemy kolejno po jednym klocku i tworzymy czteroliterowy napis.
Przestrzeń zdarzeń elementarnych tego doświadczenia:

Ω jest to zbiór wszystkich czterowyrazowych permutacji zbioru {L, A, T, O}.

Przykład 7.

Doświadczenie losowe polega na wylosowaniu 13 kart z talii 52 kart.

Model 1. Zakładamy, że nie jest istotna kolejność losowania kart. Za zdarzenia elementarne przyjmujemy wówczas 13-elementowe podzbiory talii kart. Zatem:

Ω jest to zbiór wszystkich 13-elementowych kombinacji zbioru złożonego z 52 kart.

Model 2. Zakładamy, że jest istotna kolejność losowania kart. W takim przypadku zdarzenia elementarne można traktować jako 13-wyrazowe ciągi o różnych wyrazach. Wówczas przestrzeń Ω opisalibyśmy tak:

Ω jest to zbiór wszystkich 13-wyrazowych wariacji bez powtórzeń zbioru złożonego z 52 kart.

Sprawdź, czy rozumiesz

1. Rzucamy dwa razy symetryczną sześcienną kostką do gry. Interesują nas liczby oczek, jakie wypadły w obu rzutach. Wypisz zdarzenia elementarne dla tego doświadczenia.
2. Doświadczenie losowe polega na rzucie trzema rozróżnialnymi monetami. Wypisz zdarzenia elementarne dla tego doświadczenia.
3. Na półce w sposób losowy ustawiamy w jednym szeregu książki A, B, C, D. Opisz przestrzeń zdarzeń elementarnych tego doświadczenia.
4. Z talii 52 kart losujemy 5 kart. Opisz przestrzeń zdarzeń elementarnych tego doświadczenia.
5. Ze zbioru {1, 2, 3, 4, 5} losujemy kolejno dwie liczby:
   a) ze zwracaniem
   b) bez zwracania
   i zapisujemy je w kolejności losowania. Wypisz zdarzenia elementarne dla tego doświadczenia.

Zdarzenia. Działania na zdarzeniach

Załóżmy, że rozpatrujemy doświadczenie losowe, dla którego określiliśmy przestrzeń zdarzeń elementarnych Ω.

$\Omega = \{a_1, a_2, a_3, ..., a_n\}$

Wówczas dowolny podzbiór przestrzeni Ω nazywamy **zdarzeniem** (zdarzeniem losowym). Dwa zdarzenia otrzymały specjalne określenia:

$\varnothing$ (zbiór pusty) nazywamy **zdarzeniem niemożliwym**

Ω nazywamy **zdarzeniem pewnym**.

(Jak zapewne pamiętasz z klasy pierwszej, zbiór pusty jest podzbiorem dowolnego zbioru oraz cały zbiór jest swoim podzbiorem).

Niech $A, B \subset \Omega$. Będziemy używać następujących określeń:

- jeśli $A = B$, to zdarzenia A i B nazywamy **zdarzeniami identycznymi**;
- jeśli $A \subset B$, to powiemy, że **zdarzenie *A* pociąga za sobą zdarzenie *B***;
- zbiór $A \cup B$ nazywamy **sumą zdarzeń** A i B,
  zbiór $A \cap B$ nazywamy **iloczynem zdarzeń** A i B,
  zbiór $A - B$ nazywamy **różnicą zdarzeń** A i B;
- jeśli zbiory A i B są rozłączne (tzn. $A \cap B = \varnothing$), to zdarzenia A i B nazywamy **zdarzeniami wykluczającymi się**;
- jeśli dowolne dwa zdarzenia spośród zdarzeń $A_1, A_2, ..., A_n \subset \Omega$ wykluczają się, to powiemy, że **zdarzenia $A_1, A_2, ..., A_n$ wykluczają się parami**;
- zbiór $\Omega - A$ (czyli dopełnienie zbioru A do przestrzeni Ω) nazywamy **zdarzeniem przeciwnym** do zdarzenia A i oznaczamy A';
- jeśli $a_1 \in A$, to powiemy, że **zdarzenie elementarne a_1 sprzyja zdarzeniu *A***.

Przykład 1.

Doświadczenie losowe polega na jednokrotnym rzucie kostką. Określamy przestrzeń zdarzeń elementarnych: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

a) Oznaczmy

A – zdarzenie „wypadła liczba oczek mniejsza od 8"

B – zdarzenie „wypadła liczba oczek większa od 6".

Wówczas

$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, więc $A = \Omega$.

Zdarzenie A jest zdarzeniem pewnym.

$B = \varnothing$

Zdarzenie B jest zdarzeniem niemożliwym.

b) Oznaczmy

A – zdarzenie „wypadła liczba oczek mniejsza od 4"

B – zdarzenie „wypadła liczba oczek mniejsza od 6, będąca dzielnikiem liczby 6".

Wówczas

$A = \{1, 2, 3\}$ i $B = \{1, 2, 3\}$, więc $A = B$.

Zdarzenia A i B są identyczne.

c) Oznaczmy

A – zdarzenie „wypadły 2 oczka lub 4 oczka"
B – zdarzenie „wypadła parzysta liczba oczek".

Mamy zatem

$A = \{2, 4\}$ i $B = \{2, 4, 6\}$, więc $A \subset B$.

Zdarzenie A pociąga za sobą zdarzenie B (inaczej mówiąc: jeśli zaszło zdarzenie A, to również zaszło zdarzenie B).

d) Oznaczmy

A – zdarzenie „wypadła parzysta liczba oczek"
B – zdarzenie „wypadła liczba oczek, która jest liczbą pierwszą".

Zatem

$A = \{2, 4, 6\}$ i $B = \{2, 3, 5\}$, wówczas

$A \cup B = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ – zdarzenie „wypadła parzysta liczba oczek lub liczba oczek będąca liczbą pierwszą"
$A \cap B = \{2\}$ – zdarzenie „wypadła parzysta liczba oczek, która jest liczbą pierwszą"
$A - B = \{4, 6\}$ – zdarzenie „wypadła parzysta liczba oczek, która nie jest liczbą pierwszą"
$A' = \{1, 3, 5\}$ – zdarzenie „wypadła nieparzysta liczba oczek"
$B' = \{1, 4, 6\}$ – zdarzenie „wypadła liczba oczek, która nie jest liczbą pierwszą".

Sprawdź, czy rozumiesz

1. Doświadczenie losowe polega na trzykrotnym rzucie symetryczną monetą. Opisz przestrzeń zdarzeń elementarnych tego doświadczenia. Wypisz zdarzenia elementarne, sprzyjające zdarzeniu:
   A – „wypadły tylko dwie reszki" B – „co najwyżej raz wypadł orzeł"
   C – „reszka nie wypadła ani razu".
   Opisz słowami zdarzenia A', B', C'.

2. Doświadczenie losowe polega na dwukrotnym rzucie symetryczną sześcienną kostką do gry. Opisz przestrzeń zdarzeń elementarnych tego doświadczenia. Następnie wypisz zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu:
   A – „suma wyrzuconych oczek jest liczbą dwucyfrową"
   B – „w pierwszym rzucie wypadła mniejsza liczba oczek, niż w drugim rzucie"
   C – „liczba oczek w drugim rzucie jest całkowitą wielokrotnością liczby oczek w pierwszym rzucie".
   Wyznacz elementy zdarzeń: $A \cap B$, $B - A$, $A \cup C$, $A \cap C$ i opisz słowami te zdarzenia.

Określenie prawdopodobieństwa

Punktem wyjścia do zdefiniowania prawdopodobieństwa stało się obserwowanie częstości różnych wyników wielokrotnie powtarzanych prostych doświadczeń losowych.

Niech doświadczenie losowe polega na rzucie symetryczną kostką sześcienną. Wiemy już, że zbiór możliwych wyników możemy zapisać tak:

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Interesuje nas, jak często będzie się pojawiać ścianka z jednym oczkiem i ścianka z sześcioma oczkami. Załóżmy, że doświadczenie powtórzyliśmy 60 razy i ścianka z jednym oczkiem wypadła 12 razy, a ścianka z sześcioma oczkami wypadła 13 razy.

Powiemy wówczas, że częstość otrzymania ścianki z jednym oczkiem jest równa $\frac{12}{60}$, a częstość otrzymania ścianki z sześcioma oczkami jest równa $\frac{13}{60}$. Czy jeśli teraz powtórzylibyśmy tę serię doświadczeń i rzucili kostką 60 razy, to czy znów otrzymamy 12 razy ściankę z jednym oczkiem i 13 razy ściankę z sześcioma oczkami? Oczywiście tak być nie musi! Częstość występowania interesujących nas wyników może być inna. Okazuje się jednak, że w miarę jak będziemy wykonywać coraz dłuższe serie doświadczeń, częstość pojawiania się interesującego nas wyniku będzie się zbliżać do pewnej liczby. Nietrudno się domyśleć, że zarówno w przypadku uzyskania ścianki z jednym oczkiem, jak i ścianki z sześcioma oczkami częstość powinna zbliżać się do $\frac{1}{6}$. Inaczej mówiąc: można się spodziewać, że około $\frac{1}{6}$ wszystkich wyników będą stanowić ścianki z jednym oczkiem i około $\frac{1}{6}$ wszystkich wyników będą stanowić ścianki z sześcioma oczkami. Wydaje się więc, że $\frac{1}{6}$ można byłoby uznać za liczbę charakteryzującą szansę (czyli za prawdopodobieństwo) pojawienia się ścianki z jednym oczkiem, a także ścianki z sześcioma oczkami w pojedynczym rzucie kostką.

Zastanówmy się, jakie własności powinno mieć prawdopodobieństwo. Oczywiście powinny one odpowiadać własnościom częstości.

Zauważ, że :

- częstość wyraża się liczbą nieujemną $\left(\frac{12}{60} \geqslant 0,\ \frac{13}{60} \geqslant 0\right)$
- częstość zdarzenia pewnego jest równa 1 $\left(\frac{60}{60} = 1\right)$
- jeśli mamy dwa zdarzenia wykluczające się (np. „wypadła ścianka z jednym oczkiem" oraz „wypadła ścianka z sześcioma oczkami"), to częstość sumy tych

zdarzeń („wypadła ścianka z jednym oczkiem lub z sześcioma oczkami", częstość: $\frac{25}{60}$) jest równa sumie częstości tych zdarzeń $\left(\frac{12}{60}+\frac{13}{60}\right)$.

Te rozważania prowadzą do następującej definicji.

Definicja 1.

Prawdopodobieństwem określonym na skończonej przestrzeni zdarzeń elementarnych Ω nazywamy taką funkcję P, która każdemu zdarzeniu A, $A \subset \Omega$, przyporządkowuje liczbę rzeczywistą $P(A)$ w taki sposób, że:

(A1) $P(A) \geqslant 0$

(A2) $P(\Omega) = 1$

(A3) jeśli $A, B \subset \Omega$ i $A \cap B = \varnothing$, to $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Warunki A1, A2 i A3 nazywamy aksjomatami prawdopodobieństwa.

Zauważ, że definicja 1. nie podaje sposobu obliczania prawdopodobieństwa, lecz tylko warunki, które musi spełniać funkcja, by można było ją nazwać prawdopodobieństwem. W szczególności dla jednego zbioru zdarzeń elementarnych Ω mogą być określone różne funkcje spełniające aksjomaty A1, A2 i A3.

Parę (Ω, P) nazywamy **przestrzenią probabilistyczną**. Można ją uważać za matematyczny opis danego doświadczenia losowego.

W obliczaniu prawdopodobieństwa pomocne jest następujące twierdzenie.

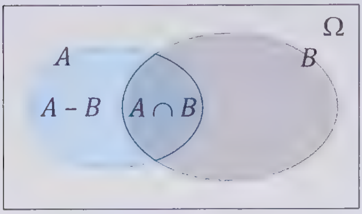
Twierdzenie 1. (własności prawdopodobieństwa)

Jeśli P jest prawdopodobieństwem określonym w przestrzeni zdarzeń elementarnych Ω oraz $A, B \subset \Omega$, to:

1) $P(\varnothing) = 0$
2) jeśli $A \subset B$, to $P(A) \leqslant P(B)$
3) $P(A) \leqslant 1$
4) $P(A') = 1 - P(A)$
5) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
6) jeśli zdarzenia $A_1, A_2, \ldots, A_n \subset \Omega$ wykluczają się parami, to

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n).$$

Udowodnimy własność 5.
Zauważ, że zachodzą następujące związki:



$A \cup B = (A - B) \cup B$ i $(A - B) \cap B = \varnothing$, więc z aksjomatu A3 mamy

(*) $P(A \cup B) = P(A - B) + P(B)$

$$A = (A - B) \cup (A \cap B)$$

$(A - B) \cap (A \cap B) = \varnothing$, więc z aksjomatu A3 otrzymujemy

(**) $P(A) = P(A - B) + P(A \cap B)$

Z równości (**) wyznaczamy $P(A - B)$.

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$$

Wyznaczoną wartość $P(A - B)$ wstawiamy do równości (*) i otrzymujemy

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

To kończy dowód własności 5.

Zwróć uwagę na aksjomat A3 i udowodnioną własność 5. W obu występuje prawdopodobieństwo sumy dwóch zdarzeń. Aksjomat pozwala obliczyć je (jako sumę prawdopodobieństw tych zdarzeń), ale tylko pod warunkiem, że zdarzenia się wykluczają. Własność 5. dotyczy dowolnych zdarzeń, które mogą się wykluczać lub mogą mieć niepustą część wspólną.

Przykład 1.

Wiadomo, że $A, B \subset \Omega$ i $P(A) = \frac{1}{2}$ oraz $P(B) = \frac{2}{3}$. Czy zdarzenia A i B mogą się wykluczać?

Gdyby zdarzenia A i B się wykluczały, to zgodnie z aksjomatem A3 byłoby

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Ale $P(A) + P(B) = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{7}{6}$, a z tego wynikałoby, że

$$P(A \cup B) > 1$$

Jest to niemożliwe (wobec własności 3.).
Zdarzenia A i B nie mogą się wykluczać.

Przykład 2.

Wiadomo, że $A, B \subset \Omega$ oraz $P(A') = \frac{1}{4}$, $P(A \cup B) = \frac{7}{8}$ i $P(A \cap B) = \frac{1}{8}$. Obliczymy $P(A)$, $P(B)$ i $P(A - B)$.

Obliczamy $P(A)$, korzystając z własności 4.

$$P(A) = 1 - P(A')$$

$$P(A) = 1 \quad \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

Aby obliczyć $P(B)$, skorzystamy z własności 5.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B), \text{ skąd}$$

$$P(B) = P(A \cup B) - P(A) + P(A \cap B), \text{ więc}$$

$$P(B) = \frac{7}{8} - \frac{3}{4} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$$

Obliczamy $P(A - B)$. Zauważ, że

$$A = (A - B) \cup (A \cap B) \text{ i } (A - B) \cap (A \cap B) = \varnothing \quad \text{(zobacz dowód własności 5.).}$$

Zatem

$$P(A) = P(A - B) + P(A \cap B), \text{ skąd}$$

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$$

$$P(A - B) = \frac{3}{4} - \frac{1}{8} = \frac{5}{8}$$

Oto szukane prawdopodobieństwa: $P(A) = \frac{3}{4}$, $P(B) = \frac{1}{4}$, $P(A - B) = \frac{5}{8}$.

Przykład 3.

Mamy kostkę w kształcie czworościanu foremnego. Na ściankach tej kostki są odpowiednio liczby: 1, 2, 3, 4. Kostka jest wykonana z materiału, który nie jest jednorodny. Rzucamy kostką i odczytujemy liczbę na ściance leżącej na stole. Wiadomo, że prawdopodobieństwo otrzymania liczby nie mniejszej niż 3 jest równe $\frac{3}{5}$, a otrzymania liczby nie większej niż 3 jest równe $\frac{4}{5}$. Jakie jest prawdopodobieństwo otrzymania liczby 3 w pojedynczym rzucie tą kostką?

Określamy przestrzeń zdarzeń elementarnych.

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$$

Przyjmujemy oznaczenia:

A – zdarzenie „otrzymano liczbę nie mniejszą niż 3”

B – zdarzenie „otrzymano liczbę nie większą niż 3”.

Zdarzeniu A sprzyjają dwa zdarzenia elementarne.

$$A = \{3, 4\}$$

Zdarzeniu B sprzyjają trzy zdarzenia elementarne.

$$B = \{1, 2, 3\}$$

Zauważ, że

$$A \cap B = \{3\}$$

Z własności 5. otrzymujemy

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$$

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4\} = \Omega, \text{ więc na mocy aksjomatu A2}$$

$$P(A \cup B) = P(\Omega) = 1, \text{ więc}$$

$$P(A \cap B) = \frac{3}{5} + \frac{4}{5} - 1 = \frac{2}{5}$$

Prawdopodobieństwo otrzymania liczby 3 jest równe $\frac{2}{5}$.

Przykład 4.

Mamy sześcienną kostkę do gry. Kostka ta została wykonana z materiału, który nie jest jednorodny. Wiadomo, że ścianka z sześcioma oczkami wypada 3 razy częściej niż każda z pozostałych ścianek. Jakie jest prawdopodobieństwo, że w pojedynczym rzucie tą kostką otrzymamy parzystą liczbę oczek?

Określamy przestrzeń zdarzeń elementarnych.

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Oznaczmy przez $3p$ prawdopodobieństwo otrzymania sześciu oczek w pojedynczym rzucie.

$$P(\{6\}) = 3p$$

Zatem z treści zadania wynika, że

$$P(\{1\}) = P(\{2\}) = P(\{3\}) = P(\{4\}) = P(\{5\}) = p$$

Z aksjomatu A2 i własności 6. (twierdzenie 1.) wiadomo, że

$$1 = P(\Omega) = P(\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}) = P(\{1\}) + P(\{2\}) + P(\{3\}) + P(\{4\}) + P(\{5\}) + P(\{6\}) =$$
$$= p + p + p + p + p + 3p, \quad \text{skąd}$$
$$1 = 8p, \text{ więc } p = \frac{1}{8}.$$

Niech A oznacza zdarzenie „wypadła parzysta liczba oczek w pojedynczym rzucie kostką".

$$A = \{2, 4, 6\}$$

Obliczamy $P(A)$, korzystając z własności 6. (twierdzenie 1.).

$$P(A) = P(\{2, 4, 6\}) = P(\{2\} \cup \{4\} \cup \{6\}) = P(\{2\}) + P(\{4\}) + P(\{6\}) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$$

Prawdopodobieństwo otrzymania parzystej liczby oczek jest równe $\frac{5}{8}$.

Twierdzenie 2.

Jeśli P jest prawdopodobieństwem określonym w przestrzeni zdarzeń elementarnych Ω oraz $A, B, C \subset \Omega$, to

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) \quad P(A \cap B) \quad P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C).$$

Dowód:

$$P[(A \cup B) \cup C] = P(A \cup B) + P(C) - P[(A \cup B) \cap C] =$$
$$= P(A) + P(B) - P(A \cap B) + P(C) - P[(A \cap C) \cup (B \cap C)] =$$
$$= P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - [P(A \cap C) + P(B \cap C) - P(A \cap B \cap C)] =$$
$$= P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

W dowodzie wykorzystaliśmy trzy razy wzór na prawdopodobieństwo sumy zdarzeń (twierdzenie 1. własność 5.) do obliczenia prawdopodobieństw

$P[(A \cup B) \cup C]$ $\quad$ $P(A \cup B)$ $\quad$ $P[(A \cap C) \cup (B \cap C)]$

oraz wykorzystaliśmy prawo działań na zbiorach: $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$.

Przykład 5.

Niech $A, B, C \subset \Omega$ i $P(A) = \frac{7}{10}$, $P(B) = \frac{3}{5}$, $P(C') = \frac{2}{3}$, $P(A \cap B) = \frac{1}{15}$, $P(B \cap C) = \frac{3}{10}$ i $P(A \cap C) = \frac{4}{15}$. Obliczymy $P(A \cap B \cap C)$, wiedząc dodatkowo, że zdarzenia A, B, C dają w sumie przestrzeń Ω.

Z ostatniego twierdzenia wynika, że

$$P(A \cap B \cap C) = P(A \cup B \cup C) - P(A) - P(B) - P(C) + P(A \cap B) + P(A \cap C) + P(B \cap C)$$

Mamy:

$A \cup B \cup C = \Omega$, więc $P(A \cup B \cup C) = P(\Omega) = 1$

$$P(C) = 1 - P(C') = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3},$$

zatem

$$P(A \cap B \cap C) = 1 - \frac{7}{10} - \frac{3}{5} - \frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \frac{3}{10} + \frac{4}{15} =$$

$$= 1 - \frac{21}{30} - \frac{18}{30} - \frac{10}{30} + \frac{2}{30} + \frac{9}{30} + \frac{8}{30} = 1 - \frac{49}{30} + \frac{19}{30} = 0$$

Otrzymaliśmy więc, że $P(A \cap B \cap C) = 0$.

Sprawdź, czy rozumiesz

1. Wiadomo, że $A, B \subset \Omega$ oraz $P(A) = 0{,}75$ i $P(B) = 0{,}5$. Czy może się zdarzyć, że $P(A \cap B) < 0{,}4$?
2. Wiadomo, że $P(A) = 0{,}6$, $P(B') = 0{,}25$ oraz $A \cup B = \Omega$. Oblicz $P(B)$, $P(A \cap B)$, $P(B - A)$.
3. Na sześciennej symetrycznej kostce są dwie ściany z liczbą 5, a pozostałe ściany mają odpowiednio liczby: 1, 2, 3, 4. Niech Ω oznacza zbiór wszystkich możliwych wyników rzutu tą kostką. Oblicz prawdopodobieństwa zajścia poszczególnych zdarzeń elementarnych. Jakie jest prawdopodobieństwo zdarzenia, że na kostce wypadła nieparzysta liczba oczek?

Prawdopodobieństwo klasyczne

Załóżmy, że dana jest przestrzeń zdarzeń elementarnych Ω pewnego doświadczenia losowego.

$$\Omega = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$$

Niech wszystkie zdarzenia elementarne będą jednakowo prawdopodobne, tzn.

$$P(\{a_1\}) = P(\{a_2\}) = \ldots = P(\{a_n\})$$

Wiemy już, że

$$1 = P(\Omega) = P(\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}) =$$
$$= P(\{a_1\} \cup \{a_2\} \cup \ldots \cup \{a_n\}) =$$
$$= P(\{a_1\}) + P(\{a_2\}) + \ldots + P(\{a_n\})$$

Ostatnia równość jest prawdziwa, ponieważ zdarzenia elementarne wykluczają się parami. Są też jednakowo prawdopodobne, więc

$$P(\{a_1\}) = P(\{a_2\}) = \ldots = P(\{a_n\}) = \frac{1}{n}$$

Niech A będzie dowolnym zdarzeniem zawartym w przestrzeni Ω i niech zdarzeniu A sprzyja k zdarzeń elementarnych. Oznaczmy je: $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_k}$. Mamy więc:

$$A = \{a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_k}\}$$

Wówczas

$$P(A) = P\left(\{a_{i_1}\} \cup \{a_{i_2}\} \cup \ldots \cup \{a_{i_k}\}\right) = P\left(\{a_{i_1}\}\right) + P\left(\{a_{i_2}\}\right) + \ldots + P\left(\{a_{i_k}\}\right) = k \cdot \frac{1}{n} = \frac{k}{n}$$

Otrzymaliśmy następujące twierdzenie.

Twierdzenie 1. (o prawdopodobieństwie klasycznym)
Jeśli przestrzeń zdarzeń elementarnych Ω jest skończona i wszystkie zdarzenia elementarne są jednakowo prawdopodobne, natomiast A jest dowolnym zdarzeniem w tej przestrzeni, to

(*) $\quad P(A) = \dfrac{k}{n}$,

gdzie $P(A)$ oznacza prawdopodobieństwo zdarzenia A, n jest liczbą wszystkich zdarzeń elementarnych przestrzeni Ω, k jest liczbą zdarzeń elementarnych tej przestrzeni sprzyjających zdarzeniu A.

Wzór (*) można też zapisać tak:

$$P(A) = \frac{\overline{\overline{A}}}{\overline{\overline{\Omega}}} \text{ (lub } P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}\text{)},$$

gdzie symbol $\overline{\overline{\Omega}}$ (odpowiednio $|\Omega|$) oznacza liczbę elementów zbioru Ω, natomiast $\overline{\overline{A}}$ (odpowiednio $|A|$) oznacza liczbę elementów zbioru A.

Wzór (*) pozwoli nam obliczać prawdopodobieństwa różnych zdarzeń. Podkreślmy jednak z naciskiem, że jego stosowanie jest możliwe tylko, kiedy wszystkie zdarzenia elementarne są jednakowo prawdopodobne. Z taką sytuacją mamy do czynienia, gdy mówimy np. o rzucie symetryczną monetą, o losowaniu (karty z talii kart, liczby z danego zbioru skończonego, kuli z urny itp.) czy o rzucie symetryczną kostką.

Przykład 1.

Rzucamy dwa razy symetryczną kostką w kształcie czworościanu foremnego. Na ściankach kostki znajdują się odpowiednio oczka od jednego do czterech. Po każdym rzucie notujemy liczbę oczek ze ścianki, na którą upadł czworościan. Obliczymy prawdopodobieństwo zdarzeń:
A – „suma liczby oczek w dwóch rzutach jest równa 6"
B – „suma liczby oczek w dwóch rzutach jest nie większa od 5".

Wynik dwukrotnego rzutu kostką można zapisać jako uporządkowaną parę liczb (czyli ciąg dwuwyrazowy). Wszystkie zdarzenia elementarne są jednakowo prawdopodobne. Mamy:

$$\begin{aligned}\Omega = \{&\boxed{(1,1)}, \boxed{(1,2)}, \boxed{(1,3)}, \boxed{(1,4)},\\ &\boxed{(2,1)}, \boxed{(2,2)}, \boxed{(2,3)}, \boxed{(2,4)},\\ &\boxed{(3,1)}, \boxed{(3,2)}, \boxed{(3,3)}, (3,4),\\ &\boxed{(4,1)}, \boxed{(4,2)}, (4,3), (4,4)\}\end{aligned}$$

$$\overline{\overline{\Omega}} = 4^2 = 16$$

Zdarzeniu A sprzyjają trzy zdarzenia elementarne (oznaczone są kolorem czerwonym).

$$\overline{\overline{A}} = 3 \qquad P(A) = \frac{3}{16}$$

Zdarzeniu B sprzyja dziesięć zdarzeń elementarnych (oznaczone są kolorem zielonym).

$$\overline{\overline{B}} = 10 \qquad P(B) = \frac{10}{16}$$

Prawdopodobieństwa zdarzeń są równe: $P(A) = \frac{3}{16}$, $P(B) = \frac{5}{8}$.

Przykład 2.

Z talii składającej się z 52 kart losujemy jedną kartę. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wylosowana karta jest pikiem lub asem?

Określamy przestrzeń zdarzeń elementarnych.

Ω – zbiór wszystkich jednoelementowych podzbiorów zbioru złożonego z 52 kart

$$\overline{\overline{\Omega}} = 52$$

Wszystkie zdarzenia elementarne są jednakowo prawdopodobne.

Oznaczmy zdarzenia:

A – „wylosowana karta jest pikiem", $\overline{\overline{A}} = 13$

B – „wylosowana karta jest asem", $\overline{\overline{B}} = 4$.

Mamy wyznaczyć prawdopodobieństwo

$P(A \cup B)$

Z własności 5. (twierdzenie 1., str. 295) wiemy, że:

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$A \cap B$ to zdarzenie „wylosowana karta jest asem pik",

$\overline{\overline{A \cap B}} = 1$

Obliczamy:

$$P(A \cup B) = \frac{13}{52} + \frac{4}{52} - \frac{1}{52} = \frac{16}{52}$$

Prawdopodobieństwo, że wylosowana karta jest pikiem lub asem, jest równe $\frac{4}{13}$.

Przykład 3.

Ze zbioru {0, 1, 2, 3, ..., 100} losujemy jedną liczbę. Obliczymy prawdopodobieństwo, że otrzymana liczba jest podzielna przez 3 lub przez 4.

Mamy

$\Omega = \{0, 1, 2, 3, ..., 100\}$ $\overline{\overline{\Omega}} = 101$

Wszystkie zdarzenia elementarne są jednakowo prawdopodobne.

Oznaczmy:

A – zdarzenie „wylosowana liczba jest podzielna przez 3", $\overline{\overline{A}} = 34$ (sprawdź!),

B – zdarzenie „wylosowana liczba jest podzielna przez 4", $\overline{\overline{B}} = 26$ (sprawdź!).

Wówczas

$A \cup B$ to zdarzenie „wylosowana liczba jest podzielna przez 3 lub przez 4"

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$A \cap B$ to zdarzenie „wylosowana liczba jest podzielna przez 3 i przez 4 (czyli przez 12)"

$\overline{\overline{A \cap B}} = 9$ (sprawdź!).

Obliczamy $P(A \cup B)$.

$$P(A \cup B) = \frac{34}{101} + \frac{26}{101} - \frac{9}{101} = \frac{51}{101}$$

Prawdopodobieństwo, że wylosowana liczba jest podzielna przez 3 lub przez 4, jest równe $\frac{51}{101}$.

Przykład 4.

Ze zbioru {1, 2, 3, ..., 1000} losujemy jedną liczbę. Obliczymy prawdopodobieństwo, że otrzymana liczba jest podzielna prze 4 lub przez 6, lub przez 7.

Mamy $\Omega = \{1, 2, 3, ..., 1000\}$ $\qquad \overline{\overline{\Omega}} = 1000$

Wszystkie zdarzenia elementarne są jednakowo prawdopodobne.

Oznaczmy

A – zdarzenie „wylosowana liczba jest podzielna przez 4"

$\overline{\overline{A}} = 250$

B – zdarzenie „wylosowana liczba jest podzielna przez 6"

$\overline{\overline{B}} = 166$

C – zdarzenie „wylosowana liczba jest podzielna przez 7"

$\overline{\overline{C}} = 142$

Zatem

$A \cup B \cup C$ to zdarzenie „wylosowana liczba jest podzielna przez 4 lub przez 6 lub przez 7".

Korzystamy ze wzoru z twierdzenia 2. ze str. 298.

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

$A \cap B$ – zdarzenie „wylosowana liczba jest podzielna przez 4 i przez 6" (tzn. jest podzielna przez $NWW(4, 6)$, czyli przez 12)

$\overline{\overline{A \cap B}} = 83$

$A \cap C$ – zdarzenie „wylosowana liczba jest podzielna przez 4 i przez 7" (czyli przez 28)

$\overline{\overline{A \cap C}} = 35$

$B \cap C$ – zdarzenie „wylosowana liczba jest podzielna przez 6 i przez 7" (czyli przez 42)

$\overline{\overline{B \cap C}} = 23$

$A \cap B \cap C$ – zdarzenie „wylosowana liczba jest podzielna przez 4 i przez 6 i przez 7 (czyli przez 84)

$\overline{\overline{A \cap B \cap C}} = 11$

Obliczamy $P(A \cup B \cup C)$.

$$P(A \cup B \cup C) = \frac{250}{1000} + \frac{166}{1000} + \frac{142}{1000} - \frac{83}{1000} - \frac{35}{1000} - \frac{23}{1000} + \frac{11}{1000} = \frac{428}{1000}$$

Prawdopodobieństwo, że wylosowana liczba jest podzielna przez 4 lub przez 6, lub przez 7, jest równe 0,428.

Przykład 5.

W loterii jest do kupienia 20 losów: 3 losy dają wygraną po 10 zł, 4 losy dają wygraną po 5 zł, pozostałe losy są przegrywające. Jakie jest prawdopodobieństwo, że kupując 2 losy, wygramy 10 zł?

I sposób

Zakładamy, że kolejność kupowanych losów nie jest istotna.
Wówczas:

Ω jest to zbiór wszystkich dwuelementowych kombinacji zbioru złożonego z 20 losów.

$$\overline{\overline{\Omega}} = \binom{20}{2} = 190$$

Wszystkie zdarzenia elementarne są jednakowo prawdopodobne.
Oznaczmy:

A – zdarzenie „kupimy 2 losy i wygramy 10 zł”

$A = A_1 \cup A_2$, gdzie

A_1 – zdarzenie „kupimy 1 los dający wygraną 10 zł i 1 los przegrywający”

$$\overline{\overline{A_1}} = \binom{3}{1} \cdot \binom{13}{1} = 39 \qquad P(A_1) = \frac{39}{190}$$

A_2 – zdarzenie „kupimy 2 losy dające wygraną po 5 zł”

$$\overline{\overline{A_2}} = \binom{4}{2} = 6 \qquad P(A_2) = \frac{6}{190}$$

Oczywiście

$A_1 \cap A_2 = \varnothing$, zatem

$$P(A) = P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) = \frac{39}{190} + \frac{6}{190} = \frac{45}{190} = \frac{9}{38}$$

II sposób

Zakładamy, że kolejność kupowanych losów jest istotna.
Wówczas:

Ω jest to zbiór wszystkich dwuwyrazowych wariacji bez powtórzeń zbioru złożonego z 20 losów.

$$\overline{\overline{\Omega}} = 20 \cdot 19 = 380$$

Wszystkie zdarzenia elementarne są jednakowo prawdopodobne.
Oznaczmy zdarzenia A, A_1, A_2 tak, jak w I sposobie. Zatem

$\overline{\overline{A_1}} = 2 \cdot 13 \cdot 3$ (uzasadnij to dokładnie!)

$\overline{\overline{A_2}} = 4 \cdot 3$ (uzasadnij to dokładnie!)

Ponieważ $A = A_1 \cup A_2$ i $A_1 \cap A_2 = \varnothing$, stąd

$\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{A_1}} + \overline{\overline{A_2}}$, więc $\overline{\overline{A}} = 78 + 12 = 90$

Obliczamy $P(A)$.

$$P(A) = \frac{90}{380}$$

Prawdopodobieństwo wygrania 10 zł jest równe $\frac{9}{38}$.

Przykład 6.

Doświadczenie losowe polega na trzykrotnym rzucie symetryczną sześcienną kostką do gry. Jakie jest prawdopodobieństwo zdarzenia, że co najmniej raz otrzymamy sześć oczek?

Mamy:

$$\Omega = \{(a_1, a_2, a_3): \ a_1, a_2, a_3 \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\} \qquad \overline{\overline{\Omega}} = 6^3 = 216$$

Wszystkie zdarzenia elementarne są jednakowo prawdopodobne.
Oznaczmy

A – zdarzenie „co najmniej raz otrzymamy sześć oczek".

<u>I sposób</u>

Zauważmy, że

$A = A_1 \cup A_2 \cup A_3$, gdzie

A_1 oznacza zdarzenie „otrzymaliśmy tylko raz sześć oczek",

A_2 oznacza zdarzenie „otrzymaliśmy tylko dwa razy sześć oczek",

A_3 oznacza zdarzenie „otrzymaliśmy trzy razy sześć oczek".

Zdarzenia A_1, A_2, A_3 są parami wykluczające się, więc

$$\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{A_1}} + \overline{\overline{A_2}} + \overline{\overline{A_3}}$$

Obliczamy:

$$\overline{\overline{A_1}} = \binom{3}{1} \cdot 5^2$$

(Z trzech miejsc wybieramy jedno, na którym będzie 6, na pozostałych dwóch miejscach mogą być dowolne liczby różne od 6).

$$\overline{\overline{A_2}} = \binom{3}{2} \cdot 5$$

$$\overline{\overline{A_3}} = \binom{3}{3}$$

$$\overline{\overline{A}} = \binom{3}{1} \cdot 5^2 + \binom{3}{2} \cdot 5 + \binom{3}{3} = 75 + 15 + 1 = 91$$

Obliczamy $P(A)$.

$$P(A) = \frac{91}{216}$$

Okazuje się, że takie zadanie można rozwiązać prościej.

II sposób

Zauważ, że

A' oznacza zdarzenie „w trzykrotnym rzucie kostką ani razu nie otrzymano sześciu oczek",

$\overline{\overline{A'}} = 5^3$ (uzasadnij to dokładnie!)

Wiemy, że

$P(A) = 1 - P(A')$

$$P(A) = 1 - \frac{5^3}{6^3} = \frac{6^3 - 5^3}{6^3} = \frac{216 - 125}{216} = \frac{91}{216}$$

Prawdopodobieństwo, że co najmniej raz otrzymamy sześć oczek, jest równe $\frac{91}{216}$.

Przykład 7.

Spośród liczb: 1, 2, 3, 4, ..., 1000 wybieramy losowo jedną liczbę. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wylosowana liczba jest podzielna przez 4 i nie jest podzielna przez 6?

Mamy:

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, ..., 1000\}$ $\overline{\overline{\Omega}} = 1000$

Wszystkie zdarzenia elementarne są jednakowo prawdopodobne.

Oznaczmy zdarzenia:

A – „wylosowana liczba jest podzielna przez 4"

B – „wylosowana liczba jest podzielna przez 6".

Szukamy prawdopodobieństwa $P(A - B)$.

Wiadomo (zobacz dowód własności 5. twierdzenia 1., str. 295), że

$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$

$A \cap B$ to zdarzenie „wylosowana liczba jest podzielna przez 4 i przez 6 (czyli przez 12)"

$\overline{\overline{A \cap B}} = 83$

Obliczamy $P(A - B)$.

$$P(A - B) = \frac{250}{1000} - \frac{83}{1000} = \frac{167}{1000}$$

Prawdopodobieństwo wylosowania liczby podzielnej przez 4 i niepodzielnej przez 6 jest równe 0,167.

Przykład 8.

Trzech turystów przyjechało do miejscowości, w której są 3 hotele należące do jednego właściciela. Wszystkie rozmieszczenia turystów w tych hotelach są jednakowo prawdopodobne. Jakie jest prawdopodobieństwo, że każdy z turystów będzie w innym hotelu?

Każdemu turyście możemy przyporządkować jeden z trzech hoteli. Jeśli hotele oznaczymy: H_1, H_2, H_3 i na przykład pierwszy turysta wybierze hotel H_1, drugi też wybierze hotel H_1, a trzeci turysta wybierze hotel H_2, to taki wybór możemy opisać ciągiem (H_1, H_1, H_2).
Mamy zatem:

Ω jest to zbiór trójwyrazowych wariacji z powtórzeniami zbioru $\{H_1, H_2, H_3\}$.

$\overline{\overline{\Omega}} = 3^3 = 27$. Wszystkie zdarzenia elementarne są jednakowo prawdopodobne.

Oznaczmy zdarzenie:

A – „każdy z turystów będzie w innym hotelu”. $\overline{\overline{A}} = 3! = 6$ (uzasadnij to!), zatem

$$P(A) = \frac{6}{27} = \frac{2}{9}$$

Prawdopodobieństwo, że każdy turysta będzie w innym hotelu, jest równe $\frac{2}{9}$.

Sprawdź, czy rozumiesz

1. Ze zbioru wszystkich liczb dwucyfrowych losujemy jedną liczbę. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia:
   A – „wylosowana liczba jest podzielna przez 11”
   B – „wylosowana liczba jest nie większa niż 35 i nie mniejsza niż 25”
   C – „wylosowana liczba jest podzielna przez 5 i nie jest podzielna przez 3”
   D – „wylosowana liczba jest całkowitą wielokrotnością liczby 6 lub liczby 8”.
2. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że wybierając losowo jedną kartę z talii 52 kart, otrzymamy kartę, która nie jest pikiem.
3. W loterii jest 100 losów, z których 4 losy dają wygraną po 10 zł, 3 losy dają wygraną po 20 zł, 2 losy dają wygraną 50 zł i jeden los daje wygraną 100 zł. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że kupując 1 los, otrzymamy:
   a) los wygrywający
   b) los z wygraną co najmniej 50 zł.
4. Rzucamy dwa razy symetryczną kostką do gry. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że
   a) w drugim rzucie wypadnie szóstka
   b) szóstka wypadnie tylko raz.
5. Rzucamy czterokrotnie symetryczną monetą. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że
   a) co najmniej raz otrzymamy orła
   b) co najwyżej raz otrzymamy reszkę.

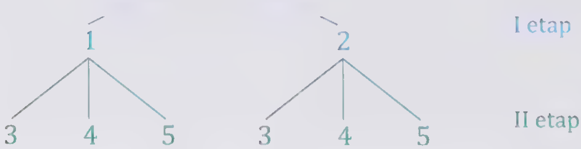
Doświadczenia losowe wieloetapowe

W tym temacie omówimy budowę modelu doświadczenia losowego, które można przedstawić jako ciąg pewnych doświadczeń cząstkowych. Takie doświadczenia losowe można w czytelny sposób przedstawiać na grafach zwanych drzewami (drzewami stochastycznymi). Tego typu drzewa poznałeś w pierwszym temacie tego rozdziału.

Przypomnijmy: drzewo składa się z odcinków zwanych krawędziami i punktów, w których spotykają się krawędzie – zwanych węzłami. Każda z krawędzi wychodzących z tego samego węzła reprezentuje inny wynik doświadczenia losowego cząstkowego.
Rozważmy następujące doświadczenie losowe.

Mamy dwa zbiory: $X = \{1, 2\}$ i $Y = \{3, 4, 5\}$. Losujemy ze zbioru X jedną cyfrę, a następnie ze zbioru Y drugą cyfrę i tworzymy liczbę dwucyfrową, w której cyfrą dziesiątek jest pierwsza wylosowana cyfra.

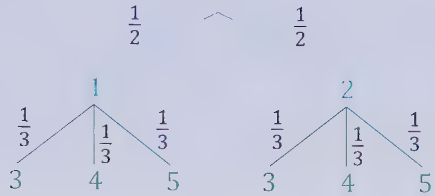
Z punktu początkowego (pierwszego węzła) prowadzimy krawędzie reprezentujące poszczególne wyniki cząstkowe I etapu doświadczenia losowego. W naszym przypadku w I etapie doświadczenia możemy otrzymać jeden z dwóch wyników: 1 lub 2. Pod każdą krawędzią zapisujemy (w umowny sposób) ten wynik. Następnie dorysowujemy krawędzie przedstawiające wszystkie możliwe wyniki kolejnego etapu. Punkty 1 i 2 są węzłami drzewa:



Wynik doświadczenia losowego przebiegającego etapami jest ciągiem wyników otrzymanych na wszystkich etapach (na drzewie ten wynik reprezentuje tzw. gałąź). W przypadku omawianego doświadczenia mamy 6 możliwych wyników:

$$\Omega = \{13, 14, 15, 23, 24, 25\}$$

Drzewo stochastyczne umożliwia obliczanie prawdopodobieństw zdarzeń. W tym celu obok każdej krawędzi zapisujemy prawdopodobieństwo otrzymania danego wyniku cząstkowego (pojedynczego etapu). Suma prawdopodobieństw przyporządkowanych krawędziom wychodzącym z jednego węzła jest równa 1.

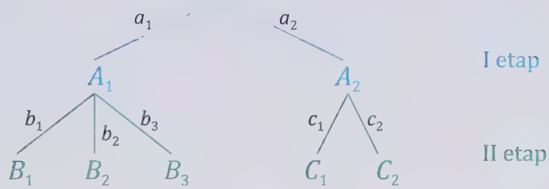


(Jeśli na drzewie przedstawimy zdarzenie, które nie jest całą przestrzenią, wówczas suma prawdopodobieństw w niektórych węzłach będzie mniejsza od 1).

Każdemu wynikowi przyporządkowujemy iloczyn prawdopodobieństw przypisanych kolejnym krawędziom jednej gałęzi, która przedstawia wynik danego doświadczenia losowego – jest to tzw. reguła iloczynów. W omawianym przykładzie mamy:

$$P(\{13\}) = P(\{14\}) = P(\{15\}) = P(\{23\}) = P(\{24\}) = P(\{25\}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

Tak określone prawdopodobieństwo spełnia definicję 1. str. 295.
Pokażemy to na podstawie schematu pewnego doświadczenia losowego dwuetapowego.



$$\Omega = \{(A_1, B_1), (A_1, B_2), (A_1, B_3), (A_2, C_1), (A_2, C_2)\}$$

Poszczególnym zdarzeniom elementarnym przyporządkowujemy iloczyny prawdopodobieństw na poszczególnych gałęziach.

$$\begin{array}{ccccc} (A_1, B_1) & (A_1, B_2) & (A_1, B_3) & (A_2, C_1) & (A_2, C_2) \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ a_1 \cdot b_1 & a_1 \cdot b_2 & a_1 \cdot b_3 & a_2 \cdot c_1 & a_2 \cdot c_2 \end{array}$$

Spełnione są przy tym warunki: $a_1, a_2 \geqslant 0$ i $a_1 + a_2 = 1$

$b_1, b_2, b_3 \geqslant 0$ i $b_1 + b_2 + b_3 = 1$

$c_1, c_2 \geqslant 0$ i $c_1 + c_2 = 1$

$P\left(\{(A_1, B_1)\}\right) = a_1 \cdot b_1 \qquad P\left(\{(A_1, B_2)\}\right) = a_1 \cdot b_2 \qquad P\left(\{(A_1, B_3)\}\right) = a_1 \cdot b_3$

$P\left(\{(A_2, C_1)\}\right) = a_2 \cdot c_1 \qquad P\left(\{(A_2, C_2)\}\right) = a_2 \cdot c_2$

1) Od razu widać, że prawdopodobieństwa zdarzeń są nieujemne.
2) Pokażemy, że $P(\Omega) = 1$.

$$P(\Omega) = a_1 \cdot b_1 + a_1 \cdot b_2 + a_1 \cdot b_3 + a_2 \cdot c_1 + a_2 \cdot c_2 =$$
$$= a_1 \cdot (b_1 + b_2 + b_3) + a_2 \cdot (c_1 + c_2) =$$
$$= a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 1 = a_1 + a_2 = 1$$

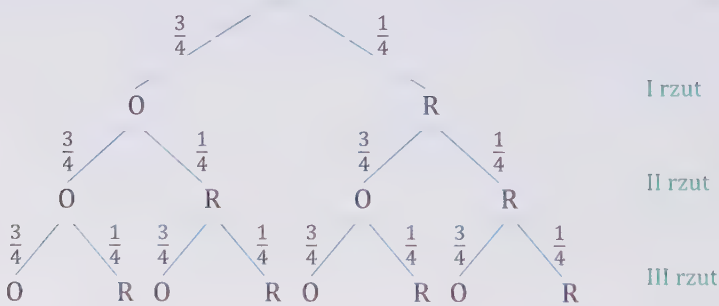
Podobne obliczenia można wykonać w przypadku doświadczeń losowych o większej liczbie etapów.

3) Aby obliczyć prawdopodobieństwo zdarzenia opisanego przez kilka gałęzi drzewa, dodajemy prawdopodobieństwa przypisane do tych gałęzi. Jest to tzw. reguła sum. Zauważ, że spełniony jest trzeci aksjomat, tzn.

   jeśli $A \cap B = \varnothing$, to $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Przykład 1.

Rzucamy trzykrotnie niesymetryczną monetą. Prawdopodobieństwo otrzymania orła w pojedynczym rzucie jest równe $\frac{3}{4}$, zaś reszki – wynosi $\frac{1}{4}$. Narysujemy drzewo dla tego doświadczenia losowego i obliczymy prawdopodobieństwo zdarzenia A – „otrzymano co najmniej dwa orły”



$\Omega = \{(O, O, O), (O, O, R), (O, R, O), (O, R, R), (R, O, O), (R, O, R), (R, R, O), (R, R, R)\}$

$A = \{(O, O, O), (O, O, R), (O, R, O), (R, O, O)\}$

$$P(A) = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} + \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} =$$

$$= \frac{27}{64} + \frac{9}{64} + \frac{9}{64} + \frac{9}{64} = \frac{27}{32}$$

Prawdopodobieństwo otrzymania w trzech rzutach co najmniej dwóch orłów jest równe $\frac{27}{32}$.

Na drzewach można też przedstawiać doświadczenia losowe o nieokreślonej liczbie etapów.

Przykład 2.

Strzelec ma trzy naboje. Strzela do tarczy do pierwszego trafienia lub do wyczerpania nabojów. Oddając jeden strzał, strzelec trafia w cel z prawdopodobieństwem 0,7. Narysujemy drzewo dla tego doświadczenia i obliczymy prawdopodobieństwo zdarzenia A – „cel został trafiony za drugim lub trzecim razem".

Niech T oznacza „strzelec trafił", a N – „strzelec nie trafił". Wówczas drzewo może wyglądać tak:

$\Omega = \{T, NT, NNT, NNN\}$

Obliczamy $P(A)$:

$A = \{NT, NNT\}$

$P(A) = 0{,}3 \cdot 0{,}7 + 0{,}3 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}7 = 0{,}273$

Prawdopodobieństwo trafienia w cel za drugim lub trzecim razem jest równe 0,273.

Sprawdź, czy rozumiesz

1. W rzucie niesymetryczną monetą prawdopodobieństwo otrzymania orła jest równe $\frac{1}{3}$. Doświadczenie losowe polega na trzykrotnym rzucie monetą. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia:
   A – „wypadły trzy reszki", B – „wypadł co najwyżej jeden orzeł".
2. Strzelec trafia w pojedynczym strzale do tarczy z prawdopodobieństwem 0,8. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że oddając cztery strzały, strzelec trafi do tarczy co najmniej trzy razy.
3. Symetryczna kostka w kształcie sześcianu ma 3 ściany pomalowane na biało, 2 ściany pomalowane na czerwono i 1 ścianę pomalowaną na zielono. Rzucamy trzy razy tą kostką i sprawdzamy, jakiego koloru wypadła ścianka. Wykonaj drzewo tego doświadczenia losowego i zapisz prawdopodobieństwa poszczególnych wyników cząstkowych. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia:
   a) A – we wszystkich rzutach wypadły ścianki w tym samym kolorze
   b) B – ścianka w kolorze czerwonym wypadła dokładnie raz.

Prawdopodobieństwo warunkowe

Doświadczenie losowe polega na dwukrotnym rzucie symetryczną sześcienną kostką do gry. Jakie jest prawdopodobieństwo zdarzenia, że w pierwszym rzucie otrzymamy mniejszą liczbę oczek niż w drugim rzucie, jeśli założymy, że w drugim rzucie wypadło 5 lub 6 oczek?

$$\Omega = \{(w_1, w_2): w_i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, i = 1, 2\}$$

Oznaczmy zdarzenia:

A – zdarzenie „w pierwszym rzucie wypadła mniejsza liczba oczek niż w drugim rzucie"

B – zdarzenie „w drugim rzucie wypadło 5 lub 6 oczek".

Poniżej przedstawiona jest przestrzeń Ω z zaznaczonym zdarzeniem A (kolor zielony) i zdarzeniem B (kolor czerwony).

$$\begin{array}{llllllll}
 & & & A & & & B & \\
\Omega = \{ & (1,1) & (1,2) & (1,3) & (1,4) & (1,5) & (1,6) & \\
 & (2,1) & (2,2) & (2,3) & (2,4) & (2,5) & (2,6) & \\
 & (3,1) & (3,2) & (3,3) & (3,4) & (3,5) & (3,6) & \\
 & (4,1) & (4,2) & (4,3) & (4,4) & (4,5) & (4,6) & \\
 & (5,1) & (5,2) & (5,3) & (5,4) & (5,5) & (5,6) & \\
 & (6,1) & (6,2) & (6,3) & (6,4) & (6,5) & (6,6) & \}
\end{array}$$

Jeśli wiemy, że w drugim rzucie wypadło 5 lub 6 oczek, to nie musimy rozpatrywać całej przestrzeni Ω (złożonej z 36 par). Wystarczy ograniczyć się do zdarzenia B. To zdarzenie staje się nową przestrzenią. Oznaczmy ją symbolem Ω_B. Łatwo stwierdzić, że $\overline{\overline{\Omega_B}} = 12$.

Rozpatrzmy teraz zdarzenie A w nowej przestrzeni Ω_B. Oznaczmy je symbolem A_B.

Sprzyja mu 9 zdarzeń elementarnych, czyli $\overline{\overline{A_B}} = 9$, a zatem $P(A_B) = \frac{9}{12}$.

Tak więc szukane prawdopodobieństwo jest równe $\frac{9}{12}$.

To prawdopodobieństwo można też wyznaczyć inaczej.

$$P(A_B) = \frac{9}{12} = \frac{\overline{\overline{A \cap B}}}{\overline{\overline{B}}} = \frac{\dfrac{\overline{\overline{A \cap B}}}{\overline{\overline{\Omega}}}}{\dfrac{\overline{\overline{B}}}{\overline{\overline{\Omega}}}} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Przyjmujemy następującą definicję.

Definicja 1.

Prawdopodobieństwem warunkowym zajścia zdarzenia A, pod warunkiem że zajdzie zdarzenie B, gdzie $A, B \subset \Omega$ i $P(B) > 0$, nazywamy liczbę

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Podsumowując, możemy powiedzieć, że prawdopodobieństwo warunkowe zajścia zdarzenia A, pod warunkiem że zajdzie zdarzenie B, możemy obliczać na dwa sposoby.

I sposób: Zmieniamy przestrzeń zdarzeń elementarnych, ograniczając ją tylko do tych zdarzeń, które sprzyjają zdarzeniu B (oznaczamy ją Ω_B) i wtedy obliczamy prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia A (które oznaczamy A_B), korzystając tylko ze wzoru na prawdopodobieństwo klasyczne (w przestrzeni Ω_B).
II sposób: Nie zmieniamy przestrzeni zdarzeń elementarnych Ω i wtedy korzystamy ze wzoru

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Twierdzenie 1.

Jeśli $B \subset \Omega$ i $P(B) > 0$, to funkcja, która dowolnemu zdarzeniu A, $A \subset \Omega$, przyporządkowuje liczbę $P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$, spełnia aksjomaty prawdopodobieństwa.

Dowód:

1) $P(A|B) \geqslant 0$ dla dowolnego zdarzenia A, ponieważ liczba $P(A|B)$ jest ilorazem liczby nieujemnej i liczby dodatniej.
2) $P(\Omega|B) = \dfrac{P(\Omega \cap B)}{P(B)} = \dfrac{P(B)}{P(B)} = 1$
3) Niech $A_1, A_2 \subset \Omega$ i $A_1 \cap A_2 = \varnothing$. Wtedy oczywiście $(A_1 \cap B) \cap (A_2 \cap B) = A_1 \cap A_2 \cap B = \varnothing$, a więc zdarzenia $A_1 \cap B$ i $A_2 \cap B$ się wykluczają. Mamy wówczas:

$$P(A_1 \cup A_2|B) = \frac{P[(A_1 \cup A_2) \cap B]}{P(B)} = \frac{P[(A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B)]}{P(B)} =$$

$$= \frac{P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A_1 \cap B)}{P(B)} + \frac{P(A_2 \cap B)}{P(B)} = P(A_1|B) + P(A_2|B)$$

Zatem spełnione są aksjomaty z definicji prawdopodobieństwa (zobacz str. 295).

Zastanowimy się teraz, jak dodatkowa informacja, że zaszło zdarzenie B, wpływa na prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia A.

Wróćmy do doświadczenia losowego i zdarzeń A, B opisanych na początku tego tematu.
Wówczas

$$P(A|B) = \frac{9}{12} = \frac{27}{36} \qquad P(A) = \frac{15}{36}, \qquad \text{stąd } P(A|B) > P(A)$$

W tej samej przestrzeni rozważmy jeszcze dwa zdarzenia:

B_1 – „w drugim rzucie wypadły co najwyżej 2 oczka”

B_2 – „w drugim rzucie wypadły 3 lub 4 oczka”.

Wówczas otrzymujemy (sprawdź to!):

$$P(A|B_1) = \frac{1}{12} = \frac{3}{36} \qquad P(A) = \frac{15}{36} \qquad P(A|B_1) < P(A)$$

$$P(A|B_2) = \frac{5}{12} = \frac{15}{36} \qquad P(A) = \frac{15}{36} \qquad P(A|B_1) = P(A)$$

Jak widać, dodatkowy warunek może zwiększać lub zmniejszać prawdopodobieństwo zajścia interesującego nas zdarzenia. Może go także nie zmieniać. Szczególnie istotny jest trzeci przypadek. Wrócimy jeszcze do niego w dalszym toku nauki.

Przykład 1.

Z talii 52 kart losujemy jedną kartę. Obliczymy, jakie jest prawdopodobieństwo zdarzenia, że wylosowana karta będzie asem, jeśli wiadomo, że wylosowana karta jest pikiem.

Oznaczmy zdarzenia:

A – „wylosowana karta jest asem”

B – „wylosowana karta jest pikiem”.

Mamy obliczyć $P(A|B)$.

<u>I sposób</u>
Ograniczamy rozważania do kart będących pikami. Zatem

Ω_B – zbiór wszystkich jednoelementowych kombinacji zbioru 13 pików

$\overline{\overline{\Omega_B}} = 13$

A_B – zbiór asów pik

$\overline{\overline{A_B}} = 1,$

stąd

$$P(A|B) = P(A_B) = \frac{1}{13}$$

II sposób

Ω – zbiór wszystkich jednoelementowych kombinacji talii 52 kart

$\overline{\overline{\Omega}} = 52$, $\overline{\overline{A}} = 4$ $\overline{\overline{B}} = 13$ $\overline{\overline{A \cap B}} = 1$, więc

$P(B) = \frac{13}{52}$ $P(A \cap B) = \frac{1}{52}$ i ostatecznie

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{52}}{\frac{13}{52}} = \frac{1}{13}$$

Szukane prawdopodobieństwo jest równe $\frac{1}{13}$.

Przykład 2.

Ze zbioru liczb $\{1, 2, 3, ..., 19, 20\}$ losujemy trzy liczby. Obliczymy prawdopodobieństwo, że suma tych trzech liczb jest podzielna przez 3, jeśli wiadomo, że co najmniej jedna z tych liczb przy dzieleniu przez 3 daje resztę 1.

Oznaczmy zdarzenia:

A – „suma wylosowanych trzech liczb jest podzielna przez 3"

B – „co najmniej jedna z wylosowanych liczb przy dzieleniu przez 3 daje resztę 1".

Zauważ, że suma trzech liczb jest podzielna przez 3, jeśli:
- te trzy liczby dają taką samą resztę z dzielenia przez 3 (czyli resztę 0 albo resztę 1, albo resztę 2) albo
- każda z trzech liczb daje inną resztę z dzielenia przez 3 (czyli resztę 0, 1, 2).

W zbiorze liczb $\{1, 2, 3, ..., 20\}$ jest:
- 6 liczb podzielnych przez 3
- 7 liczb dających resztę 1 przy dzieleniu przez 3
- 7 liczb dających resztę 2 przy dzieleniu przez 3.

I sposób

$\Omega_B = \{\{w_1, w_2, w_3\}: w_i \in \{1, 2, ..., 20\}, i = 1, 2, 3$; co najmniej jedna z liczb w_i przy dzieleniu przez 3 daje resztę 1$\}$

$$\overline{\overline{\Omega}}_B = \binom{20}{3} - \binom{13}{3} = 1140 - 286 = 854 \quad \text{(dlaczego?)}$$

A_B – zdarzenie „suma wylosowanych trzech liczb jest podzielna przez 3 i co najmniej jedna z wylosowanych liczb przy dzieleniu przez 3 daje resztę 1.

$$\overline{\overline{A}}_B = \binom{7}{3} + \binom{7}{1} \cdot \binom{7}{1} \cdot \binom{6}{1} = 35 + 294 = 329 \qquad \text{(dlaczego?)}$$

$$P(A|B) = P(A_B) = \frac{329}{854} = \frac{47}{122}$$

II sposób

Ω – zbiór wszystkich trójelementowych kombinacji zbioru $\{1, 2, 3, \dots, 20\}$.

$$\overline{\overline{\Omega}} = \binom{20}{3} = 1140$$

$$\overline{\overline{A \cap B}} = \binom{7}{3} + \binom{7}{1} \cdot \binom{7}{1} \cdot \binom{6}{1} = 329 \qquad P(A \cap B) = \frac{329}{1140}$$

$$\overline{\overline{B}} = \binom{20}{3} - \binom{13}{3} = 854 \qquad P(B) = \frac{854}{1140}$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{329}{1140}}{\frac{854}{1140}} = \frac{329}{854} = \frac{47}{122}$$

Szukane prawdopodobieństwo jest równe $\frac{47}{122}$.

Bezpośrednio z definicji 1. wynika zależność:

Jeśli $A, B \subset \Omega$ i $P(B) > 0$, to $P(B) \cdot P(A|B) = P(A \cap B)$.

Można ją uogólnić na dowolną skończoną liczbę zdarzeń. W przypadku trzech zdarzeń otrzymamy

(*) $\qquad P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_1 \cap A_2) = P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$,

o ile $A_1, A_2, A_3 \subset \Omega$ oraz $P(A_1) > 0, P(A_1 \cap A_2) > 0$.

Równość (*) można łatwo udowodnić. Mamy bowiem:

$$P(A_1) \cdot \frac{P(A_1 \cap A_2)}{P(A_1)} \cdot \frac{P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)}{P(A_1 \cap A_2)} = P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$$

Wzory tego rodzaju stosujemy wtedy, gdy chcemy obliczyć prawdopodobieństwo iloczynu dwóch (lub więcej niż dwóch) zdarzeń, a znamy odpowiednie prawdopodobieństwa warunkowe.

Przykład 3.

Na trasie samochodu znajdują się trzy skrzyżowania z sygnalizacją świetlną. Na pierwszym skrzyżowaniu samochód trafia na światło czerwone lub żółte z prawdopodobieństwem 0,5. Jeśli trafi na skrzyżowaniu na światło zielone, to prawdopodobieństwo, że na następnym skrzyżowaniu będzie miał też światło zielone, wzrasta o 0,1 w stosunku do analogicznego prawdopodobieństwa na poprzednim skrzyżowaniu. Jakie jest prawdopodobieństwo, że samochód przejedzie przez trzy skrzyżowania bez zatrzymania?

Oznaczmy zdarzenia:

A – „samochód przejedzie przez trzy skrzyżowania bez zatrzymania"

A_i – „samochód przejedzie przez i–te skrzyżowanie bez zatrzymania; $i = 1, 2, 3$.

Mamy:

$$A = A_1 \cap A_2 \cap A_3$$

z ostatniego wzoru (*) wynika, że

$$P(A) = P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_1 \cap A_2).$$

Ponieważ

$$P(A_1) = 0{,}5 \qquad P(A_2|A_1) = 0{,}6 \qquad P(A_3|A_1 \cap A_2) = 0{,}7,$$

więc

$$P(A) = 0{,}5 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}7 = 0{,}21$$

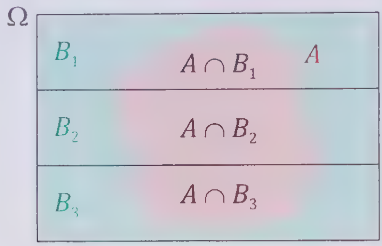
Samochód przejedzie przez trzy skrzyżowania bez zatrzymywania z prawdopodobieństwem 0,21.

Sprawdź, czy rozumiesz

1. Spośród liczb 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, wybieramy losowo jedną liczbę. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania liczby podzielnej przez 3, jeżeli wiadomo, że wylosowana liczba jest parzysta.
2. W czterdziestoosobowej grupie turystów 12 osób zna tylko język angielski, 10 osób – tylko język niemiecki, a 18 osób – zarówno język angielski, jak i niemiecki. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że losowo wybrana osoba z tej grupy zna język niemiecki, jeżeli wiadomo, że zna język angielski.
3. W pudełku znajdują się 3 kule białe, 4 kule czerwone i 5 kul niebieskich. Z pudełka wybieramy losowo jedną kulę. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania kuli czerwonej, jeżeli wiadomo, że wylosowana kula nie jest niebieska.
4. Z talii 52 kart losujemy 2 karty. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że obie wylosowane karty są figurami (figury to: as, król, dama, walet), jeżeli wiadomo, że:
   a) obie karty są kierami
   b) obie karty są czerwone.
5. Oblicz $P(A|B)$, jeśli wiadomo, że $P(A \cup B) = \frac{7}{12}$, $P(B) = \frac{2}{3}$, $P(A) = \frac{1}{4}$.

Twierdzenie o prawdopodobieństwie całkowitym

Niech rysunek poniżej przedstawia przestrzeń zdarzeń elementarnych Ω, w której zawiera się zdarzenie A.



Zdarzenia B_1, B_2, B_3 są parami wykluczające się i wypełniają przestrzeń Ω (tzn. $B_1 \cup B_2 \cup B_3 = \Omega$). Wówczas zdarzenia

$$A \cap B_1 \qquad A \cap B_2 \qquad A \cap B_3$$

też są parami wykluczające się oraz

$$A = (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup (A \cap B_3)$$

A więc prawdopodobieństwo zdarzenia A możemy obliczać „po kawałku".

$$P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + P(A \cap B_3)$$

Z poprzedniego tematu wiemy, że

$$P(A \cap B_1) = P(A|B_1) \cdot P(B_1)$$

$$P(A \cap B_2) = P(A|B_2) \cdot P(B_2)$$

$$P(A \cap B_3) = P(A|B_3) \cdot P(B_3), \qquad \text{zatem}$$

$$P(A) = P(A|B_1) \cdot P(B_1) + P(A|B_2) \cdot P(B_2) + P(A|B_3) \cdot P(B_3)$$

Prawdziwe jest następujące twierdzenie.

Twierdzenie 1. (o prawdopodobieństwie całkowitym)
Niech A będzie zdarzeniem zawartym w przestrzeni Ω, zdarzenia $B_1, B_2, \ldots, B_n$ będą zdarzeniami zawartymi w tej samej przestrzeni Ω, spełniającymi warunki:

1) $B_i \cap B_j = \varnothing$ dla $i \neq j$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$
   (czyli zdarzenia $B_1, B_2, \ldots, B_n$ wykluczają się parami)
2) $P(B_i) > 0$ dla $i = 1, 2, \ldots, n$
3) $B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_n = \Omega$,

   to

(*) $P(A) = P(A|B_1) \cdot P(B_1) + P(A|B_2) \cdot P(B_2) + \ldots + P(A|B_n) \cdot P(B_n)$

Wzór (*) nazywa się wzorem na prawdopodobieństwo całkowite.

Przykład 1.

Daltonizm to wada wzroku polegająca na zaburzeniu rozpoznawania barwy zielonej i czerwonej. Dotyka ona przeciętnie pięć kobiet na tysiąc i ośmiu mężczyzn na stu. Z licznej grupy osób, w której stosunek liczby kobiet do liczby mężczyzn wynosi 2 : 8, wylosowano jedną osobę. Ile jest równe prawdopodobieństwo wylosowania osoby dotkniętej daltonizmem?

Przyjmujemy oznaczenie zdarzenia

A – „wylosowana osoba dotknięta jest daltonizmem".

Oczywiście prawdopodobieństwo zdarzenia A zależy od tego, czy wybrana osoba jest kobietą, czy mężczyzną. Zatem

B_1 – „wylosowana osoba jest kobietą"

B_2 – „wylosowana osoba jest mężczyzną".

Oczywiście $B_1 \cap B_2 = \varnothing$ i $B_1 \cup B_2 = \Omega$, ponadto

$P(B_1) = 0{,}2$ $\quad P(B_1) > 0$ $\quad P(B_2) = 0{,}8$ $\quad P(B_2) > 0$

Zatem są spełnione założenia twierdzenia o prawdopodobieństwie całkowitym. Mamy również

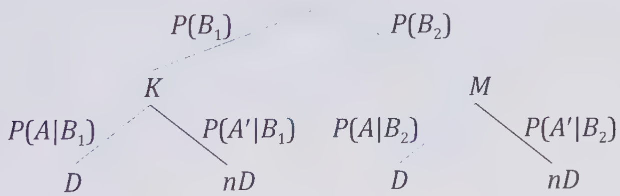
$P(A|B_1) = 0{,}005$ $\quad P(A|B_2) = 0{,}08,$ $\quad$ więc

$$P(A) = P(A|B_1) \cdot P(B_1) + P(A|B_2) \cdot P(B_2)$$

$$P(A) = 0{,}005 \cdot 0{,}2 + 0{,}08 \cdot 0{,}8 = 0{,}001 + 0{,}064 = 0{,}065$$

Szukane prawdopodobieństwo jest równe 0,065.

Rozwiązania tego typu zadań można w prosty sposób ilustrować na drzewach. W przypadku naszego zadania drzewo będzie wyglądać tak.



Zatem

$\Omega = \{(K, D), (K, nD), (M, D), (M, nD)\}$

$B_1 = \{(K, D), (K, nD)\}$ $\quad B_2 = \{(M, D), (M, nD)\}$

$A = \{(K, D), (M, D)\},$

gdzie

K – oznacza, że wylosowano kobietę

M – oznacza, że wylosowano mężczyznę

D – oznacza, że wylosowana osoba jest daltonistą

nD – oznacza, że wylosowana osoba nie jest daltonistą.

Zastanówmy się jeszcze nad następującym zagadnieniem dotyczącym przykładu 1.

Wylosowana osoba okazała się dotknięta daltonizmem. Jakie jest prawdopodobieństwo, że jest to mężczyzna? Pytamy zatem, ile jest równe prawdopodobieństwo $P(B_2|A)$. Mamy

$$P(B_2|A) = \frac{P(B_2 \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A \cap B_2)}{P(A)} = \frac{P(A|B_2) \cdot P(B_2)}{P(A)}, \qquad \text{więc}$$

$$P(B_2|A) = \frac{0{,}08 \cdot 0{,}8}{0{,}065} = \frac{64}{65}$$

Prawdopodobieństwo to – jak widać – jest bardzo wysokie.

Zauważmy, że postawione wyżej pytanie dotyczy <u>przebiegu</u> doświadczenia losowego w sytuacji, gdy znany jest jego wynik (wylosowano osobę mającą daltonizm). Natomiast pytanie postawione w przykładzie 1. dotyczy <u>wyniku</u> doświadczenia losowego.

Twierdzenie 2.

Niech A będzie zdarzeniem zawartym w przestrzeni Ω, zdarzenia $B_1, B_2, ..., B_n$ będą zdarzeniami zawartymi w tej samej przestrzeni Ω, spełniającymi warunki:

1) $B_i \cap B_j = \varnothing$ dla $i \neq j$, $i, j = 1, 2, ..., n$
2) $P(B_i) > 0$ dla $i = 1, 2, ..., n$
3) $B_1 \cup B_2 \cup ... \cup B_n = \Omega$,

to

(**) $$P(B_i|A) = \frac{P(A|B_i) \cdot P(B_i)}{P(A)}, \text{ gdzie}$$

$$P(A) = P(A|B_1) \cdot P(B_1) + P(A|B_2) \cdot P(B_2) + ... + P(A|B_n) \cdot P(B_n)$$

Wzór (**) nazywa się wzorem Bayesa.

Twierdzenie 2. łatwo jest udowodnić, korzystając z definicji prawdopodobieństwa warunkowego i twierdzenia o prawdopodobieństwie całkowitym.

Przykład 2.

W szufladzie było 5 nowych i 8 używanych piłek do gry w tenisa. Do pierwszej gry wzięto losowo z tej szuflady 2 piłki i po grze włożono je z powrotem do szuflady. Do drugiej gry wzięto losowo z tej szuflady 3 piłki. Ile jest równe prawdopodobieństwo wzięcia do drugiej gry 3 nowych piłek?

Prawdopodobieństwo zdarzenia, które mamy policzyć, zależy od tego, ile nowych piłek wyjęto z szuflady do pierwszej gry.

Oznaczmy zdarzenia:

A – „do drugiej gry wzięto 3 piłki nowe”

B_1 – „do pierwszej gry wzięto 2 piłki nowe”

B_2 – „do pierwszej gry wzięto 1 piłkę używaną i 1 piłkę nową”

B_3 – „do pierwszej gry wzięto 2 piłki używane”.

$$P(B_1) = \frac{\binom{5}{2}}{\binom{13}{2}} \qquad P(B_2) = \frac{\binom{5}{1}\cdot\binom{8}{1}}{\binom{13}{2}} \qquad P(B_3) = \frac{\binom{8}{2}}{\binom{13}{2}}$$

Zdarzenia B_1, B_2, B_3 spełniają założenia twierdzenia o prawdopodobieństwie całkowitym.

Obliczamy $P(A|B_1)$. Zakładamy, że do pierwszej gry wzięto 2 piłki nowe, zatem po tej grze w szufladzie było 10 piłek używanych i 3 piłki nowe.

$$P(A|B_1) = \frac{\binom{3}{3}}{\binom{13}{3}}$$

Podobnie obliczamy $P(A|B_2)$ i $P(A|B_3)$. Otrzymujemy:

$$P(A|B_2) = \frac{\binom{4}{3}}{\binom{13}{3}} \qquad P(A|B_3) = \frac{\binom{5}{3}}{\binom{13}{3}}$$

Obliczamy $P(A)$.

$$P(A) = \frac{\binom{3}{3}}{\binom{13}{3}}\cdot\frac{\binom{5}{2}}{\binom{13}{2}} + \frac{\binom{4}{3}}{\binom{13}{3}}\cdot\frac{\binom{5}{1}\cdot\binom{8}{1}}{\binom{13}{2}} + \frac{\binom{5}{3}}{\binom{13}{3}}\cdot\frac{\binom{8}{2}}{\binom{13}{2}} = \frac{75}{3718}$$

Szukane prawdopodobieństwo jest równe $\frac{75}{3718}$.

Sprawdź, czy rozumiesz

1. W I pudełku znajduje się 6 kul niebieskich i 4 kule czerwone, zaś w II pudełku – 4 kule niebieskie i 5 czerwonych. Losujemy jedną kulę z I pudełka i – nie oglądając jej – wrzucamy do II pudełka. Następnie wybieramy losowo kulę z II pudełka. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że druga wylosowana kula będzie czerwona.
2. Wśród wyrobów pierwszej i drugiej firmy towary wadliwe stanowią odpowiednio 5% i 3%. Pierwsza z tych firm dostarcza do hurtowni dwa razy więcej wyrobów niż druga. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że jedna sztuka towaru zakupiona w tej hurtowni okaże się dobra.

Niezależność zdarzeń

Omawiając prawdopodobieństwo $P(A|B)$ zajścia zdarzenia A pod warunkiem, że zaszło zdarzenie B, zauważyliśmy, że informacja o zajściu zdarzenia B zwykle wpływa na prawdopodobieństwo zdarzenia A, to znaczy $P(A|B) \neq P(A)$. Ale może też być sytuacja taka, że

(*) $P(A|B) = P(A)$, gdzie $P(B) > 0$,

co można interpretować jako „brak wpływu” zdarzenia B na zdarzenie A lub jako „niezależność” zdarzenia A od zdarzenia B. Warunek (*) można zapisać – zgodnie z definicją prawdopodobieństwa warunkowego – jako

$$\frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A), \text{ czyli}$$

(**) $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

Zauważmy też, że jeśli zdarzenie A jest „niezależne” od zdarzenia B, to i zdarzenie B jest „niezależne” od zdarzenia A (o ile $P(A) > 0$). Mamy bowiem:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \quad /: P(A), \quad P(A) > 0$$

$$\frac{P(B \cap A)}{P(A)} = P(B)$$

(***) $P(B|A) = P(B)$

Warunek (**) jest symetryczny ze względu na A i B (co pozwala nazwać zdarzenia A i B – po prostu – zdarzeniami niezależnymi) i nie wymaga stosowania dodatkowych założeń jak warunek (*) ($P(B) > 0$) lub jak warunek (***) ($P(A) > 0$).

Przyjmujemy więc następującą definicję.

Definicja 1.

Dwa zdarzenia A, B zawarte w przestrzeni Ω nazywamy **zdarzeniami niezależnymi** wtedy i tylko wtedy, gdy

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

UWAGA: Zdarzeń niezależnych nie należy mylić ze zdarzeniami wykluczającymi się. Zdarzenia wykluczające się A, B zawarte w przestrzeni Ω, o ile $P(A) > 0$ i $P(B) > 0$, nigdy nie są niezależne. Mamy bowiem

$$P(A \cap B) = P(\varnothing) = 0 \quad \text{i} \quad P(A) \cdot P(B) > 0, \qquad \text{czyli}$$

$$P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B)$$

Przykład 1.

Losujemy z talii 52 kart jedną kartę. Rozpatrzmy zdarzenia:

A – „wylosowana karta jest pikiem”

B – „wylosowana karta jest asem”.

Czy te zdarzenia są niezależne?

Mamy $\overline{\overline{\Omega}} = 52$, wszystkie zdarzenia elementarne są jednakowo prawdopodobne.

$A \cap B$ oznacza zdarzenie „wylosowana karta jest asem pik".

$\overline{\overline{A}} = 13$ $\qquad$ $\overline{\overline{B}} = 4$ $\qquad$ $\overline{\overline{A \cap B}} = 1$

$P(A) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$ $\qquad$ $P(B) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$ $\qquad$ $P(A \cap B) = \frac{1}{52}$

$P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{13} = \frac{1}{52}$, $\quad$ czyli $\quad$ $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

Zdarzenia A i B są niezależne.

Przykład 2.

Doświadczenie losowe polega na dwukrotnym rzucie symetryczną, sześcienną kostką do gry. Rozważmy zdarzenia: A – „w pierwszym rzucie wypadła liczba oczek podzielna przez 3", B – „w drugim rzucie wypadło 5 oczek". Czy zdarzenia A i B są niezależne?

Mamy $\overline{\overline{\Omega}} = 36$, wszystkie zdarzenia elementarne są jednakowo prawdopodobne.

$A = \{(3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6), (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)\}$

$\overline{\overline{A}} = 12$

$B = \{(1,5), (2,5), (3,5), (4,5), (5,5), (6,5)\}$ $\qquad$ $\overline{\overline{B}} = 6$

$A \cap B = \{(3,5), (6,5)\}$ $\qquad$ $\overline{\overline{A \cap B}} = 2$

$P(A \cap B) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$ $\qquad$ $P(A) = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$ $\qquad$ $P(B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

$P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{18}$, $\quad$ zatem $\quad$ $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

Zdarzenia A i B są niezależne.

Przykład 3.

Doświadczenie losowe polega na:

a) trzykrotnym rzucie symetryczną monetą

b) dwukrotnym rzucie symetryczną monetą.

Oznaczmy zdarzenia:

A – „otrzymaliśmy co najmniej jednego orła i co najmniej jedną reszkę"

B – „otrzymaliśmy co najmniej jednego orła".

Czy zdarzenia A i B są niezależne?

Ad a) Mamy:

$\Omega = \{(O,O,O), (O,O,R), (O,R,O), (R,O,O), (R,R,O), (R,O,R), (O,R,R), (R,R,R)\}$

$\overline{\overline{\Omega}} = 8$, wszystkie zdarzenia elementarne są jednakowo prawdopodobne

$A = \{(O,O,R), (O,R,O), (R,O,O), (R,R,O), (R,O,R), (O,R,R)\}$ $\qquad$ $\overline{\overline{A}} = 6$

$B = \{(R, R, O), (R, O, R), (O, R, R), (R, R, R)\}$ $\qquad \overline{\overline{B}} = 4$

$A \cap B = \{(R, R, O), (R, O, R), (O, R, R)\}$ $\qquad \overline{\overline{A \cap B}} = 3$

$P(A \cap B) = \frac{3}{8} \qquad P(A) = \frac{6}{8} = \frac{3}{4} \qquad P(B) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

$P(A) \cdot P(B) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{8} = P(A \cap B)$

Zdarzenia A i B są niezależne.

Ad b) W tym przypadku mamy:

$\Omega = \{(O, O), (O, R), (R, O), (R, R)\}$

$\overline{\overline{\Omega}} = 4$, wszystkie zdarzenia elementarne są jednakowo prawdopodobne

$A = \{(O, R), (R, O)\}$ $\qquad \overline{\overline{A}} = 2$

$B = \{(O, R), (R, O), (R, R)\}$ $\qquad \overline{\overline{B}} = 3$

$A \cap B = \{(O, R), (R, O)\}$ $\qquad \overline{\overline{A \cap B}} = 2$

$P(A \cap B) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \qquad P(A) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \qquad P(B) = \frac{3}{4}$

$P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{8} \qquad P(A \cap B) = \frac{4}{8},$ $\qquad$ zatem $\qquad P(A) \cdot P(B) \neq P(A \cap B)$

W przypadku dwukrotnego rzutu monetą zdarzenia A i B nie są niezależne.

Twierdzenie 1.

Jeśli P jest prawdopodobieństwem określonym w przestrzeni zdarzeń elementarnych Ω, zdarzenia A, B zawarte w tej przestrzeni są zdarzeniami niezależnymi, to również zdarzenia A i B' są zdarzeniami niezależnymi.

Założenie: $\qquad A, B \subset \Omega \qquad P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

Teza: $\qquad P(A \cap B') = P(A) \cdot P(B')$

Dowód: Zauważmy, że

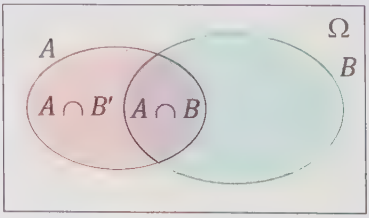
$A = (A \cap B) \cup (A \cap B')$ i $(A \cap B) \cap (A \cap B') = \varnothing,$

zatem

$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B'),$ $\qquad$ stąd

$P(A \cap B') = P(A) - P(A \cap B)$

z założenia $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$, więc



$P(A \cap B') = P(A) - P(A) \cdot P(B) = P(A)[1 - P(B)] = P(A) \cdot P(B'),$ $\qquad$ co kończy dowód.

Wniosek: Jeśli zdarzenia A, B, gdzie $A, B \subset \Omega$, są niezależne, to również zdarzenia A', B' są niezależne.

Twierdzenie zawarte we wniosku można też udowodnić bezpośrednio. W tym celu zauważmy, że

$$A' \cap B' = \Omega - (A \cup B), \qquad \text{stąd}$$

$$\begin{aligned} P(A' \cap B') &= 1 - P(A \cup B) = 1 - [P(A) + P(B) - P(A \cap B)] = \\ &= 1 - P(A) - P(B) + P(A) \cdot P(B) = [1 - P(A)] - P(B)[1 - P(A)] = \\ &= [1 - P(A)] \cdot [1 - P(B)] = P(A') \cdot P(B') \end{aligned}$$

Omówimy teraz zagadnienie niezależności trzech i więcej niż trzech zdarzeń.

Definicja 2.

Zdarzenia $A_1, A_2, \ldots, A_n$ zawarte w przestrzeni Ω nazywamy **zdarzeniami niezależnymi** wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych k spośród nich $(2 \leqslant k \leqslant n)$ prawdopodobieństwo ich iloczynu jest równe iloczynowi ich prawdopodobieństw.

Tak więc trzy zdarzenia A, B, C zawarte w przestrzeni Ω są niezależne wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione są jednocześnie cztery warunki:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

$$P(A \cap C) = P(A) \cdot P(C)$$

$$P(B \cap C) = P(B) \cdot P(C)$$

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$$

Pokażemy, że z trzech pierwszych równości nie wynika czwarty warunek, i odwrotnie – z czwartej równości nie wynikają trzy pierwsze.

Przykład 4.

Niech $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ i wszystkie zdarzenia elementarne są jednakowo prawdopodobne.

a) Oznaczmy zdarzenia:

$$A = \{1, 2, 3, 4\} \qquad B = \{3, 4, 5, 6\} \qquad C = \{1, 2, 5, 6\}$$

Wówczas

$$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{2}$$

$$P(A \cap B) = \frac{1}{4} = P(A) \cdot P(B) \quad P(B \cap C) = \frac{1}{4} = P(B) \cdot P(C) \quad P(A \cap C) = \frac{1}{4} = P(A) \cdot P(C)$$

$$P(A \cap B \cap C) = 0 \neq \frac{1}{8} = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$$

Zdarzenia A, B, C nie są niezależne, mimo że są parami niezależne.

b) Oznaczmy zdarzenia:

$$A = \{1, 2, 3, 4\} \qquad B = \{1, 3, 4, 5\} \qquad C = \{1, 6, 7, 8\}$$

Zatem

$$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{2}$$

$$P(A \cap B \cap C) = \frac{1}{8} = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$$

$$P(A \cap B) = \frac{1}{8} \neq \frac{1}{4} = P(A) \cdot P(B)$$

$$P(A \cap C) = \frac{1}{8} \neq \frac{1}{4} = P(A) \cdot P(C)$$

$$P(B \cap C) = \frac{1}{8} \neq \frac{1}{4} = P(B) \cdot P(C)$$

Zdarzenia A, B, C nie są niezależne.

Przykład 5.

Wykażemy, że jeśli zdarzenia A, B, C zawarte w przestrzeni Ω są niezależne, to również zdarzenia $A \cup B$ i C są niezależne.

Wystarczy pokazać, że $P[(A \cup B) \cap C] = P(A \cup B) \cdot P(C)$.

$P[(A \cup B) \cap C] = P[(A \cap C) \cup (B \cap C)] =$ — Stosujemy wzór na prawdopodobieństwo sumy dwóch zdarzeń.

$= P(A \cap C) + P(B \cap C) - P(A \cap B \cap C) =$ — Korzystamy z założenia – zdarzenia A, B, C są niezależne.

$= P(A) \cdot P(C) + P(B) \cdot P(C) - P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) =$ — Wyłączamy $P(C)$ poza nawias.

$= [P(A) + P(B) - P(A \cap B)] \cdot P(C) =$ — Stosujemy wzór na prawdopodobieństwo sumy dwóch zdarzeń.

$= P(A \cup B) \cdot P(C)$, co kończy dowód.

Można również wykazać – stosując własności działań na zbiorach i własności prawdopodobieństwa – że jeśli zdarzenia A, B, C są niezależne, to niezależne też są następujące trójki zdarzeń: A', B, C oraz A', B', C i A', B', C'.

Przykład 6.

Sześciu zawodników $Z_1, Z_2, Z_3, Z_4, Z_5, Z_6$ – od najlepszego do najsłabszego – oddaje niezależnie po jednym strzale do celu. Prawdopodobieństwo trafienia w cel, dla każdego zawodnika, jest odpowiednio równe: 0,8 0,7 0,5 0,5 0,4 0,2.

a) Co jest bardziej prawdopodobne: to, że każdy z zawodników Z_1, Z_3, Z_6 trafi w cel, czy też to, że każdy z pozostałych zawodników trafi w cel?

b) Co jest bardziej prawdopodobne: to, że co najmniej jeden spośród zawodników Z_1, Z_3, Z_6 trafi w cel, czy to, że co najmniej jeden z pozostałych zawodników trafi w cel?

Mamy

$$\Omega = \{(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6): \omega_i \in \{T, N\}, i = 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

ω_i – wynik strzału i-tego zawodnika (trafił w cel (T), nie trafił (N))

Oznaczamy

A_i – zdarzenie „i-ty zawodnik trafił w cel”, $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$

$P(A_1) = 0{,}8 \quad P(A_2) = 0{,}7 \quad P(A_3) = 0{,}5 \quad P(A_4) = 0{,}5 \quad P(A_5) = 0{,}4 \quad P(A_6) = 0{,}2$

Ad a) Interesuje nas prawdopodobieństwo zdarzeń

$A_1 \cap A_3 \cap A_6$ oraz $A_2 \cap A_4 \cap A_5$

Zdarzenia $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ są niezależne, więc

$P(A_1 \cap A_3 \cap A_6) = P(A_1) \cdot P(A_3) \cdot P(A_6) = 0{,}8 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}2 = 0{,}08$

$P(A_2 \cap A_4 \cap A_5) = P(A_2) \cdot P(A_4) \cdot P(A_5) = 0{,}7 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}4 = 0{,}14$

Bardziej prawdopodobne jest trafienie w cel przez każdego z zawodników Z_2, Z_4, Z_5.

Ad b) W tym przypadku interesuje nas prawdopodobieństwo zdarzeń

$A_1 \cup A_3 \cup A_6$ oraz $A_2 \cup A_4 \cup A_5$

<u>I sposób:</u> Stosujemy wzór na prawdopodobieństwo sumy trzech zdarzeń.

$P(A_1 \cup A_3 \cup A_6) =$

$= P(A_1) + P(A_3) + P(A_6) - P(A_1 \cap A_3) - P(A_1 \cap A_6) - P(A_3 \cap A_6) + P(A_1 \cap A_3 \cap A_6) =$

$= P(A_1) + P(A_3) + P(A_6) - P(A_1) \cdot P(A_3) - P(A_1) \cdot P(A_6) - P(A_3) \cdot P(A_6) + P(A_1) \cdot P(A_3) \cdot P(A_6) =$

$= 0{,}8 + 0{,}5 + 0{,}2 - 0{,}8 \cdot 0{,}5 - 0{,}8 \cdot 0{,}2 - 0{,}5 \cdot 0{,}2 + 0{,}8 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}2 = 0{,}92$

Postępując podobnie, otrzymujemy:

$P(A_2 \cup A_4 \cup A_5) = 0{,}91$

<u>II sposób:</u> Wyznaczamy zdarzenie przeciwne.
Zdarzeniem przeciwnym do zdarzenia: „co najmniej jeden z zawodników Z_1, Z_3, Z_6 trafi w cel" jest zdarzenie „żaden z zawodników Z_1, Z_3, Z_6 nie trafi w cel", co symbolicznie możemy zapisać tak:

$A_1' \cap A_3' \cap A_6'$

Mamy:

$P(A_1 \cup A_3 \cup A_6) = 1 - P(A_1' \cap A_3' \cap A_6') = 1 - P(A_1') \cdot P(A_3') \cdot P(A_6') =$

$= 1 - 0{,}2 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}8 = 0{,}92$

Podobnie obliczamy:

$P(A_2 \cup A_4 \cup A_5) = 1 - P(A_2' \cap A_4' \cap A_5') = 1 - P(A_2') \cdot P(A_4') \cdot P(A_5') =$

$= 1 - 0{,}3 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}6 = 0{,}91$

Bardziej prawdopodobne jest trafienie w cel co najmniej raz przez zawodników Z_1, Z_3, Z_6.

Sprawdź, czy rozumiesz

1. Rzucamy dwiema kostkami do gry. Określamy zdarzenia:
   A – „na pierwszej kostce wypadła szóstka", B – „na drugiej kostce wypadła jedynka". Zbadaj, czy zdarzenia A i B są niezależne.

2. Dwóch strzelców trafia do celu: pierwszy 7 razy na 10 oddanych strzałów, drugi – 6 razy na 10 oddanych strzałów. Każdy strzelec oddał jeden strzał do celu. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że
   a) cel został trafiony dwa razy b) cel został trafiony tylko raz.

5. Elementy statystyki opisowej

Podstawowe pojęcia statystyki. Sposoby prezentowania danych zebranych w wyniku obserwacji statystycznej

Statystyka jest nauką, która zajmuje się badaniem zjawisk masowych. Wyróżniamy jej dwa działy: statystykę opisową i statystykę matematyczną. Przedmiotem statystyki opisowej są zagadnienia związane ze zbieraniem, porządkowaniem, analizą i interpretacją zgromadzonych danych. Statystyka matematyczna jest działem rachunku prawdopodobieństwa i zajmuje się modelami matematycznymi, których używa się do badania zjawisk masowych.

Jednym z etapów badania statystycznego jest **obserwacja statystyczna**, którą przeprowadza się za pomocą wywiadu kwestionariuszowego, ankiety, monitoringu czy rejestracji. Badaniem statystycznym obejmuje się zwykle pewien zbiór obiektów, który nazywamy **populacją generalną** (zbiorowością generalną). Badanie obejmujące wszystkie elementy populacji nazywamy **badaniem pełnym**. Najczęściej przeprowadza się badanie częściowe obejmujące tylko pewną część populacji. Taki podzbiór populacji, który został bezpośrednio objęty badaniem statystycznym, nazywamy **próbą**, a liczbę elementów wchodzących w skład próby – **liczebnością** tej **próby**. W statystyce mówimy o małych próbach, jeśli liczebność próby jest nie większa niż 30, oraz o próbach dużych, jeśli liczebność próby jest większa niż 30. Próba, która podlega badaniu statystycznemu, powinna być odpowiednio dobrana. Struktura próby musi odzwierciedlać strukturę badanej populacji tak, aby istniała możliwość uogólnienia otrzymanych wyników na całą populację.

Elementy populacji generalnej, jakie podlegają obserwacji statystycznej, mają różne właściwości, które nazywamy **cechami statystycznymi**. W przypadku populacji danego miasta możemy mówić o następujących cechach: wiek, płeć, kolor oczu, wykształcenie, wzrost, posiadanie własnego mieszkania czy samochodu, zawód wykonywany czy stopień zamożności (tzn. dochód miesięczny na jednego członka rodziny). Wśród cech są takie, które możemy wyrazić za pomocą liczb (np. wzrost, waga, dochód na członka rodziny). Te cechy nazywamy **cechami mierzalnymi**. Są też takie cechy, które możemy wyrazić jedynie za pomocą słów (np. kolor oczu, płeć, wykształcenie); nazywamy je **cechami niemierzalnymi**.

W wyniku badania statystycznego otrzymujemy dane statystyczne. Dane te analizuje się i opracowuje. Następnie prezentuje się wnioski wynikające z uzyskanych danych.

Przykład 1.

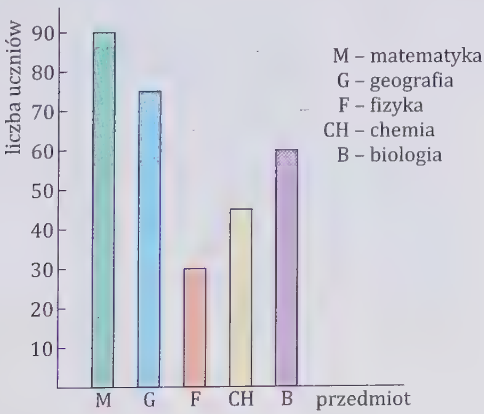
Wśród 300 uczniów pewnego liceum przeprowadzono ankietę. Celem ankietujących było zdobycie informacji, którego przedmiotu z grupy matematyczno-przyrodniczych młodzież uczy się najchętniej. Każdy ankietowany wskazywał tylko jeden przedmiot. Okazało się, że na matematykę wskazało 90 osób, geografię – 75 osób, fizykę – 30 osób, chemię – 45 osób i biologię – 60 osób.
Zdobyte przez ankieterów informacje przedstawimy na różne sposoby.

- **Tabela**

Przedmiot	Liczba uczniów
Matematyka	90
Geografia	75
Fizyka	30
Chemia	45
Biologia	60

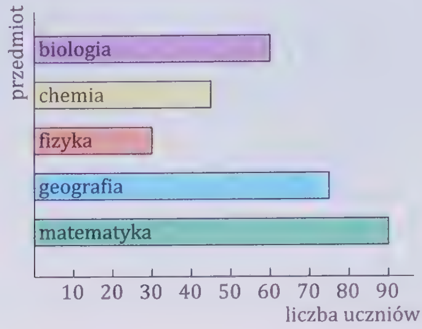
Zauważ, że tabela zawiera dwie kolumny – w pierwszej kolumnie występuje nazwa przedmiotu, w drugiej liczba uczniów, którzy wybrali dany przedmiot. Suma liczb w drugiej kolumnie wynosi 300 i jest równa liczbie ankietowanych. Przy takim przedstawieniu wyników mówimy, że tabela zawiera wyniki mierzonej cechy (w tym przypadku – nazwę przedmiotu) i jej liczebności (liczbę uczniów, którzy wskazali dany przedmiot).

- **Diagram kolumnowy**



Każda z kolumn przedstawionych na diagramie odpowiada jednemu z przedmiotów szkolnych podlegających badaniu. Legenda zamieszczona obok diagramu informuje nas, która kolumna odpowiada jakiemu przedmiotowi. Wysokość kolumny odpowiada liczbie głosów oddanych na dany przedmiot.

- **Diagram słupkowy**

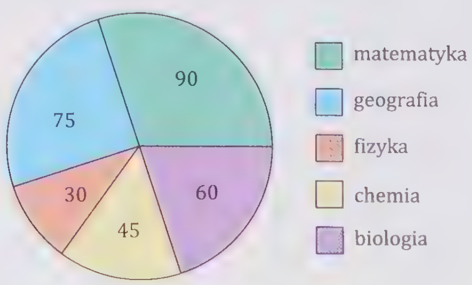


Oś pozioma informuje o liczbie głosów oddanych na dany przedmiot. Poszczególne słupki (poziome pasy) odpowiadają badanym przedmiotom. Im dłuższy słupek, tym więcej głosów oddanych na dany przedmiot.

- **Diagram kołowy**

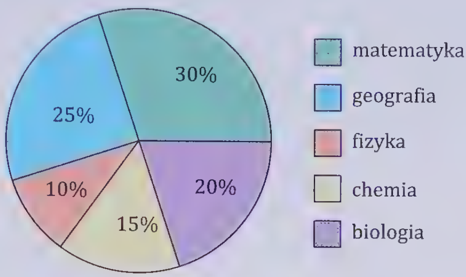
Aby sporządzić diagram kołowy, należy wykonać odpowiednie obliczenia. Interesuje nas zależność między liczbą głosów oddanych na dany przedmiot a częścią koła, która odpowiada tej liczbie głosów. Obliczenia wykonujemy w następujący sposób:

Na matematykę oddano 90 głosów, co stanowi $\frac{90}{300}$ wszystkich oddanych głosów, czyli 0,3. Zatem liczbie głosów oddanych na matematykę odpowiada kąt środkowy o mierze $0{,}3 \cdot 360° = 108°$. Podobnie wykonujemy pozostałe rachunki. Liczbie głosów oddanych na geografię odpowiada kąt środkowy o mierze 90°, na fizykę – kąt środkowy o mierze 36°, na chemię – kąt środkowy o mierze 54°, na biologię – kąt środkowy o mierze 72°. Poniżej prezentujemy zebrane dane statystyczne w postaci diagramu kołowego.



Zdarza się, że dane uzyskane w wyniku badania statystycznego przedstawia się w postaci diagramu procentowego. Diagram kołowy procentowy przedstawia zebrane dane wyrażone w procentach. Informacje otrzymane przez ankieterów wskazują, że na matematykę głosowało 30% uczniów, na geografię – 25% uczniów, na fizykę – 10% uczniów, na chemię – 15% uczniów, a na biologię – 20% uczniów.

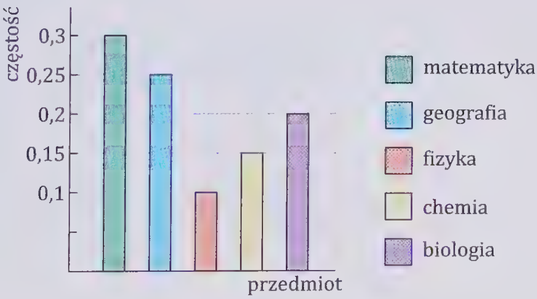
Oto diagram kołowy procentowy zebranych danych.



- **Diagram częstości względnych**

Opracowując wyniki ankiety, możemy wziąć pod uwagę tzw. częstości względne. Częstość względna to ułamek właściwy równy stosunkowi liczby wyników przypisanych badanej cesze (w tym przypadku liczby głosów oddanych na dany przedmiot) do ogólnej liczby wyników. W przypadku ankiety dotyczącej przedmiotów szkolnych częstość względna występowania matematyki wśród oddanych głosów wynosiła 0,3; częstość względna występowania geografii – 0,25; częstość względna występowania fizyki – 0,1; częstość względna występowania chemii – 0,15; częstość względna występowania biologii – 0,2.

Poniżej prezentujemy diagram częstości względnych poszczególnych przedmiotów.



Sprawdź, czy rozumiesz

1. Wśród pięćdziesięciu losowo wybranych osób przeprowadzono sondę uliczną, w której zapytano: „Ile razy w ciągu minionego półrocza był(a) Pan(i) na spektaklu w teatrze?". Otrzymano następujące wyniki: 0 razy – odpowiedziało 40% badanych, 1 raz – 30% osób, 2 razy – 20% osób, 3 razy – 10% osób. Przedstaw zebrane dane w postaci tabeli liczebności, diagramu kołowego oraz diagramu słupkowego.

Średnia z próby

W poprzednich latach nauki poznałeś pojęcie średniej arytmetycznej liczb rzeczywistych. Termin ten występuje również w statystyce i dotyczy danych, które zawierają wartości cechy mierzalnej (czyli cechy wyrażonej liczbą).

Definicja 1.

Niech liczby $x_1, x_2, ..., x_n$ będą wartościami pewnej cechy mierzalnej.

Średnią arytmetyczną z próby liczb $x_1, x_2, ..., x_n$ nazywamy liczbę $\frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}$, którą oznaczamy $\overline{x}$.

Przykład 1.

Janek z trzech prac klasowych z matematyki otrzymał następujące oceny:

2+ 2+ 4

Obliczymy średnią ocen Janka z prac klasowych z matematyki, zakładając, że „+" przy ocenie ma wartość 0,5.

Obliczamy:

$$\overline{x} = \frac{2{,}5 + 2{,}5 + 4}{3} = \frac{9}{3} = 3$$

Średnia ocen Janka z prac klasowych z matematyki jest równa 3.

Przykład 2.

W pewnym liceum przeprowadzono sprawdzian dyrektorski z matematyki wśród wszystkich klas trzecich. W 34-osobowej klasie IIIa średnia ocen z tego sprawdzianu była równa 2,5, w 36-osobowej klasie IIIb średnia ocen była równa 2,5, a w 20-osobowej klasie IIIc średnia ocen była równa 4,0. Jaka była średnia ocen ze sprawdzianu dyrektorskiego wszystkich uczniów z klas trzecich?

Aby wyznaczyć żądaną średnią, wystarczy obliczyć sumy ocen ze sprawdzianu w każdej klasie, otrzymane wyniki dodać i na koniec podzielić przez liczbę wszystkich uczniów klas trzecich.

Suma ocen ze sprawdzianu w klasie IIIa jest równa:	$34 \cdot 2{,}5$
w klasie IIIb	$36 \cdot 2{,}5$
w klasie IIIc	$20 \cdot 4{,}0$
Liczba wszystkich uczniów klas trzecich:	$34 + 36 + 20$

Średnia ocen w trzech klasach jest równa:

$$\frac{34 \cdot 2{,}5 + 36 \cdot 2{,}5 + 20 \cdot 4{,}0}{34 + 36 + 20} = \frac{85 + 90 + 80}{90} = \frac{255}{90} = 2{,}8(3)$$

Zauważ, że średnia ocen jest niższa od 3. Dlaczego tak jest? Otóż klasy nie są równoliczne i większy wpływ na średnią końcową ma każda z ocen 2,5 niż ocena 4,0. Można też powiedzieć, że „waga" każdej oceny z ocen 2,5 jest większa niż „waga" oceny 4,0.

Definicja 2.

Niech liczby $x_1, x_2, ..., x_n$ będą wartościami pewnej cechy mierzalnej, a liczby dodatnie $w_1, w_2, ..., w_n$ będą wagami odpowiadającymi tym wartościom cechy. **Średnią ważoną** liczb $x_1, x_2, ..., x_n$ z wagami odpowiednio $w_1, w_2, ..., w_n$ nazywamy liczbę $\frac{x_1 \cdot w_1 + x_2 \cdot w_2 + ... + x_n \cdot w_n}{w_1 + w_2 + ... + w_n}$, którą oznaczamy $\overline{x}_w$.

Przykład 3.

Nauczyciel przedstawił uczniom zasady wystawiania oceny semestralnej z matematyki. Poinformował, że największe znaczenie mają dla niego prace klasowe, mniej ważne są krótkie sprawdziany i odpowiedzi ustne, a najniżej punktowane są prace domowe. Odpowiednim formom sprawdzania wiedzy przypisał następujące wagi:

Forma sprawdzania wiedzy	Prace klasowe	Krótkie sprawdziany lub odpowiedzi ustne	Prace domowe
Waga	5	3	2

Poinformował uczniów, że ocena semestralna to średnia ważona uzyskanych ocen.

a) Obliczymy, jaką ocenę wystawi nauczyciel uczniowi, który w semestrze uzyskał następujące oceny:
prace klasowe: 1, 3, 2, 2
krótkie sprawdziany: 5, 4
odpowiedź ustna: 3
prace domowe: 3, 4.

b) Obliczymy średnią arytmetyczną ocen ucznia i ocenimy, czy bardziej korzystne w tej sytuacji jest wystawienie oceny będącej średnią arytmetyczną, czy średnią ważoną uzyskanych ocen.

Ad a) Obliczamy średnią ważoną.

$$\overline{x}_w = \frac{5 \cdot 1 + 5 \cdot 3 + 5 \cdot 2 + 5 \cdot 2 + 3 \cdot 5 + 3 \cdot 4 + 3 \cdot 3 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 4}{5 + 5 + 5 + 5 + 3 + 3 + 3 + 2 + 2} =$$

$$= \frac{5 \cdot (1 + 3 + 2 + 2) + 3 \cdot (5 + 4 + 3) + 2 \cdot (3 + 4)}{5 \cdot 4 + 3 \cdot 3 + 2 \cdot 2} = \frac{5 \cdot 8 + 3 \cdot 12 + 2 \cdot 7}{20 + 9 + 4} = \frac{90}{33} \approx 2,7$$

Na koniec semestru uczeń otrzyma ocenę 2+.

Ad b) Obliczamy średnią arytmetyczną ocen.

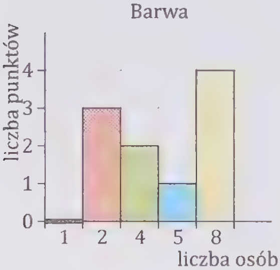
$$\overline{x} = \frac{1 + 3 + 2 + 2 + 5 + 4 + 3 + 3 + 4}{9} = \frac{27}{9} = 3$$

Gdyby nauczyciel wystawił na semestr ocenę równą średniej arytmetycznej uzyskanych ocen, uczeń otrzymałby na semestr 3. Zatem w tym przypadku otrzymałby lepszą ocenę końcową.

Przykład 4.

Właściciel herbaciarni „Smaki świata", zanim na stałe wprowadzi nową herbatę dla klientów, przeprowadza badanie na grupie 20 osób losowo wybranych spośród bywalców lokalu. Wybrane osoby oceniają herbatę w trzech kategoriach: b-barwy, s-smaku oraz c-ceny, przyznając każdej z trzech kategorii liczbę punktów w skali 0–4. Następnie właściciel oblicza średnie arytmetyczne $\overline{x}_b$, $\overline{x}_s$ oraz $\overline{x}_c$, w ten sposób uzyskanych punktów. O wprowadzeniu herbaty do sprzedaży decyduje średnia ważona, którą oblicza ze średnich $\overline{x}_b$, $\overline{x}_s$ oraz $\overline{x}_c$, nadając im odpowiednio wagi: 3, 5, 2. W przypadku, gdy średnia ważona jest większa od 2,5, zapada decyzja o wprowadzeniu herbaty do stałej sprzedaży.

Dla herbaty „Zimowa rozkosz" uzyskano następujące wyniki w poszczególnych kategoriach:



Smak

liczba punktów	0	1	2	3	4
liczba osób	0	0	6	2	12

Ocenimy, czy herbata „Zimowa rozkosz" będzie serwowana w herbaciarni „Smaki świata".

- Najpierw obliczymy średnie arytmetyczne punktów, jakie uzyskała herbata „Zimowa rozkosz" w poszczególnych kategoriach.

$$\overline{x}_b = \frac{1 \cdot 0 + 2 \cdot 3 + 4 \cdot 2 + 5 \cdot 1 + 8 \cdot 4}{20} = 2{,}55$$

$$\overline{x}_s = \frac{0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 6 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 12 \cdot 4}{20} = 3{,}3$$

$$\overline{x}_c = \frac{0 \cdot \frac{1}{10} \cdot 20 + 1 \cdot \frac{2}{5} \cdot 20 + 2 \cdot \frac{1}{5} \cdot 20 + 3 \cdot \frac{1}{5} \cdot 20 + 4 \cdot \frac{1}{10} \cdot 20}{20} = 1{,}8$$

- Następnie obliczamy średnią ważoną liczb $\overline{x}_b$, $\overline{x}_s$ oraz $\overline{x}_c$ z wagami odpowiednio 3, 5 oraz 2.

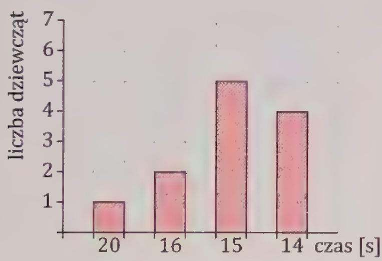
$$\overline{x}_w = \frac{2{,}55 \cdot 3 + 3{,}3 \cdot 5 + 1{,}8 \cdot 2}{3 + 5 + 2} = \frac{27{,}75}{10} = 2{,}775 \approx 2{,}8$$

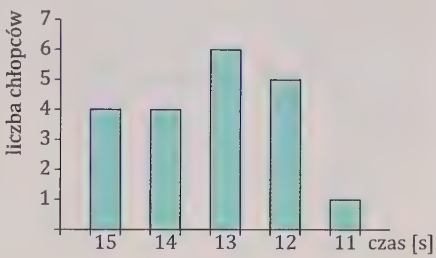
Średnia ważona $\overline{x}_w > 2{,}5$, więc właściciel herbaciarni wprowadzi herbatę „Zimowa rozkosz" do stałej sprzedaży.

Średnia ważona jest parametrem statystycznym bardzo często używanym w mediach. Trzeba jednak pamiętać, że charakteryzowanie populacji jedynie za pomocą takiej średniej może prowadzić do zniekształcenia lub nawet zafałszowania stanu faktycznego. By tego uniknąć, warto stosować też inne parametry. Omówimy je w kolejnych tematach.

Sprawdź, czy rozumiesz

1. Nauczyciel wychowania fizycznego przeprowadził w klasie IIIa sprawdzian z biegu na 100 m. Uzyskane wyniki (w sekundach) na tym dystansie przez dziewczęta i chłopców ilustrują poniższe diagramy.





Oblicz:
a) średni czas biegu dla dziewcząt tej klasy
b) średni czas biegu dla chłopców tej klasy
c) średni czas biegu dla całej klasy IIIa.

2. Właściciel dwóch nadbałtyckich pensjonatów „Czajka" i „Mewa" przeprowadził wśród 10 losowo wybranych osób (po 5 wczasowiczów z każdego ośrodka) sondaż, badając zadowolenie gości w trzech kategoriach: standard pokoju (z wagą 3), wyżywienie (z wagą 5) oraz kulturę obsługi (z wagą 2). Każdy sondowany gość oceniał pensjonat, przyznając każdej z wymienionych kategorii ocenę cząstkową w skali ocen szkolnych 1–6. Ocenę końcową pensjonatu obliczał właściciel jako średnią ważoną ocen cząstkowych. Poszczególne pensjonaty uzyskały następujące oceny cząstkowe:

Pensjonat „Czajka"		
Kategoria	Ocena cząstkowa	Liczba osób
Standard pokoju	4	2
	3	1
	2	2
Wyżywienie	6	1
	5	4
Kultura obsługi	5	3
	4	2

Pensjonat „Mewa"		
Kategoria	Ocena cząstkowa	Liczba osób
Standard pokoju	6	3
	5	2
Wyżywienie	6	3
	5	1
	3	1
Kultura obsługi	4	2
	3	3

Który pensjonat uzyskał lepszą ocenę końcową?

Mediana z próby i moda z próby

Przykład 1.

Wśród 20 losowo wybranych rodzin przeprowadzono badanie statystyczne. Przedmiotem badania była liczba dzieci. Otrzymano następujące wyniki:

1 3 0 2 3 1 1 1 2 2 3 1 1 3 1 2 4 1 1 3

Sprawdzimy, która wartość powtarza się najczęściej.

W tym celu uporządkujemy zebrane dane statystyczne, zapisując je w postaci niemalejącego ciągu liczb (od najmniejszej wartości do największej):

0 1 1 1 1 1 1 1 1 1 2 2 2 2 3 3 3 3 3 4

Możemy także zebrane wyniki zapisać w postaci tabeli liczebności, przyporządkowując różnym wartościom badanej cechy ich liczebność:

Wartość cechy (liczba dzieci w rodzinie)	0	1	2	3	4
Liczebność (liczba rodzin)	1	9	4	5	1

Wartość, która powtarza się najczęściej (9 razy), to wartość 1.

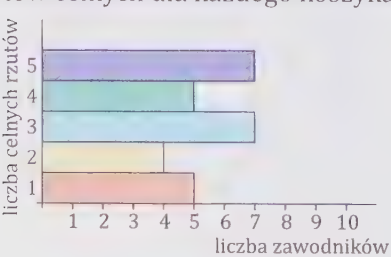
Definicja 1.

Modą (lub **dominantą**) zbioru danych statystycznych nazywamy tę wartość cechy statystycznej, która w zbiorze tym występuje najczęściej. Modę oznaczamy symbolem M_o.

Może się zdarzyć tak, że w zbiorze danych statystycznych wszystkie wartości występują z taką samą liczebnością. Wówczas mówimy, że w zbiorze danych nie ma mody. Jeżeli natomiast w zbiorze danych statystycznych kilka wartości cechy występuje z taką samą liczebnością i większą niż pozostałe wartości, to każdą z nich traktujemy jako modę.

Przykład 2.

Na obozie sportowym trener koszykówki sprawdzał dyspozycję zawodników przed meczem. Każdy sportowiec rzucał po 5 razy do kosza. Trener zapisywał liczbę rzutów celnych dla każdego koszykarza. Wynik przedstawił na diagramie.



Jaka jest moda celnych rzutów do kosza?
Z diagramu odczytujemy, że najczęściej pojawiały się dwie wartości: 3 oraz 5 z taką samą liczebnością 7 i większą niż pozostałe wartości. Zatem moda ma dwie wartości:

3 oraz 5.

Inną liczbą, która charakteryzuje zbiór danych statystycznych, jest mediana.

Definicja 2.

Niech $x_1, x_2, ..., x_n$ będzie niemalejącym ciągiem wartości badanej cechy mierzalnej. **Medianą** nazywamy liczbę:

$x_{\frac{n+1}{2}}$, jeśli n jest liczbą nieparzystą, lub

$\frac{x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n}{2}+1}}{2}$, jeśli n jest liczbą parzystą.

Medianę oznaczamy symbolem M_e.

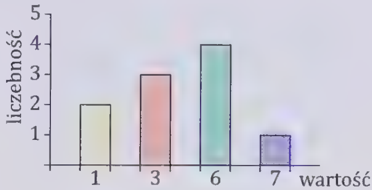
Przykład 3.

Obliczymy medianę M_e zbioru danych statystycznych przedstawionych w postaci:

a) tabeli liczebności

Wartość	2	4	7	8
Liczebność	3	2	5	1

b) diagramu kolumnowego



Ad a) Zauważamy, że liczba danych statystycznych jest równa 11.

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}
2	2	2	4	4	7	7	7	7	7	8

Ponieważ liczba 11 jest nieparzysta, więc na podstawie definicji 2. otrzymujemy:

$$M_e = x_{\frac{11+1}{2}} = x_6 = 7$$

W tym przypadku mediana jest wartością cechy, którą ma środkowy element w uporządkowanym zbiorze danych.

Ad b) Tym razem liczba danych statystycznych jest równa 10.

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}
1	1	3	3	3	6	6	6	6	7

Ponieważ liczba 10 jest parzysta, więc na podstawie definicji 2. mamy:

$$M_e = \frac{x_5 + x_6}{2} = \frac{3+6}{2} = 4{,}5$$

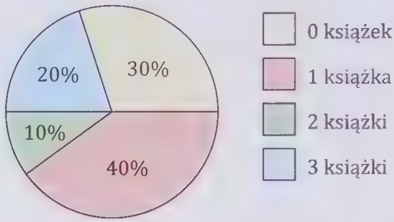
W tym przypadku mediana jest równa średniej arytmetycznej dwóch środkowych wartości badanej cechy w uporządkowanym zbiorze danych.

Zauważ, że:

- Mediana M_e jest taką liczbą, dla której co najmniej połowa danych ma wartość nie większą niż M_e i co najmniej połowa danych ma wartość nie mniejszą niż M_e.
- Mediana M_e może należeć do zbioru danych, ale także może do tego zbioru nie należeć.

Przykład 4.

Przeprowadzono sondę uliczną. Każdej z 20 osób, wybranych losowo na ulicy, zadano pytanie: „Ile książek przeczytał(a) Pan(i) w ciągu ostatniego miesiąca?". Wyniki przedstawione są poniżej, w postaci procentowego diagramu kołowego.



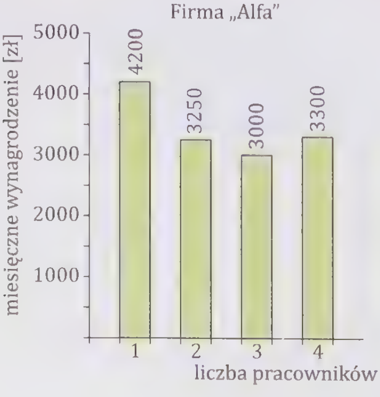
Uporządkujemy dane statystyczne oraz wyznaczymy modę i medianę.

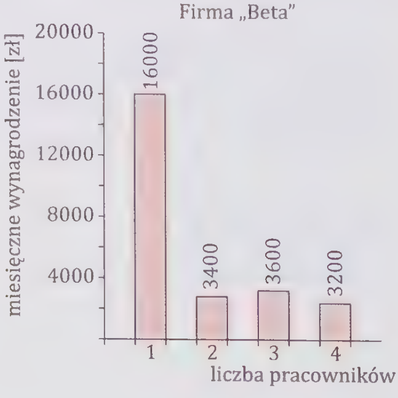
Z diagramu odczytujemy, że w ciągu ostatniego miesiąca ani jednej książki nie przeczytało 30% badanych, czyli 6 osób $(0{,}3 \cdot 20 = 6)$; 1 książkę przeczytało 8 osób, 2 książki – 2 osoby i 3 książki – 4 osoby. Po uporządkowaniu otrzymujemy ciąg danych: 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 3, 3.
Wartością, która występuje najczęściej jest 1, zatem moda $M_o = 1$. Liczba danych jest parzysta i wynosi 20, stąd mediana ma wartość:

$$M_e = \frac{x_{10} + x_{11}}{2} = \frac{1+1}{2} = 1$$

Przykład 5.

Poniższe diagramy ilustrują miesięczne zarobki pracowników dwóch firm: „Alfa" i „Beta".





Przeanalizujemy wysokość pensji w obu firmach. Obliczymy medianę oraz średnią płacę. Która z obliczonych wartości lepiej ilustruje poziom płac?

- W firmie „Alfa" mediana zarobków miesięcznych wynosi

  $$M_e = \frac{3250 + 3300}{2} = 3275 \text{ (zł)}$$

  Średnia płaca w tej firmie ma wartość:

  $$\overline{x} = \frac{4200 + 2 \cdot 3250 + 3 \cdot 3000 + 4 \cdot 3300}{10} = 3290 \text{ (zł)}$$

  Mediana i średnia zarobków miesięcznych mają zbliżone wartości. Oznacza to, że pensje pracowników nie są mocno zróżnicowane. Połowa pracowników zarabia mniej niż wynosi średnia, połowa więcej, ale różnice pomiędzy pensjami pracowniczymi nie są duże.
- W firmie „Beta" mediana zarobków wynosi

  $$M_e = \frac{3400 + 3400}{2} = 3400 \text{ (zł)}$$

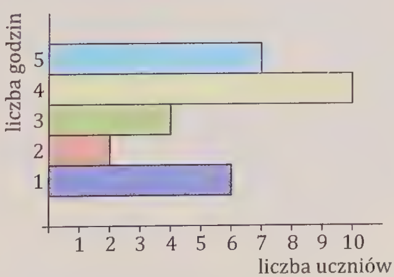
  Obliczymy średnią zarobków w tej firmie.

  $$\overline{x} = \frac{16\,000 + 2 \cdot 3400 + 3 \cdot 3600 + 4 \cdot 3200}{10} = 4640 \text{ (zł)}$$

  W tym przypadku mediana i średnia istotnie się od siebie różnią. Średnia fałszywie ilustruje poziom płac w firmie „Beta". Wszyscy pracownicy (oprócz prezesa) zarabiają poniżej średniej. Tu poziom płac wierniej oddaje mediana.

Sprawdź, czy rozumiesz

1. Wśród uczniów klasy trzeciej w pewnym liceum przeprowadzono ankietę, zadając pytanie: „Ile godzin dziennie spędzasz przed komputerem?". Otrzymane wyniki przedstawiono w postaci diagramu słupkowego, który przedstawiony jest poniżej.



Zapisz dane statystyczne w postaci tabeli liczebności.

a) Wyznacz modę i medianę zbioru danych.

b) Oblicz średnią liczbę godzin spędzanych dziennie przed komputerem.

Wariancja i odchylenie standardowe

Przykład 1.

Trener skoczków narciarskich przygotowuje do konkursu dwóch zawodników. W czasie ostatniego treningu przed konkursem każdy zawodnik miał po 5 skoków. Długości (w metrach) tych skoków przedstawiają się następująco:

I skoczek	102,5	106	98,5	112	101
II skoczek	104,5	105	103	106,5	101

Trener może wyznaczyć do konkursu jednego z tych zawodników. Postanowił porównać średnie długości skoków pierwszego i drugiego skoczka.

Średnia z próby dla pierwszego skoczka:

$$\bar{x}_{\mathrm{I}} = \frac{102{,}5 + 106 + 98{,}5 + 112 + 101}{5} = 104 \text{ (m)}$$

Średnia z próby dla drugiego skoczka:

$$\bar{x}_{\mathrm{II}} = \frac{104{,}5 + 105 + 103 + 106{,}5 + 101}{5} = 104 \text{ (m)}$$

Okazało się, że obie średnie są identyczne. Mimo to trener wybrał do zawodów drugiego skoczka. Jaki mógł być powód tej decyzji?

Analizując tabelę długości skoków, zauważamy, że wyniki skoków drugiego skoczka mniej odbiegają od średniej niż wyniki pierwszego. Poniższa tabela przedstawia te różnice („rozrzut wyników”):

	$x_1 - \bar{x}$	$x_2 - \bar{x}$	$x_3 - \bar{x}$	$x_4 - \bar{x}$	$x_5 - \bar{x}$
Odchylenie wartości x_i od średniej $\bar{x}$	–1,5	2	–5,5	8	–3
Odchylenie wartości x_i od średniej $\bar{x}$	0,5	1	–1	2,5	–3

Wartości bezwzględne odchyleń od średniej u pierwszego skoczka są równe:

1,5 m 2 m 5,5 m 8 m 3 m

Ich suma wynosi 20 m. Zatem odchylenie przeciętne w 5 skokach jest równe 4 m.

U drugiego skoczka wartości bezwzględne odchyleń od średniej wynoszą:

0,5 m 1 m 1 m 2,5 m 3 m

To w sumie 8 m. Zatem odchylenie przeciętne w 5 skokach wynosi tylko 1,6 m.

Nietrudno zauważyć, że drugi skoczek ma formę bardziej stabilną, bowiem odchylenie przeciętne od średniej w jego przypadku jest mniejsze. To mogło być powodem decyzji trenera o wystawieniu do zawodów drugiego skoczka.

Bardziej interesuje nas, jak dalece różnią się poszczególne wyniki od średniej, bez rozróżniania, czy są mniejsze, czy większe od średniej. Aby to ocenić, oblicza się odchylenie standardowe, które pokazuje, o ile wartości mierzonej wielkości (cechy) różnią się od średniej.

Definicja 1.

Wariancją z próby nazywamy średnią arytmetyczną kwadratów różnic pomiędzy wynikami badanej cechy a ich średnią z próby. Wariancję oznaczamy symbolem σ^2.

Odchyleniem standardowym z próby nazywamy liczbę równą pierwiastkowi kwadratowemu z wariancji (z próby). Odchylenie standardowe oznaczamy symbolem σ.

Jeśli $x_1, x_2, ..., x_n$ są wartościami badanej cechy, a $\overline{x}$ jest średnią arytmetyczną wartości $x_1, x_2, ..., x_n$, to wariancję obliczamy według wzoru:

$$\sigma^2 = \frac{\left(x_1 - \overline{x}\right)^2 + \left(x_2 - \overline{x}\right)^2 + ... + \left(x_n - \overline{x}\right)^2}{n}$$

Odchylenie standardowe obliczamy natomiast według wzoru:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\left(x_1 - \overline{x}\right)^2 + \left(x_2 - \overline{x}\right)^2 + ... + \left(x_n - \overline{x}\right)^2}{n}}$$

Obliczymy odchylenie standardowe dla każdego ze skoczków z przykładu 1.

$$\sigma_{\mathrm{I}} = \sqrt{\frac{(-1{,}5)^2 + 2^2 + (-5{,}5)^2 + 8^2 + (-3)^2}{5}} = \sqrt{\frac{109{,}5}{5}} = \sqrt{21{,}9} \approx 4{,}7 \ \text{(m)}$$

$$\sigma_{\mathrm{II}} = \sqrt{\frac{(0{,}5)^2 + 1^2 + (-1)^2 + (2{,}5)^2 + (-3)^2}{5}} = \sqrt{\frac{17{,}5}{5}} = \sqrt{3{,}5} \approx 1{,}9 \ \text{(m)}$$

Wyniki pierwszego skoczka różnią się zatem od średniej (przeciętnie) o 4,7 m, zaś drugiego – o 1,9 m.

Przykład 2

Producent soku marchewkowego „Selekta" dostarcza codziennie do sklepu warzywniczego 80 półlitrowych butelek soku. Firma zapewniła sprzedawcę, że średnio w butelce znajduje się 0,5 l soku oraz że mniej niż 10% butelek dziennej dostawy zawiera ilość soku spoza przedziału $\left\langle \overline{x} - \sigma, \overline{x} + \sigma \right\rangle$. Właściciel sklepu poddał kontroli jedną z dziennych dostaw soku. Otrzymał następujące rezultaty:

Zawartość soku w butelce (l)	0,46	0,47	0,48	0,49	0,50	0,51	0,52
Liczba butelek	2	1	16	26	13	14	8

Sprawdzimy rzetelność firmy „Selekta".

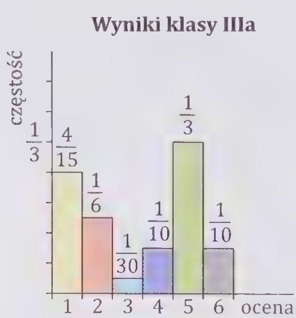
W tym celu obliczymy najpierw średnią pojemność soku w butelce $\overline{x}$ i odchylenie standardowe σ. Otrzymujemy:

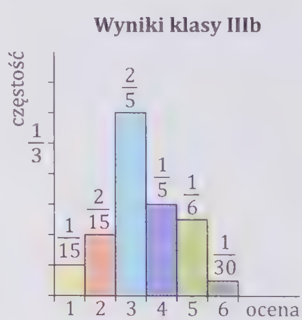
$\overline{x} \approx 0{,}495$ (l) i $\sigma \approx 0{,}014$ (l).

Firma zapewniła sprzedawcę, że mniej niż 10% butelek dziennej dostawy będzie miało pojemność soku spoza przedziału $\langle 0{,}48; 0{,}51\rangle$. Okazało się, że w badanej dostawie były 3 butelki o pojemności soku mniejszej niż 0,48 l oraz 8 butelek o pojemności soku większej niż 0,51 l, czyli ok. 14% dostawy. Sprzedawca nie rozwiązał umowy z dostawcą, bowiem tylko 3,75% butelek miało objętość soku zbyt małą. Firma „Selekta" jest rzetelnym dostawcą soków.

Przykład 3.

W dwóch klasach IIIa i IIIb, z których każda liczy 30 uczniów, przeprowadzono sprawdzian semestralny z matematyki. Wyniki tych sprawdzianów przedstawiają diagramy częstości względnych uzyskanych wyników.





Przeanalizujemy wyniki i spróbujemy scharakteryzować obie klasy.
Na diagramie częstości względnych odczytujemy modę ocen:

w klasie IIIa moda jest równa 5, w klasie IIIb natomiast 3.

Aby wykonać pozostałe obliczenia, przedstawimy wyniki obu sprawdzianów w tabeli liczebności.

Wyniki sprawdzianu
w klasie IIIa

Ocena	1	2	3	4	5	6
Liczebność	8	5	1	3	10	3

Wyniki sprawdzianu
w klasie IIIb

Ocena	1	2	3	4	5	6
Liczebność	2	4	12	6	5	1

	Klasa IIIa	Klasa IIIb
• Mediana	$M_e = 4$	$M_e = 3$
• Średnia ocen	$\overline{x}_a \approx 3{,}4$	$\overline{x}_b \approx 3{,}4$
• Odchylenie standardowe	dla klasy IIIa: $\sigma_a \approx 1{,}9$	dla klasy IIIb: $\sigma_b \approx 1{,}2$

Charakterystyka klas.
W klasie IIIa dominujące są dwie grupy uczniów: uczniowie bardzo słabi oraz bardzo dobrze uczący się. W klasie IIIb największą grupę stanowią uczniowie przeciętni. Mimo że średnie ocen ze sprawdzianów są identyczne, klasa IIIb jest klasą łatwiejszą w „prowadzeniu", ponieważ uczniowie reprezentują zbliżony poziom wiedzy i umiejętności. Odchylenie od średniej ocen jest mniejsze niż w IIIa. Prowadzenie zajęć w klasie IIIa na pewno sprawia nauczycielowi wiele problemów, ponieważ różnice między uczniami są ogromne (najliczniejszą grupę stanowią uczniowie, którzy otrzymali oceny bardzo dobre, ale następną grupę, niewiele mniejszą liczebnie, stanowią ci, którzy otrzymali oceny niedostateczne).

Sprawdź, czy rozumiesz

1. Podczas ferii zimowych Ania dokonywała pomiaru temperatury powietrza każdego dnia o godz. $8^{\underline{00}}$. Wyniki pomiarów przedstawia poniższa tabela.

Dzień pomiaru	1.II	2.II	3.II	4.II	5.II	6.II	7.II
Temperatura powietrza (°C)	–12	–10	–10	–10	–8	–12	–10

Dzień pomiaru	8.II	9.II	10.II	11.II	12.II	13.II	14.II
Temperatura powietrza (°C)	–8	–4	–4	–4	–3	–3	–3

Oblicz średnią temperaturę, odchylenie standardowe, modę oraz medianę.

2. W klasie IIIa liczącej 28 osób z ostatniego sprawdzianu z matematyki było 13 ocen dopuszczających, a pozostałe oceny to dostateczne i dobre. Średnia ocen ze sprawdzianu wyniosła 2,75. Oblicz:
   a) liczbę ocen dobrych i dostatecznych ze sprawdzianu;
   b) odchylenie standardowe od średniej ocen; wynik podaj z dokładnością do jednego miejsca po przecinku.

6. Geometria przestrzenna

Płaszczyzny i proste w przestrzeni

W rozdziale tym zajmiemy się figurami geometrycznymi umieszczonymi w przestrzeni trójwymiarowej. Podobnie jak w przypadku geometrii na płaszczyźnie – punktem wyjścia do rozważań w geometrii przestrzennej są aksjomaty. Określają one własności tzw. pojęć pierwotnych (punktów, prostych, płaszczyzn). Oto przykłady aksjomatów:

A1. W przestrzeni istnieje co najmniej jedna płaszczyzna. Dla każdej płaszczyzny istnieje co najmniej jeden punkt, który do niej nie należy.
A2. Przez trzy punkty nieleżące na jednej prostej przechodzi tylko jedna płaszczyzna.
A3. Każda płaszczyzna ma wszystkie własności przyjęte w geometrii płaskiej.
A4. Jeśli dwie różne płaszczyzny mają punkt wspólny, to mają wspólną prostą.
A5. Jeśli dwa różne punkty prostej leżą na płaszczyźnie, to cała prosta leży na płaszczyźnie.

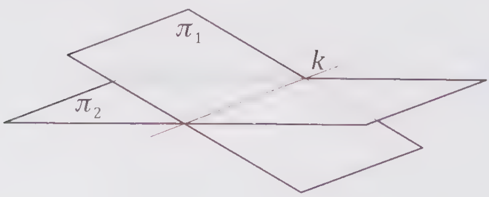
Płaszczyzny będziemy oznaczać tak: π, π_1, π_2, ... Jeśli punkty A, B, C nie będą leżeć na jednej prostej, to zapis: płaszczyzna (ABC) będzie oznaczać płaszczyznę przechodzącą przez punkty A, B, C; czasami też, zamiast pisać na przykład: „płaszczyzna, w której zawiera się kwadrat $ABCD$", będziemy stosować krótszy zapis: „płaszczyzna $(ABCD)$".

Omówimy teraz wzajemne położenie dwóch różnych płaszczyzn w przestrzeni:

a) płaszczyzny nie mają punktów wspólnych;

$\pi_1 \cap \pi_2 = \varnothing$

b) płaszczyzny mają punkt wspólny, a zatem (zgodnie z aksjomatem A4) mają wspólną prostą.



$\pi_1 \cap \pi_2 = k$

Dwie płaszczyzny, których częścią wspólną jest prosta, nazywamy **płaszczyznami przecinającymi się**, a wspólną prostą – **krawędzią przecięcia**.

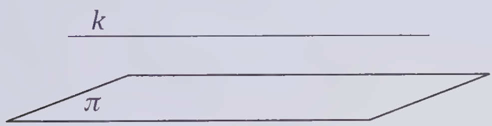
Inne położenie dwóch różnych płaszczyzn nie jest możliwe. Gdyby dwie płaszczyzny miały, oprócz wspólnej prostej, jeszcze jeden punkt wspólny (nieleżący na tej prostej), to znaczy, że miałyby w szczególności trzy niewspółliniowe punkty wspólne, więc – zgodnie z aksjomatem A2 – pokrywałyby się.

Definicja 1.

Płaszczyznami równoległymi nazywamy dwie płaszczyzny, których częścią wspólną jest zbiór pusty lub cała płaszczyzna.

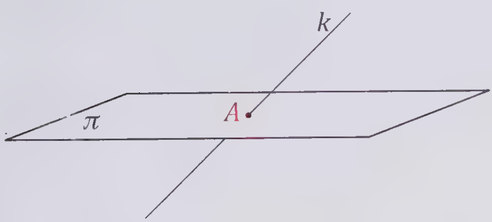
Prosta i płaszczyzna (w przestrzeni) mogą znajdować się względem siebie w jednym z następujących położeń:

a) prosta nie ma punktów wspólnych z płaszczyzną;



$\pi \cap k = \varnothing$

b) prosta ma tylko jeden punkt wspólny z płaszczyzną; o takiej prostej powiemy, że przebija płaszczyznę;

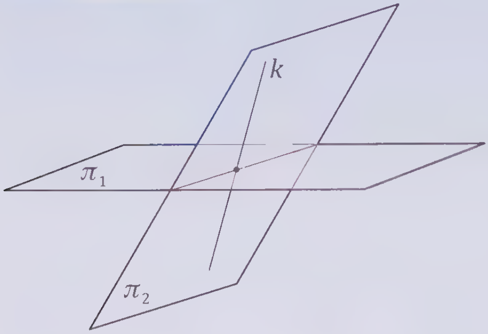


$\pi \cap k = \{A\}$

c) prosta ma dwa punkty, a zatem (zgodnie z aksjomatem A5) wszystkie punkty wspólne z płaszczyzną; o takiej prostej mówimy, że leży na płaszczyźnie.

$k \subset \pi$

Przykład 1.



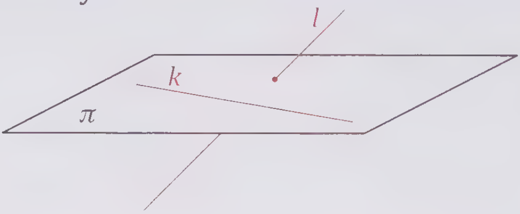
Jeśli prosta k przebija płaszczyznę π_1, to punkt przebicia leży na krawędzi przecięcia płaszczyzny π_1 i dowolnej płaszczyzny π_2 zawierającej prostą k.

Definicja 2.

Prosta jest **równoległa do płaszczyzny** π, jeśli nie ma punktów wspólnych z płaszczyzną π lub leży na płaszczyźnie π.

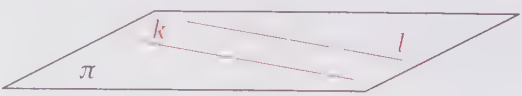
Omówimy teraz położenie dwóch prostych w przestrzeni.

a) Nie istnieje płaszczyzna zawierająca dwie dane proste, wówczas te proste nazywamy **prostymi skośnymi**.

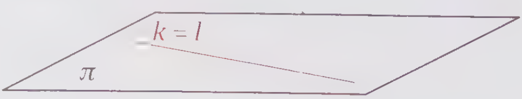


b) Istnieje płaszczyzna zawierająca dwie dane proste, wówczas:
- proste przecinają się, czyli mają tylko jeden punkt wspólny

- proste są równoległe i nie mają punktów wspólnych

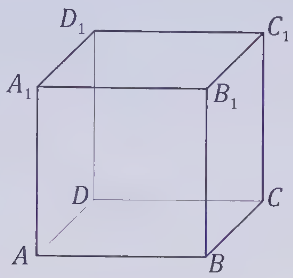


- proste są równoległe i się pokrywają.



Przykład 2.

Rozważmy proste wyznaczone przez wierzchołki sześcianu przedstawionego na rysunku poniżej.



Wybrane proste skośne	Wybrane proste równoległe	Wybrane proste przecinające się
pr. AD i pr. BB_1	pr. AA_1 i pr. CC_1	pr. DC i pr. BC
pr. AD_1 i pr. CC_1	pr. AB_1 i pr. DC_1	pr. AC i pr. BD
pr. DB_1 i pr. AA_1	pr. BD i pr. B_1D_1	pr. AC_1 i pr. A_1C

Twierdzenie 1.

Jeśli proste k i l są do siebie równoległe, to prosta k jest równoległa do każdej płaszczyzny zawierającej l.

Założenie:

dane są proste k, l i płaszczyzna π

$k \parallel l$

$l \subset \pi$

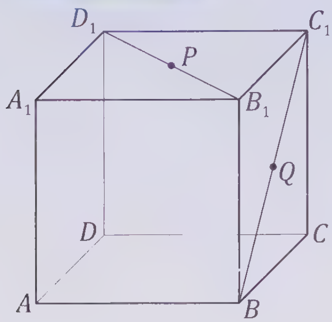
Teza:

$k \parallel \pi$

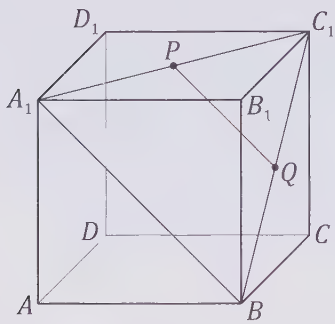
Dowód:

Załóżmy, że prosta k nie leży w płaszczyźnie π (w przeciwnym wypadku teza jest oczywista). Wówczas wystarczy pokazać, że $k \cap \pi = \varnothing$. Rozważmy płaszczyznę π_1 wyznaczoną przez proste k i l. Ta płaszczyzna przecina płaszczyznę π. Krawędzią przecięcia jest prosta l. Gdyby prosta k przecinała płaszczyznę π, to punkt przecięcia leżałby na krawędzi l (ponieważ $k \subset \pi_1$ i $\pi_1 \cap \pi = l$). Ale to jest niemożliwe, bo z założenia $k \parallel l$. Zatem $k \cap \pi = \varnothing$, co znaczy, że prosta k jest równoległa do płaszczyzny π.

Przykład 3.



Dany jest sześcian jak na rysunku obok. Punkty P, Q są środkami odcinków B_1D_1 i BC_1. Wykażemy, że prosta PQ jest równoległa do płaszczyzny (ABB_1A_1).



Rozważmy trójkąt wyznaczony przez punkty A_1, B, C_1. Wówczas punkt P jest środkiem odcinka A_1C_1 (dlaczego?).

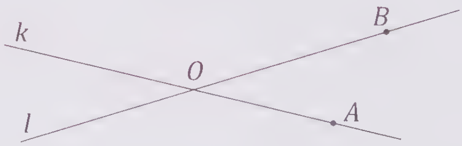
Punkt Q jest środkiem odcinka BC_1 (z założenia). Zatem – z twierdzenia o odcinku łączącym środki boków trójkąta – otrzymujemy, że $PQ \parallel A_1B$. To znaczy, że

$$\text{pr. } PQ \parallel \text{pr. } A_1B.$$

Prosta A_1B leży na płaszczyźnie (ABB_1A_1), zatem na mocy ostatniego twierdzenia prosta PQ jest równoległa do płaszczyzny (ABB_1A_1).

Twierdzenie 2.
Dwie przecinające się proste wyznaczają tylko jedną płaszczyznę.

Założenie:



dane są proste k, l, które przecinają się w punkcie O; niech ponadto punkt A będzie dowolnym punktem prostej k (różnym od punktu O), punkt B – dowolnym punktem prostej l (różnym od punktu O)

Teza:

proste k, l wyznaczają tylko jedną płaszczyznę

Dowód:
Z założenia wynika, że punkty A, O, B nie leżą na jednej prostej, zatem – zgodnie z aksjomatem A2 – przechodzi przez nie płaszczyzna. Oznaczmy ją przez π. Punkty A, O leżą na płaszczyźnie π, więc – zgodnie z aksjomatem A5 – prosta k leży na płaszczyźnie π. Podobnie można stwierdzić, że prosta l leży na płaszczyźnie π. Płaszczyzna π jest jedyną płaszczyzną, w której leżą proste k, l. Gdyby bowiem inna płaszczyzna π_1 też zawierała proste k, l, to – w szczególności – punkty A, O, B należałyby do płaszczyzny π_1. Ale punkty A, O, B wyznaczają tylko jedną płaszczyznę, więc płaszczyzna π_1 pokrywa się z płaszczyzną π.

Postępując podobnie, można udowodnić kolejne twierdzenie.

Twierdzenie 3.
Prosta i punkt nieleżący na tej prostej wyznaczają tylko jedną płaszczyznę.

Twierdzenie 3. i aksjomat Euklidesa (który poznałeś w klasie pierwszej) można wykorzystać w dowodzie kolejnego twierdzenia.

Twierdzenie 4.
Przez dowolny punkt przestrzeni można poprowadzić tylko jedną prostą równoległą do danej prostej.

Twierdzenie 5.
Jeśli w przestrzeni dane są trzy proste i dwie z tych prostych są równoległe do trzeciej prostej, to są również do siebie równoległe.

Może się wydawać, że ostatnie twierdzenie jest oczywiste. Przecież taką samą własność miały trzy proste leżące na płaszczyźnie! Jednak własności, które były prawdziwe na płaszczyźnie, nie przenoszą się „automatycznie" na własności w przestrzeni. Oto przykład: dla trzech prostych k, l, m leżących na płaszczyźnie jest prawdziwe następujące stwierdzenie:

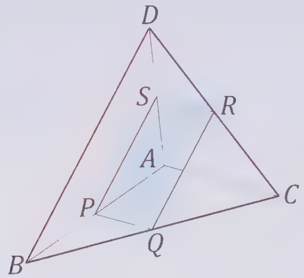
Jeśli proste k, l są prostopadłe do prostej m, to proste k, l są równoległe.

Dla prostych k, l, m położonych w przestrzeni powyższe stwierdzenie jest fałszywe. Otóż, jeśli proste k, l, m są położone w przestrzeni i proste k, l są prostopadłe do prostej m, to proste k, l mogą:
a) przecinać się (pod dowolnym kątem)
b) być równoległe
c) być skośne.

Kolejny przykład pokaże zastosowanie twierdzenia 5.

Przykład 4.

Punkty A, B, C, D nie leżą w jednej płaszczyźnie. Ponadto punkty P, Q, R, S są odpowiednio środkami odcinków AB, BC, CD i AD (patrz rysunek poniżej). Wykażemy, że czworokąt $PQRS$ jest równoległobokiem.



Przypomnijmy: aby stwierdzić, że czworokąt $PQRS$ jest równoległobokiem, wystarczy pokazać na przykład, że para przeciwległych boków w tym czworokącie jest do siebie równoległa i że boki z tej pary mają jednakową długość.

Rozważmy trójkąt ABD. Na mocy twierdzenia o odcinku łączącym środki boków trójkąta otrzymujemy:

$SP \parallel DB$ oraz

$$|SP| = \frac{1}{2}|DB|$$

W trójkącie BCD na mocy tego samego twierdzenia otrzymujemy, że:

$RQ \parallel DB$ oraz

$$|RQ| = \frac{1}{2}|DB|$$

Mamy więc:

$SP \parallel DB$ oraz

$RQ \parallel DB$

(Zauważ, że odcinki SP, RQ i DB nie leżą w jednej płaszczyźnie).
Z twierdzenia 5. wynika, że:

$SP \parallel RQ$

Dodatkowo otrzymaliśmy:

$$|SP| = \frac{1}{2}|DB| = |RQ|$$

Tak więc przeciwległe boki SP i RQ rozważanego czworokąta są równoległe i mają jednakową długość, więc czworokąt $PQRS$ jest równoległobokiem.

Kolejne twierdzenie ułatwi kreślenie przekrojów niektórych brył.

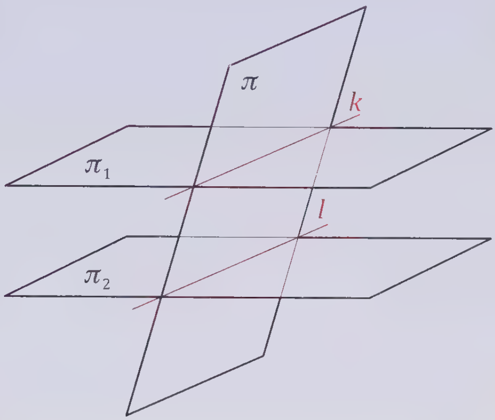
Twierdzenie 6.
Jeśli dwie równoległe płaszczyzny przecina trzecia płaszczyzna, to otrzymane krawędzie przecięcia są równoległe.

Założenie:

$\pi_1 \parallel \pi_2$

$\pi_1 \cap \pi = k$

$\pi_2 \cap \pi = l$



Teza:

$k \parallel l$

Dowód:
Proste k, l nie mogą być skośne, ponieważ leżą w płaszczyźnie π. Jeśli proste k, l przecinałyby się, to z tego by wynikało, że płaszczyzny π_1 i π_2 też by się przecinały, co wobec założenia $\pi_1 \parallel \pi_2$ jest niemożliwe. Skoro proste k, l nie przecinają się i nie są skośne, więc znaczy to, że są równoległe.

Sprawdź, czy rozumiesz

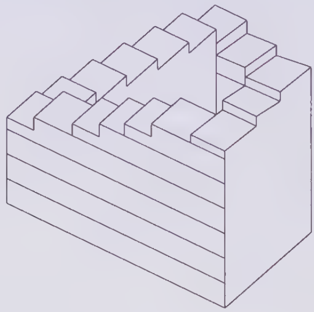
1. Ile różnych płaszczyzn wyznaczają:
a) trzy różne proste przecinające się w jednym punkcie
b) trzy różne proste parami równoległe
c) trzy punkty niewspółliniowe
d) cztery różne punkty niewspółpłaszczyznowe?

2. Punkty K, L, M, N nie leżą w jednej płaszczyźnie. Wykaż, że punkt N nie należy do prostej KL.

3. Niech ściany, sufit i podłoga w klasie wyznaczają płaszczyzny w przestrzeni.
a) Wskaż płaszczyzny parami równoległe oraz płaszczyzny przecinające się.
b) Wskaż proste, które są krawędziami przecięcia płaszczyzn przecinających się, a następnie wybierz pary prostych przecinających się, pary prostych równoległych i pary prostych skośnych.

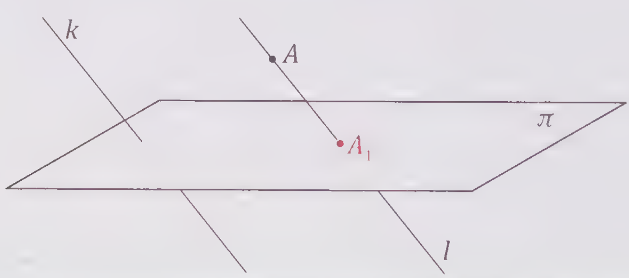
Rzut równoległy na płaszczyznę. Rysowanie figur płaskich w rzucie równoległym na płaszczyznę

Bardzo ważna jest umiejętność rysowania na kartce brył i figur w taki sposób, w jaki je widzimy, gdy patrzymy na nie pod pewnym kątem. Takie rysunki bardzo ułatwiają rozwiązywanie zadań. Ale rysunki mogą też wprowadzać w błąd! Oto przykład:



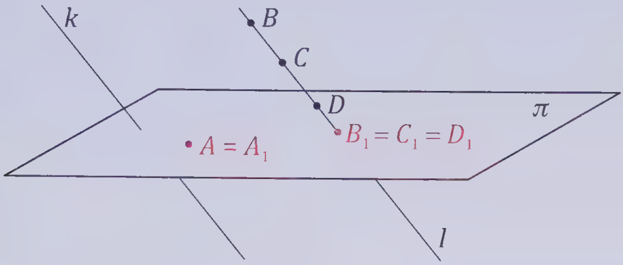
Znajomość rzutu równoległego na płaszczyznę umożliwi ci poprawne rysowanie figur przestrzennych na płaszczyźnie.

Definicja 1.
Niech dana będzie w przestrzeni płaszczyzna π, zwana rzutnią, i prosta k, która przebija rzutnię. Kierunek prostej k nazywamy kierunkiem rzutu. Jeśli przez dowolny punkt A przestrzeni poprowadzimy prostą l równoległą do prostej k, to przebija ona rzutnię w punkcie A_1. Punkt A_1 nazywamy **rzutem równoległym** punktu A na płaszczyznę π w kierunku prostej k.



Rzut równoległy na płaszczyznę jest przykładem przekształcenia odwzorowującego zbiór punktów przestrzeni w zbiór punktów płaszczyzny.

Jeśli punkt A leży na rzutni, to jego rzut równoległy pokrywa się z punktem A. Wszystkie punkty rzutni są więc punktami stałymi rzutu równoległego.

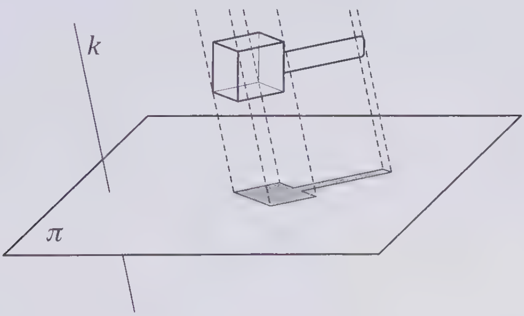


Zauważ, że każdy punkt rzutni jest obrazem nieskończenie wielu punktów. (Jak są położone względem siebie te punkty, których obrazem jest ten sam punkt na rzutni?). Z tej obserwacji wynika pierwsza własność rzutu równoległego na płaszczyznę.

Twierdzenie 1.

Rzut równoległy na płaszczyznę nie zachowuje odległości punktów (inaczej mówiąc: rzut równoległy na płaszczyznę nie jest izometrią).

Znaleźć rzut równoległy figury F na płaszczyznę, to znaczy znaleźć rzuty równoległe wszystkich punktów figury F.



O obrazie figury w rzucie równoległym na płaszczyznę można myśleć jak o cieniu, który tworzy przedmiot w słoneczny dzień. Można bowiem założyć, że promienie słoneczne docierające do Ziemi są równoległe. Wyznaczają one „kierunek rzutowania”. Płaska powierzchnia (np. boisko, chodnik, podłoga w mieszkaniu) jest „rzutnią”, a cień – „rzutem równoległym” danego przedmiotu.

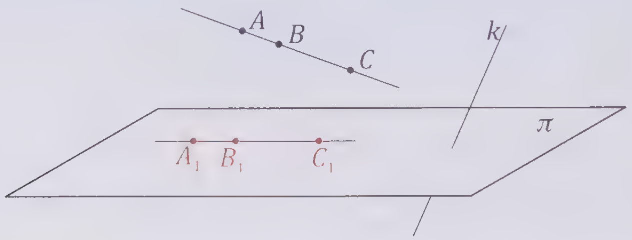
Twierdzenie 2.

Rzut równoległy na płaszczyznę odcinka równoległego do rzutni jest odcinkiem równoległym do danego i mającym taką samą długość jak odcinek dany.

Twierdzenie 3.
Rzut równoległy na płaszczyznę zachowuje uporządkowanie punktów leżących na prostej nierównoległej do kierunku rzutu.

Wyjaśnimy, jak należy rozumieć powyższe sformułowanie.

Jeśli dane są punkty A, B, C leżące na prostej nierównoległej do kierunku rzutu i punkt B leży między punktami A i C, to rzuty równoległe A_1, B_1, C_1 są współliniowe i punkt B_1 leży między punktami A_1 i C_1.



Jeśli zastosujemy teraz wniosek z twierdzenia Talesa do prostych AC i A_1C_1 przeciętych prostymi równoległymi A_1A, B_1B, C_1C, to otrzymamy zależność:

$$\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{|A_1B_1|}{|B_1C_1|}$$

Oto kolejne twierdzenie:

Twierdzenie 4.
W rzucie równoległym na płaszczyznę stosunek długości odcinków leżących na prostej nierównoległej do kierunku rzutu jest równy stosunkowi długości ich rzutów.

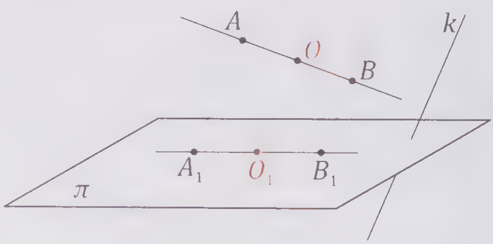
Załóżmy teraz, że punkt O jest środkiem odcinka AB nierównoległego do kierunku rzutu.

Z ostatniego twierdzenia wynika, że

$$\frac{|AO|}{|OB|} = \frac{|A_1O_1|}{|O_1B_1|}, \text{ ale } |AO| = |OB|, \text{ więc}$$

$$1 = \frac{|A_1O_1|}{|O_1B_1|}, \text{ skąd}$$

$$|O_1B_1| = |A_1O_1|.$$



Zatem punkt O_1 jest środkiem odcinka A_1B_1. Otrzymaliśmy wniosek.

Wniosek 1.: Rzutem równoległym środka odcinka (nierównoległego do kierunku rzutu) jest środek odcinka będącego rzutem.

Twierdzenie 4. można uogólnić.

Twierdzenie 5.

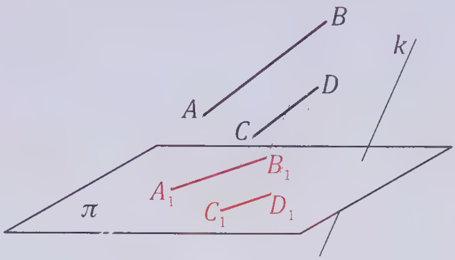
Rzuty równoległe na płaszczyznę odcinków równoległych (ale nierównoległych do kierunku rzutowania) są odcinkami równoległymi i stosunek długości tych odcinków jest równy stosunkowi długości ich rzutów.

Założenie:

punkty A_1, B_1, C_1, D_1 są odpowiednio rzutami równoległymi punktów A, B, C, D na płaszczyznę π w kierunku prostej k, $AB \parallel CD$, $AB \nparallel k$

Teza:

$$A_1B_1 \parallel C_1D_1, \ \frac{|AB|}{|CD|} = \frac{|A_1B_1|}{|C_1D_1|}$$

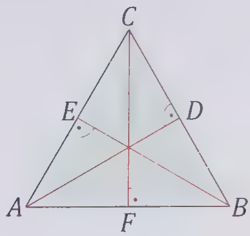


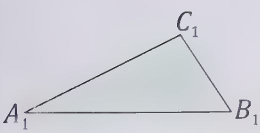
W praktyce często stosuje się szczególny przypadek poprzedniego twierdzenia.

Wniosek 2.: Rzuty równoległe na płaszczyznę odcinków równoległych mających taką samą długość (ale nierównoległych do kierunku rzutowania) są odcinkami równoległymi mającymi taką samą długość.

Przykład 1.

Narysujemy rzut równoległy na płaszczyznę trójkąta równobocznego ABC wraz z zaznaczonymi w nim wysokościami, przy założeniu, że bok AB jest równoległy do rzutni, a płaszczyzna (ABC) nie jest równoległa do kierunku rzutowania.

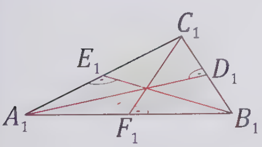




Rzutem odcinka AB jest taki odcinek A_1B_1, że

$|A_1B_1| = |AB|$ (twierdzenie 2.).

Rzut punktu C, czyli punkt C_1, możemy wybrać dowolnie, gdyż kierunek rzutowania można tak dobrać, aby dany punkt płaszczyzny był rzutem punktu C.

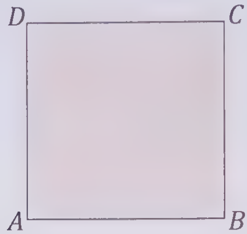


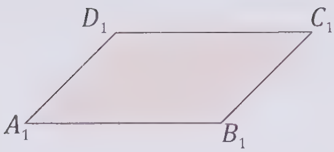
Zanim wyznaczymy rzuty punktów D, E, F, zauważmy, że są one środkami odcinków odpowiednio BC, CA, AB (w trójkącie równobocznym wysokości pokrywają się ze środkowymi). Zatem punkty D_1, E_1, F_1 – zgodnie z wnioskiem 1. – są środkami odcinków odpowiednio B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1.

Rzutem równoległym trójkąta równobocznego jest trójkąt.

Przykład 2.

Narysujemy rzut równoległy na płaszczyznę kwadratu $ABCD$, przyjmując założenie, że bok AB jest równoległy do rzutni, a płaszczyzna $(ABCD)$ nie jest równoległa do kierunku rzutowania.



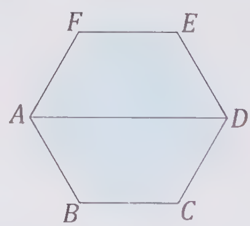


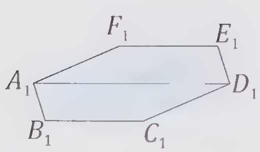
Rysujemy najpierw rzut odcinka AB, czyli odcinek A_1B_1, pamiętając, że $|A_1B_1| = |AB|$.
Punkt C_1 wybieramy dowolnie. Odcinki AB i CD są równoległe (do siebie i do rzutni) i mają taką samą długość, więc rzuty równoległe tych odcinków też są równoległe i mają taką samą długość (wniosek 2.): $|A_1B_1| = |C_1D_1|$ i $C_1D_1 \parallel A_1B_1$.

Rzutem równoległym kwadratu jest równoległobok.

Przykład 3.

Narysujemy rzut równoległy sześciokąta foremnego $ABCDEF$ przy założeniu, że przekątna AD jest równoległa do rzutni (i płaszczyzna (ABC) nie jest równoległa do kierunku rzutowania).





Zaczynamy od narysowania odcinka A_1D_1, pamiętając, że

$$|A_1D_1| = |AD|$$

Odcinek BC jest równoległy do odcinka AD, a więc i do rzutni.
Zatem $|B_1C_1| = |BC|$, $B_1C_1 \parallel A_1D_1$ i $2|B_1C_1| = |A_1D_1|$.
Ponieważ $AB \parallel ED$ i $|AB| = |ED|$, stąd

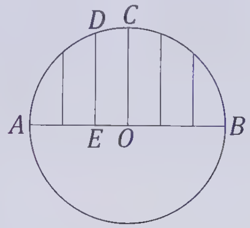
$$A_1B_1 \parallel E_1D_1 \text{ i } |A_1B_1| = |E_1D_1| \quad \text{(wniosek 2.)}$$

Łatwo więc wyznaczyć rzut punktu E. Na koniec znajdujemy rzut punktu F, wykorzystując to, że $FE \parallel AD$.

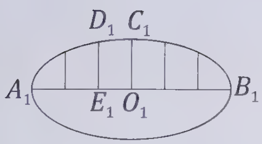
UWAGA: Rzut równoległy sześciokąta $ABCDEF$ najwygodniej jest rysować tak, aby odcinek B_1F_1 nie był prostopadły do odcinka A_1D_1.
Rzutem równoległym sześciokąta foremnego jest sześciokąt, którego przeciwległe boki są równe i równoległe.

Przykład 4.

Narysujemy rzut równoległy okręgu $o(O, r)$ przy założeniu, że płaszczyzna zawierająca okrąg nie jest równoległa do kierunku rzutowania.



a)

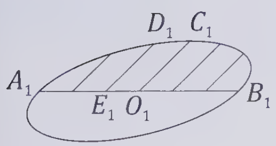


Załóżmy, że średnica AB jest równoległa do rzutni. Rysujemy więc odcinek A_1B_1, pamiętając, że

$$|A_1B_1| = |AB|.$$

Niech C będzie takim punktem, dla którego $|OC| = r$. Rzutem punktu C niech będzie punkt C_1 i na przykład $|O_1C_1| = \frac{1}{2}|OC|$.

b)



Aby znaleźć rzut dowolnego punktu D okręgu, kreślimy odcinek DE równoległy do odcinka CO (punkt E należy do średnicy AB). Mamy $|A_1E_1| = |AE|$ oraz $D_1E_1 \parallel C_1O_1$ i $|D_1E_1| = \frac{1}{2}|DE|$ (twierdzenie 5.). W podobny sposób znajdujemy możliwie dużo rzutów punktów okręgu.

Otrzymane punkty łączymy linią, którą nazywamy elipsą.

Sprawdź, czy rozumiesz

1. Naszkicuj rzut równoległy w kierunku pewnej prostej k następujących figur: kwadratu, prostokąta i równoległoboku – w przypadku, gdy dwa boki każdego z tych czworokątów są równoległe do rzutni, a pozostałe dwa nie są równoległe do rzutni. Co zauważyłeś?
2. Naszkicuj figurę F, będącą rzutem równoległym rombu $ABCD$, jeśli rzutnia jest równoległa do boku AB i nie jest równoległa do boku BC. Następnie zaznacz w rombie $ABCD$ wysokość przechodzącą przez środek symetrii rombu i prostopadłą do boku AB oraz naszkicuj rzut tej wysokości zawarty w figurze F. Czy rzut wysokości dzieli boki figury F na połowy? Odpowiedź uzasadnij.

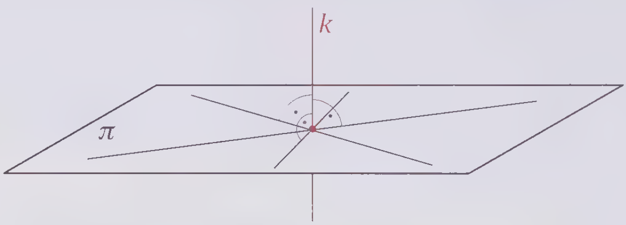
Prostopadłość prostych i płaszczyzn w przestrzeni. Rzut prostokątny na płaszczyznę

Dwie proste przecinające się nazywaliśmy prostymi prostopadłymi wtedy, gdy przecinały się pod kątem prostym.

Omówimy teraz prostopadłość prostej i płaszczyzny.

Definicja 1.

Prosta i płaszczyzna są prostopadłe wtedy, gdy prosta jest prostopadła do każdej prostej leżącej na płaszczyźnie i przecinającej daną prostą.



Jeśli prosta k i płaszczyzna π są prostopadłe, to symbolicznie zapisujemy to tak:

$k \perp \pi$

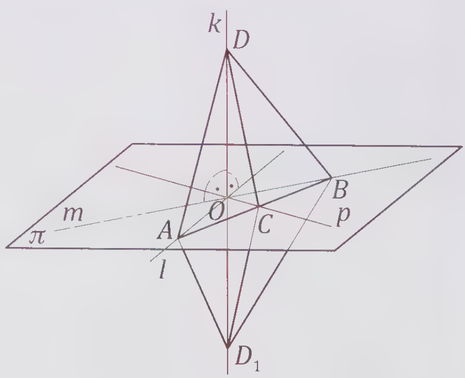
Sprawdzenie, czy prosta jest prostopadła do płaszczyzny, ułatwia następujące twierdzenie.

Twierdzenie 1.

Jeśli prosta jest prostopadła do dwóch prostych leżących na płaszczyźnie i przebija płaszczyznę w punkcie ich przecięcia, to jest prostopadła do tej płaszczyzny.

Założenie: Dana jest płaszczyzna π
i proste k, m, l, p
$m, l, p \subset \pi$
$k \perp l$
$k \perp m$
$k \cap l \cap m \cap p = \{O\}$

Teza: $k \perp p$



Dowód: Na prostych l, m wybieramy odpowiednio punkty A, B w taki sposób, aby odcinek AB przeciął prostą p. Punkt przecięcia oznaczmy literą C. Na prostej k wybieramy punkty D, D_1 po przeciwnych stronach punktu O tak, aby

$$|DO| = |OD_1|$$

Pokażemy, że trójkąt DD_1C jest równoramienny. Zauważmy, że

$$\Delta AOD \equiv \Delta AOD_1$$

(cecha przystawania trójkątów bkb), ponieważ

AO – wspólny bok

$|DO| = |OD_1|$ – z wyboru punktów D, D_1

$|\sphericalangle AOD| = |\sphericalangle AOD_1| = 90°$ – z założenia, że $k \perp l$

Stąd otrzymujemy, że

$$|AD| = |AD_1|$$

Podobnie można wykazać, że

$\Delta DOB \equiv \Delta D_1OB$, zatem $|BD| = |BD_1|$

Mamy również $\Delta ABD \equiv \Delta ABD_1$ (cecha przystawania trójkątów bbb), ponieważ

AB – wspólny bok

$|AD| = |AD_1|$

$|BD| = |BD_1|$

Z tego wynika, że

$$|\sphericalangle DAC| = |\sphericalangle CAD_1|,$$

a stąd otrzymujemy, że

$\Delta DAC \equiv \Delta D_1AC$ (cecha przystawania trójkątów bkb)

Z przystawania ostatnich dwóch trójkątów wynika, że

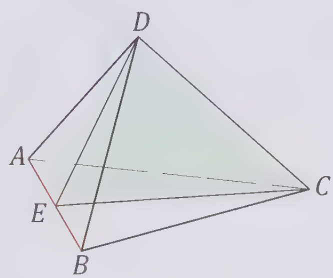
$$|DC| = |DC_1|,$$

a więc trójkąt DD_1C jest równoramienny. Odcinek OC jest środkową poprowadzoną na podstawę DD_1. W trójkącie równoramiennym taka środkowa jest równocześnie wysokością, więc odcinek OC jest prostopadły do prostej k, a zatem

$p \perp k$, co kończy dowód.

Przykład 1.

Punkty A, B, C, D nie leżą w jednej płaszczyźnie. Ponadto wiadomo, że $|CA| = |CB|$ i $|DA| = |DB|$. Punkt E jest środkiem boku AB (patrz rysunek obok). Pokażemy, że prosta AB jest prostopadła do płaszczyzny (CDE).



Odcinek CE jest wysokością w trójkącie ABC (dlaczego?), zatem

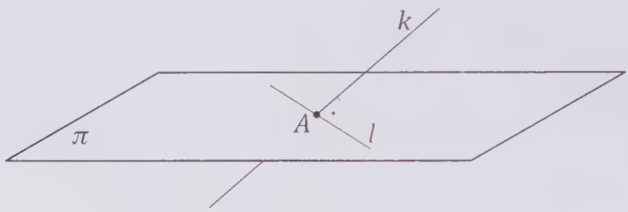
$AB \perp CE$

Podobnie odcinek DE jest wysokością w trójkącie ABD, więc

$AB \perp ED$

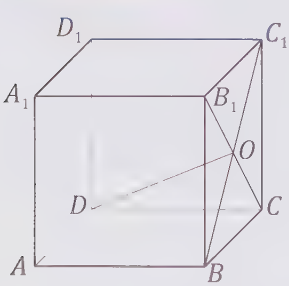
Prosta AB jest prostopadła do dwóch prostych leżących w płaszczyźnie (CDE), więc – na mocy twierdzenia 1. – jest prostopadła do płaszczyzny (CDE).

Zauważ, że do tego, by prosta k była prostopadła do płaszczyzny π, nie wystarcza, żeby była ona prostopadła do jednej prostej zawartej w tej płaszczyźnie. Bo jeśli prosta k przebija płaszczyznę π w punkcie A i prosta k nie jest prostopadła do płaszczyzny π, to na płaszczyźnie π zawsze leży prosta l przechodząca przez punkt A i prostopadła do prostej k.

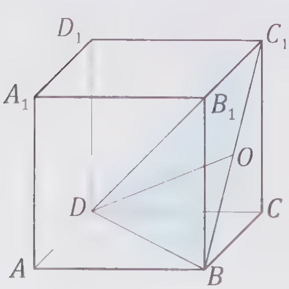


Prostą l można opisać jako krawędź przecięcia płaszczyzny π i płaszczyzny π_1, która jest prostopadła do prostej k i do której należy punkt A.

Przykład 2.



Dany jest sześcian, jak na rysunku obok. Punkt O jest punktem przecięcia przekątnych kwadratu BCC_1B_1. Pokażemy, że odcinek DO jest prostopadły do odcinka BC_1 i nie jest prostopadły do odcinka B_1C.

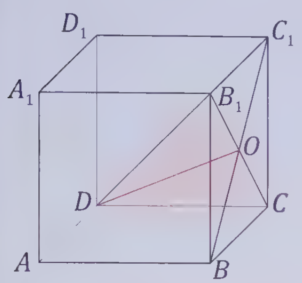


Rozważmy trójkąt BC_1D. Trójkąt ten jest równoramienny.

$|DB| = |DC_1|$

Odcinek DO jest w tym trójkącie środkową poprowadzoną na podstawę BC_1, zatem jest też wysokością, więc

$DO \perp BC_1$



Rozpatrzmy teraz trójkąt B_1CD. W tym trójkącie odcinek DO jest środkową poprowadzoną do boku B_1C. Gdyby odcinek DO był prostopadły do odcinka B_1C, toby znaczyło, że trójkąt DCB_1 jest równoramienny (odcinek DC miałby taką samą długość jak DB_1). Ale tak nie jest, ponieważ

$$|DB_1| > |DC|$$

(przekątna sześcianu jest dłuższa od jego krawędzi), a więc odcinek DO nie jest prostopadły do odcinka B_1C.

Z powyższych rozważań wynika w szczególności, że prosta DO nie jest prostopadła do płaszczyzny (BCC_1B_1).

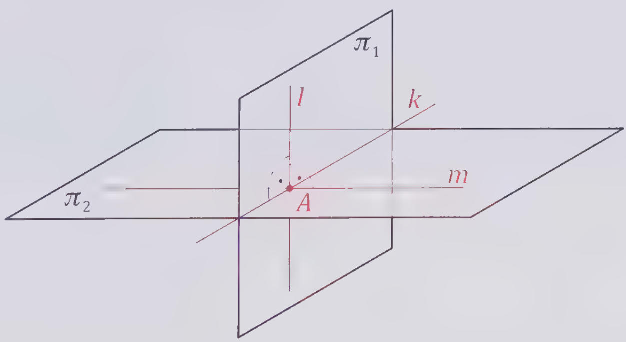
Twierdzenie 2.

Jeśli dwie proste są prostopadłe do tej samej płaszczyzny, to są równoległe.

Określimy teraz prostopadłość płaszczyzn.

Definicja 2.

Płaszczyzna π_1 jest prostopadła do płaszczyzny π_2 wtedy, gdy w płaszczyźnie π_1 jest zawarta prosta prostopadła do płaszczyzny π_2.



Prosta l – na rysunku powyżej – leżąca w płaszczyźnie π_1 jest prostopadła do prostych k, m leżących w płaszczyźnie π_2. To znaczy, że prosta l jest prostopadła do płaszczyzny π_2, więc również płaszczyzna π_1 jest prostopadła do płaszczyzny π_2.

Jeśli płaszczyzna π_1 jest prostopadła do płaszczyzny π_2, to stosujemy symboliczny zapis:

$$\pi_1 \perp \pi_2$$

Zauważ, że jeśli płaszczyzna π_1 jest prostopadła do płaszczyzny π_2 $(\pi_1 \perp \pi_2)$, to również płaszczyzna π_2 jest prostopadła do płaszczyzny π_1 $(\pi_2 \perp \pi_1)$.

W przykładzie 1. płaszczyzna (ABC) jest prostopadła do płaszczyzny (CDE).

Znajomość pojęcia prostej prostopadłej do płaszczyzny umożliwia nam określenie rzutu prostokątnego na płaszczyznę.

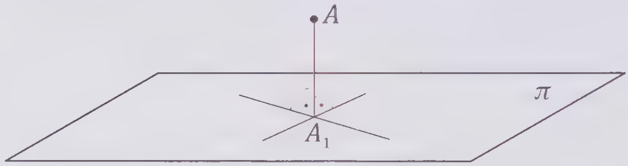
Definicja 3.

Rzutem prostokątnym na płaszczyznę nazywamy rzut równoległy (na płaszczyznę), którego kierunek jest wyznaczony przez prostą prostopadłą do rzutni.

Posługując się tym terminem, możemy w prosty sposób zdefiniować odległość punktu od płaszczyzny.

Definicja 4.

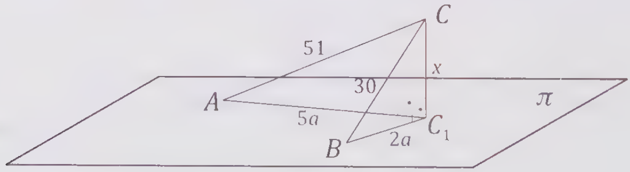
Odległością punktu A od płaszczyzny π nazywamy długość odcinka AA_1, gdzie A_1 jest rzutem prostokątnym punktu A na płaszczyznę π. Odległość tę oznaczamy $d(A, \pi)$.



Przykład 3.

Odległość punktu C, leżącego poza płaszczyzną π, od dwóch punktów A i B, leżących na płaszczyźnie π, jest równa odpowiednio 51 i 30. Wyznaczymy odległość punktu C od płaszczyzny π, jeśli stosunek długości rzutów prostokątnych odcinków AC i BC na płaszczyznę π jest równy 5 : 2.

Niech rysunek poniżej przedstawia sytuację opisaną w zadaniu.



Mamy dane: $|AC| = 51$, $|BC| = 30$. Niech C_1 będzie rzutem prostokątnym punktu C na płaszczyznę π. Szukamy długości odcinka CC_1; oznaczmy ją x, $x > 0$.

Jeśli $|AC_1| : |BC_1| = 5 : 2$, to znaczy, że istnieje taka liczba a, $a > 0$, że

$$|AC_1| = 5a \ \text{ i } \ |BC_1| = 2a$$

Prosta CC_1 jest prostopadła do płaszczyzny π, więc jest prostopadła do każdej prostej zawartej w płaszczyźnie π, przechodzącej przez punkt C_1. W szczególności:

$AC_1 \perp CC_1$ i $BC_1 \perp CC_1$

Zatem trójkąty AC_1C i BC_1C są prostokątne.
Stosujemy do nich twierdzenie Pitagorasa i otrzymujemy układ równań:

$$\begin{cases} x^2 + 25a^2 = 51^2 \\ x^2 + 4a^2 = 30^2 \end{cases}$$

$$21a^2 = 51^2 - 30^2$$

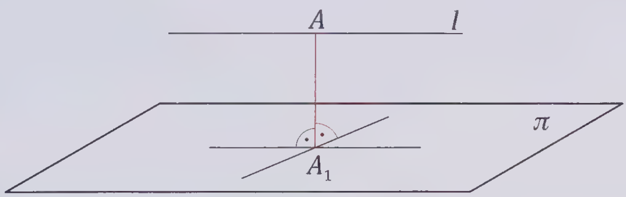
Zatem

$$\begin{cases} 21a^2 = 21 \cdot 81 \quad / : 21 \\ x^2 = 900 - 4a^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} a^2 = 81 \\ x^2 = 576 \end{cases} \qquad \begin{cases} a = 9, \text{ bo } a > 0 \\ x = 24, \text{ bo } x > 0 \end{cases}$$

Odległość punktu C od płaszczyzny π jest równa 24.

Definicja 5.

Odległością prostej l (równoległej do płaszczyzny π) od płaszczyzny π nazywamy długość odcinka AA_1, przy czym A jest dowolnym punktem prostej l, A_1 – rzutem prostokątnym punktu A na płaszczyznę π.



Analogicznie można zdefiniować odległość między dwiema równoległymi płaszczyznami.

Sprawdź, czy rozumiesz

1. Dany jest sześcian $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Wykaż, że czworokąt ABC_1D_1 jest prostokątem.
2. Dany jest sześcian $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Sprawdź, czy prosta:
   a) BD jest prostopadła do płaszczyzny (ACD_1)
   b) A_1D jest prostopadła do płaszczyzny (ABC_1D_1).
3. Dany jest sześcian $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Wykaż, że płaszczyzna (ACD_1) jest prostopadła do płaszczyzny (DBB_1D_1).
4. Trójkąt prostokątny ABC, którego przeciwprostokątna AB ma długość 20 cm, zawiera się w płaszczyźnie π. Odcinek CS jest prostopadły do płaszczyzny π. Wiedząc, że punkt S jest odległy od punktu A o $\sqrt{337}$ cm, a od punktu B – o 15 cm, oblicz odległość punktu S od płaszczyzny π.

Twierdzenie o trzech prostych prostopadłych

Twierdzenia omówione w tym temacie pozwalają – w pewnych przypadkach – stwierdzić, czy kąt między przecinającymi się prostymi umieszczonymi w przestrzeni jest prosty.

Twierdzenie 1.

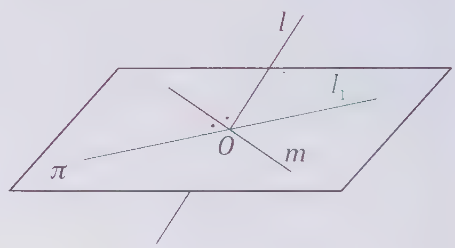
Jeśli prosta l przebija płaszczyznę π i nie jest do niej prostopadła oraz prosta m leżąca na płaszczyźnie π jest prostopadła do rzutu prostokątnego l_1 prostej l na płaszczyznę π i przecina prostą l, to prosta m jest prostopadła do prostej l.

Założenie:
Dana jest płaszczyzna π oraz proste m, l,

$l \not\perp \pi \quad l \cap \pi = \{O\}$

l_1 jest rzutem prostokątnym prostej l na płaszczyznę π

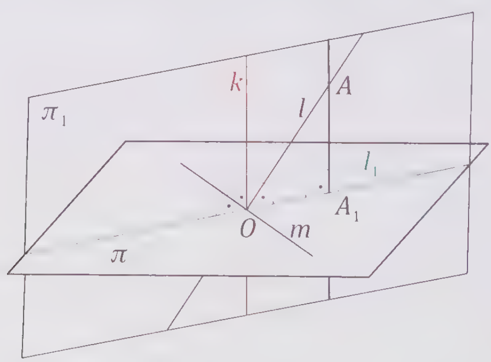
$m \subset \pi \quad m \cap l = \{O\} \quad m \perp l_1$



Teza:

$m \perp l$

Dowód:
Na prostej l wybieramy dowolny punkt A różny od punktu O. Przez A_1 oznaczmy rzut prostokątny punktu A na płaszczyznę π. Oczywiście $A_1 \in l_1$ i pr. $AA_1 \perp \pi$.



W punkcie O wystawiamy prostą k prostopadłą do płaszczyzny π. Ponieważ

pr. $AA_1 \perp \pi$ i $k \perp \pi$, więc

pr. $AA_1 \parallel k$ (twierdzenie 2. ze str. 361)

Proste k i AA_1 wyznaczają płaszczyznę. Oznaczmy ją przez π_1. Mamy

$A \in \pi_1$ i $O \in \pi_1$, więc

pr. $AO \subset \pi_1$ (aksjomat 5.), czyli

$l \subset \pi_1$

Podobnie można pokazać, że

$l_1 \subset \pi_1$

Prosta k jest prostopadła do płaszczyzny π, więc w szczególności

$k \perp m$

Z założenia wiemy, że

$m \perp l_1$

Prosta m jest więc prostopadła do dwóch prostych leżących w płaszczyźnie π_1, zatem (twierdzenie 1. ze str. 358) jest prostopadła do płaszczyzny π_1. To znaczy, że jest prostopadła do każdej prostej zawartej w płaszczyźnie π_1 przechodzącej przez punkt O; w szczególności

$m \perp l$, co kończy dowód.

Prawdziwe jest również kolejne twierdzenie.

Twierdzenie 2.

Jeśli prosta l przebija płaszczyznę π i nie jest do niej prostopadła oraz prosta m leżąca na płaszczyźnie π jest prostopadła do prostej l, to jest prostopadła do rzutu prostokątnego l_1 prostej l na płaszczyznę π.

Założenie:

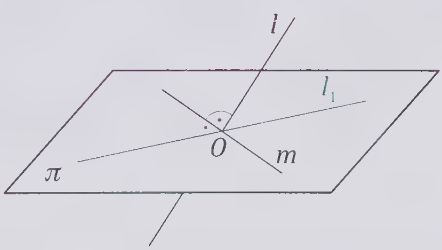
Dana jest płaszczyzna π oraz proste m, l,

$l \not\perp \pi \quad l \cap \pi = \{O\}$

l_1 jest rzutem prostokątnym prostej l

na płaszczyznę π

$m \subset \pi \quad m \cap l = \{O\} \quad m \perp l$



Teza:

$m \perp l_1$

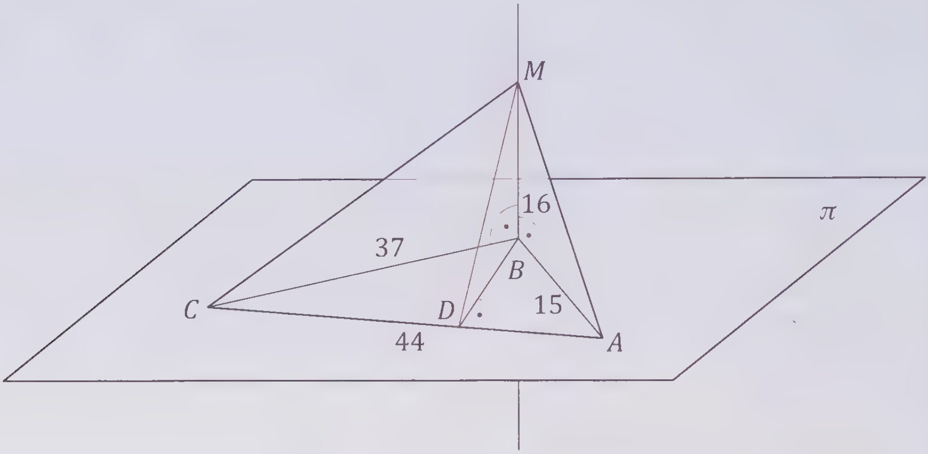
Powyższe dwa twierdzenia zapiszemy w postaci jednego twierdzenia, które będziemy nazywać twierdzeniem o trzech prostych prostopadłych.

Twierdzenie 3. (o trzech prostych prostopadłych)

Jeśli prosta l przebija płaszczyznę π i nie jest do niej prostopadła, prosta l_1 jest rzutem prostokątnym prostej l na płaszczyznę π, prosta m leży na płaszczyźnie π i przecina prostą l, to prosta m jest prostopadła do prostej l wtedy i tylko wtedy, gdy jest prostopadła do prostej l_1.

Przykład 1.

W trójkącie ABC leżącym na płaszczyźnie π mamy dane: $|AB| = 15$, $|BC| = 37$, $|CA| = 44$. Z punktu B poprowadzono prostą prostopadłą do płaszczyzny π. Na tej prostej wybrano punkt M, dla którego $|BM| = 16$. Wyznaczymy wysokość trójkąta AMC poprowadzoną z wierzchołka M.



Niech rysunek powyżej przedstawia sytuację opisaną w zadaniu. Z wierzchołka B trójkąta ABC poprowadźmy wysokość BD. Zauważ, że $D \in CA$ (dlaczego?). Odcinek BD jest rzutem prostokątnym odcinka MD (bo $MB \perp \pi$), oczywiście $CA \perp BD$, zatem – z twierdzenia o trzech prostych prostopadłych

$$CA \perp MD$$

To znaczy, że odcinek MD jest wysokością trójkąta AMC poprowadzoną z wierzchołka M.

Aby obliczyć długość odcinka MD, obliczymy najpierw długość odcinka BD. W tym celu obliczymy pole trójkąta ABC, stosując – znany Ci z klasy pierwszej – wzór Herona. Przypomnijmy: pole P trójkąta o bokach mających długość a, b, c wyraża się wzorem:

$$P = \sqrt{p \cdot (p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c)}, \text{ gdzie } p = \frac{a+b+c}{2}.$$

Dla trójkąta ABC mamy

$$p = \frac{37+44+15}{2} = 48, \text{ zatem}$$

$$P = \sqrt{48 \cdot (48-37) \cdot (48-44) \cdot (48-15)} = \sqrt{2^4 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 2^2 \cdot 3 \cdot 11} =$$

$$= \sqrt{2^6 \cdot 3^2 \cdot 11^2} = 2^3 \cdot 3 \cdot 11 = 264$$

Pole P trójkąta ABC można również obliczyć, stosując wzór:

$$P = \frac{1}{2} \cdot |CA| \cdot |BD|, \text{ więc}$$

$$264 = \frac{1}{2} \cdot 44 \cdot |BD| \quad /: 22$$

$$|BD| = 12$$

Prosta BM jest prostopadła do płaszczyzny π, w szczególności jest więc prostopadła do prostej BD, zatem trójkąt DBM jest prostokątny. Stosujemy twierdzenie Pitagorasa do tego trójkąta i obliczamy długość odcinka MD.

$$|MD|^2 = |DB|^2 + |BM|^2$$

$$|MD|^2 = 12^2 + 16^2$$

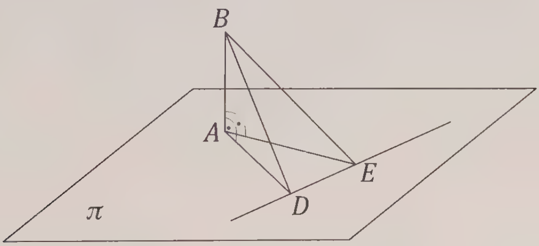
$$|MD|^2 = 400$$

$$|MD| = 20, \text{ bo } |MD| > 0$$

Wysokość trójkąta AMC poprowadzona z wierzchołka M jest równa 20.

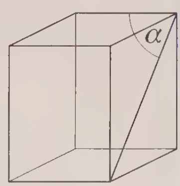
Sprawdź, czy rozumiesz

1. Na płaszczyźnie π dana jest prosta DE oraz punkt A nienależący do tej prostej. Odległość punktu A od prostej DE jest taka sama, jak odległość punktu A od punktu D i wynosi 12 cm. Punkt E leży w odległości 13 cm od punktu A. Odcinek AB jest prostopadły do płaszczyzny π, a jego długość jest równa 16 cm. Oblicz pole trójkąta BDE.



2. Dany jest trójkąt równoramienny ABC, w którym $|AB| = |AC|$. Odcinek AD jest prostopadły do płaszczyzny (ABC). Z punktu D poprowadzono prostą prostopadłą do prostej BC, która przecięła tę prostą w punkcie E. Czy punkt E jest środkiem odcinka BC? Odpowiedź uzasadnij.

3. Na rysunku obok przedstawiony jest prostopadłościan. Niech α oznacza kąt między przekątną ściany bocznej prostopadłościanu a krawędzią podstawy (zobacz rysunek obok). Wykaż, że $\alpha = 90°$.

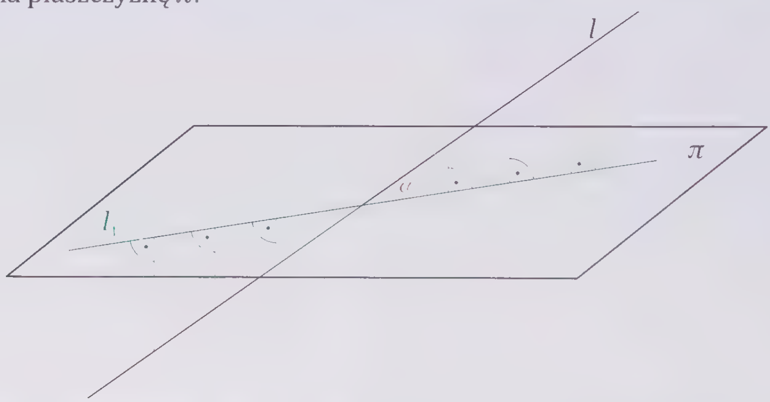


Kąt między prostą a płaszczyzną. Kąt dwuścienny

Jeśli prosta jest równoległa do płaszczyzny, to mówimy, że tworzy z płaszczyzną kąt zerowy. Jeśli natomiast prosta jest prostopadła do płaszczyzny, to mówimy, że tworzy z płaszczyzną kąt prosty. Omówimy teraz, jak określa się kąt między prostą a płaszczyzną w przypadku „pośrednim", to znaczy wtedy, gdy prosta przebija płaszczyznę i nie jest do niej prostopadła.

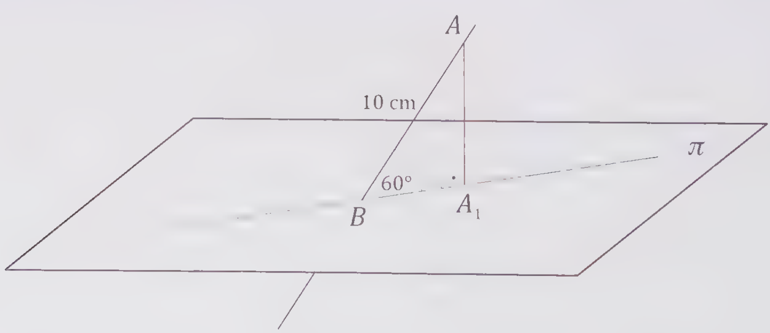
Definicja 1.

Kątem między prostą *l* (przebijającą płaszczyznę π i nieprostopadłą do niej) **a płaszczyzną π** nazywamy kąt ostry α między prostą l a jej rzutem prostokątnym l_1 na płaszczyznę π.



Przykład 1.

Przez punkt A poprowadzono prostą przebijającą płaszczyznę π w punkcie B i tworzącą z tą płaszczyzną kąt 60°. Wiedząc, że $|AB| = 10$ cm, wyznaczymy odległość punktu A od płaszczyzny π.



Rysunek powyżej przedstawia sytuację opisaną w zadaniu. Punkt A_1 jest rzutem prostokątnym punktu A na płaszczyznę π. Prosta BA_1 jest rzutem prostokątnym prostej BA na płaszczyznę π (dlaczego?). Szukamy długości odcinka AA_1.
Rozważmy trójkąt BA_1A. Jest to trójkąt prostokątny o kącie ostrym 60°. Zatem:

$$|AB| = 2|BA_1| \text{ i } |AA_1| = \sqrt{3}|BA_1|$$

Łatwo więc obliczyć, że

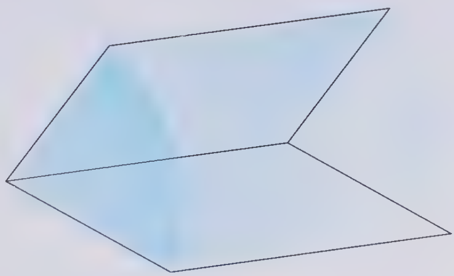
$$|AA_1| = 5\sqrt{3} \text{ (cm)}$$

Odległość punktu A od płaszczyzny π jest równa $5\sqrt{3}$ cm.

Każda prosta leżąca na płaszczyźnie dzieli ją na dwie części. Każdą z tych części wraz z daną prostą nazywamy półpłaszczyzną. Sama prosta nazywa się krawędzią półpłaszczyzny.

Definicja 2.

Kątem dwuściennym nazywamy sumę dwóch półpłaszczyzn o wspólnej krawędzi i jednego z dwóch obszarów, które te półpłaszczyzny wycinają z przestrzeni.



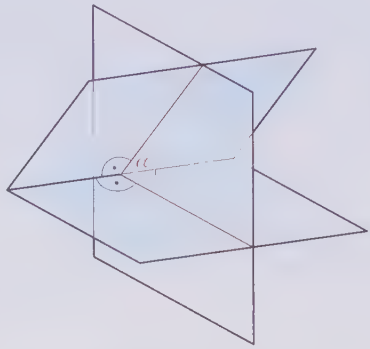
Wspólną krawędź półpłaszczyzn nazywamy **krawędzią kąta dwuściennego**, a same półpłaszczyzny – **ścianami kąta dwuściennego**.

Dwie półpłaszczyzny o wspólnej krawędzi wyznaczają dwa kąty dwuścienne. Na rysunku powyżej zaznaczono wypukły kąt dwuścienny. (Figury wypukłe i figury wklęsłe w przestrzeni określamy tak samo jak na płaszczyźnie. Przypomnijmy: figurę nazywamy figurą wypukłą wtedy, gdy dla dowolnych punktów A, B, należących do tej figury, odcinek AB zawiera się w tej figurze. Figurę, która nie jest wypukła, nazywamy figurą wklęsłą albo niewypukłą.)

Powstaje pytanie, jak mierzyć kąty dwuścienne.

Definicja 3.

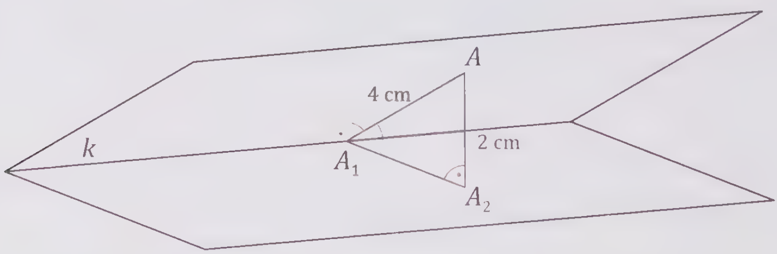
Kątem liniowym kąta dwuściennego nazywamy część wspólną kąta dwuściennego i płaszczyzny prostopadłej do jego krawędzi.



Miarę kąta liniowego przyjmuje się za miarę kąta dwuściennego. Zauważ, że krawędź kąta dwuściennego jest prostopadła do ramion odpowiadającego mu kąta liniowego (dlaczego?).

Przykład 2.

Odległość punktu A leżącego na ścianie kąta dwuściennego od krawędzi k tego kąta jest równa 4 cm, a od drugiej ściany kąta jest równa 2 cm. Wyznaczymy miarę tego kąta dwuściennego.



Rysunek powyżej przedstawia sytuację opisaną w zadaniu. Pokażemy najpierw, że płaszczyzna (AA_1A_2) jest prostopadła do krawędzi kąta.
Zauważ, że odcinek A_1A_2 jest rzutem prostokątnym odcinka A_1A na płaszczyznę (wyznaczoną przez drugą ścianę kąta dwuściennego). Wiemy też z założenia, że

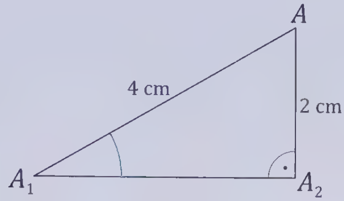
$AA_1 \perp k,$

zatem z twierdzenia o trzech prostych prostopadłych wynika, że

$A_1A_2 \perp k$

Prosta k jest więc prostopadła do dwóch prostych: pr. A_1A i pr. A_1A_2, czyli jest prostopadła do płaszczyzny (AA_1A_2). Miarą kąta dwuściennego jest więc miara kąta A_2A_1A.

Rozpatrzmy trójkąt prostokątny AA_1A_2.



Łatwo stwierdzić, że

$|\sphericalangle A_2A_1A| = 30°$

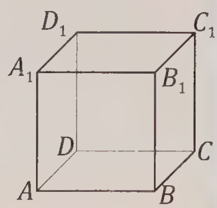
Miara kąta dwuściennego jest równa 30°.

Sprawdź, czy rozumiesz

1. Prosta k przebija płaszczyznę π w punkcie A. Punkt B należy do prostej k i długość odcinka AB jest równa 10 cm. Oblicz odległość punktu B od płaszczyzny π, jeśli kąt nachylenia prostej k do płaszczyzny π ma miarę:
   a) 30° b) 45° c) 60°.

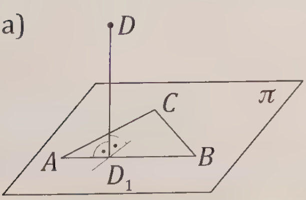
2. Odcinek AB zawiera się w płaszczyźnie π. Punkt C leży w odległości równej długości odcinka AB od płaszczyzny π. Oblicz miarę kąta między prostą AC a płaszczyzną π, jeśli rzutem prostokątnym punktu C na płaszczyznę π jest:
   a) punkt B b) punkt A c) środek odcinka AB.

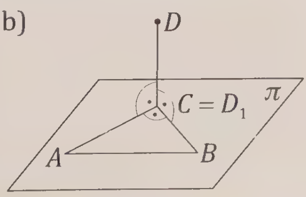
3. Dany jest sześcian $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Zaznacz kąt nachylenia:
   a) prostej BC_1 do płaszczyzny $(ABCD)$
   b) prostej AC_1 do płaszczyzny $(A_1B_1C_1D_1)$
   c) prostej AD do płaszczyzny (DBB_1D_1)
   d) prostej BE do płaszczyzny (BCC_1B_1), gdzie punkt E jest środkiem odcinka C_1D_1.

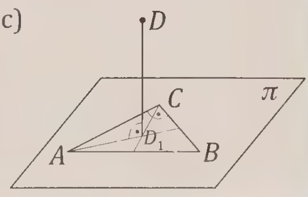


4. W sześcianie $ABCDA_1B_1C_1D_1$ punkt E jest punktem przecięcia się przekątnych kwadratu DCC_1D_1. Oblicz sinus kąta nachylenia prostej AE do płaszczyzny $(ABCD)$.

5. Na płaszczyźnie π dany jest trójkąt prostokątny ABC, $|\sphericalangle ACB| = 90°$. Punkt D nie należy do płaszczyzny π. Zaznacz kąty między każdą z prostych AD, BD, CD a płaszczyzną π, jeśli rzut prostokątny punktu D na płaszczyznę π:
   a) leży między punktami A i B
   b) jest punktem wspólnym wysokości trójkąta ABC
   c) jest punktem przecięcia środkowych trójkąta ABC.

a) 

b) 

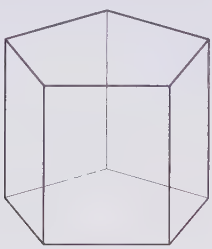
c) 

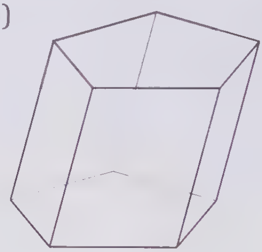
Graniastosłupy

W gimnazjum poznałeś przykłady wielościanów (np. prostopadłościany). Wielościany to pewne bryły, których brzeg utworzony jest z wielokątów. Dokładniej omówimy dwa typy wielościanów: graniastosłupy i ostrosłupy.

> ***Definicja 1.***
> **Graniastosłupem** nazywamy wielościan, który ma dwie przystające ściany położone w płaszczyznach równoległych (podstawy graniastosłupa), a pozostałe ściany, zwane ścianami bocznymi, są równoległobokami.

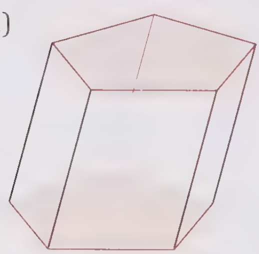
Graniastosłupy, których ściany boczne są prostokątami, nazywamy **graniastosłupami prostymi** (rys. a), pozostałe – **graniastosłupami pochyłymi** (rys. b).

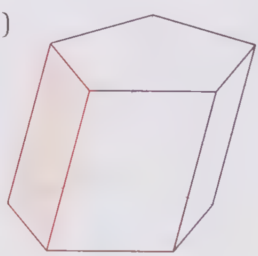
a)


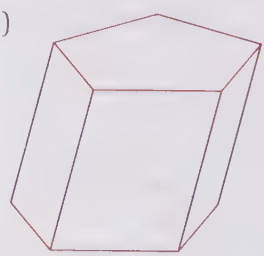
b)


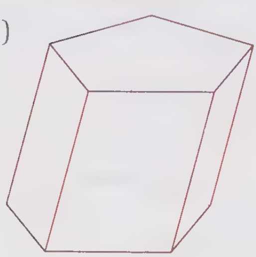
Na rysunku poniżej zaznaczono kolorem czerwonym:

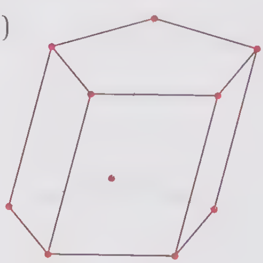
a) podstawy graniastosłupa
b) ścianę boczną
c) krawędzie podstaw
d) krawędzie boczne
e) wierzchołki graniastosłupa
f) wysokość graniastosłupa.

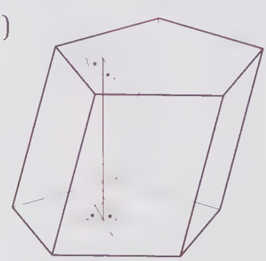
a)


b)


c)


d)


e)


f)


Wysokością graniastosłupa nazywamy odcinek (a także jego długość), który jest prostopadły do płaszczyzn zawierających podstawy i który charakteryzuje się tym, że jeden jego koniec należy do jednej płaszczyzny, a drugi koniec do drugiej płaszczyzny.

Zauważ, że w graniastosłupie prostym każda krawędź boczna jest wysokością.

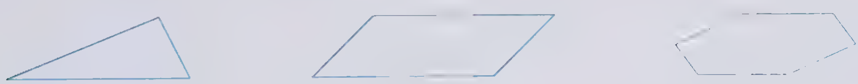
Graniastosłup prawidłowy jest to graniastosłup prosty, którego podstawą jest wielokąt foremny (czyli wielokąt, którego wszystkie boki mają równą długość i wszystkie kąty równą miarę).

Opisując graniastosłupy, posługujemy się określeniami: trójkątny, czworokątny, pięciokątny itd., w zależności od tego, jaki wielokąt jest w podstawie graniastosłupa. Tak więc np. graniastosłup prawidłowy trójkątny to graniastosłup, którego podstawami są trójkąty równoboczne, a ścianami bocznymi – prostokąty.

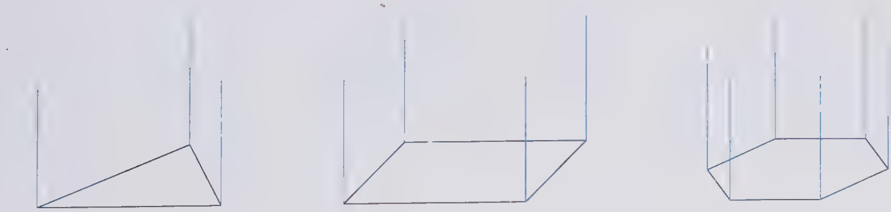
Przypomnijmy jeszcze określenie prostopadłościanu i sześcianu. **Prostopadłościan** jest to graniastosłup prosty, którego podstawami są prostokąty. **Sześcian** jest to prostopadłościan, którego wszystkie ściany są kwadratami.

Aby narysować graniastosłup, wykorzystujemy własności rzutu równoległego na płaszczyznę. Najczęściej rysunek wykonujemy tak, że jedna ze ścian bocznych jest równoległa do rzutni. Krawędzie boczne są odcinkami równoległymi o równych długościach, więc na rysunku też są równoległe i mają równą długość, podobnie jak i odpowiednie pary krawędzi podstaw.

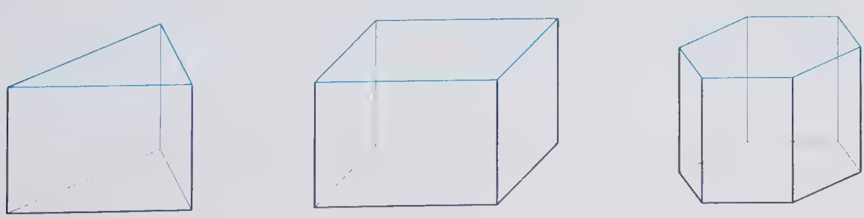
Rysowanie wygodnie jest zacząć od dolnej podstawy graniastosłupa.



Następnie dorysowujemy krawędzie boczne.



Na koniec rysujemy krawędzie górnej podstawy.



UWAGA: Graniastosłupy staraj się rysować tak, aby ich krawędzie boczne się nie pokrywały.

Zauważ, że krawędzie graniastosłupa, które nie są równoległe do rzutni, na rysunku są krótsze niż w rzeczywistości.

Przekątną wielościanu nazywamy odcinek, którego końcami są wierzchołki wielościanu i który nie zawiera się w ścianie wielościanu.

Wyznaczymy liczbę przekątnych graniastosłupa, którego podstawą jest n-kąt, $n \in \mathbb{N}$ i $n > 2$.

Z określenia przekątnej wielościanu wynika, że łączy ona wierzchołki należące do różnych podstaw. Liczba wszystkich przekątnych jest więc równa sumie przekątnych „wychodzących" z wierzchołków jednej podstawy. Rozważmy wierzchołki dolnej podstawy. Z każdego takiego wierzchołka można poprowadzić n odcinków do wierzchołków górnej podstawy, ale tylko $(n - 3)$ z nich jest przekątnymi graniastosłupa (z pozostałych trzech odcinków: jeden jest krawędzią boczną i dwa są przekątnymi ścian bocznych). Wierzchołków w podstawie jest n, zatem wszystkich przekątnych graniastosłupa jest $n(n-3)$.

Twierdzenie 1.
Liczba przekątnych graniastosłupa, którego podstawą jest n-kąt, $n \in \mathbb{N}$, $n > 2$, wynosi $n(n-3)$.

Przykład 1.

Liczba wszystkich krawędzi graniastosłupa jest równa 60. Wyznaczymy liczbę przekątnych tego graniastosłupa.

Oznaczmy przez n $(n \in \mathbb{N}, n > 2)$ liczbę krawędzi podstawy rozpatrywanego graniastosłupa. Uwzględniając, że graniastosłup ma dwie podstawy oraz że krawędzi bocznych ma również n, otrzymujemy równanie:

$$3n = 60 \quad /:3$$

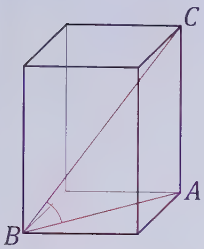
$$n = 20$$

Podstawą graniastosłupa jest 20-kąt.
Wyznaczamy liczbę przekątnych graniastosłupa. Zgodnie z twierdzeniem 1. mamy:

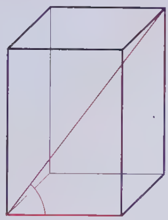
$$20 \cdot (20-3) = 20 \cdot 17 = 340$$

Graniastosłup ma 340 przekątnych.

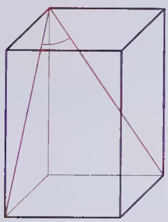
Na poniższych rysunkach zostały zaznaczone pewne kąty w graniastosłupach prawidłowych czworokątnych.



Kąt między przekątną graniastosłupa a płaszczyzną podstawy. (Zauważ, że odcinek AB jest rzutem prostokątnym odcinka BC na płaszczyznę podstawy).



Kąt między przekątną graniastosłupa a krawędzią podstawy.



Kąt między przekątnymi ścian bocznych (wychodzącymi z tego samego wierzchołka).

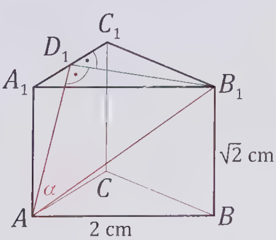
Przykład 2.

Krawędź podstawy graniastosłupa prawidłowego trójkątnego ma 2 cm długości, a wysokość graniastosłupa jest równa $\sqrt{2}$ cm. Wyznaczymy miarę kąta między:

a) przekątną ściany bocznej a sąsiednią ścianą boczną

b) przekątnymi ścian bocznych (wychodzącymi z tego samego wierzchołka).

Ad a)



Wyznaczymy miarę α kąta między przekątną AB_1 a płaszczyzną (ACC_1A_1). W tym celu znajdujemy rzut prostokątny przekątnej AB_1 na płaszczyznę (ACC_1A_1). Otrzymujemy odcinek AD_1, przy czym D_1 jest środkiem odcinka A_1C_1.

Obliczamy długość przyprostokątnych AD_1 i B_1D_1 trójkąta prostokątnego AB_1D_1.

Stosujemy twierdzenie Pitagorasa do trójkąta prostokątnego AD_1A_1 i obliczamy $|AD_1|$.

$$|AD_1|^2 = |AA_1|^2 + |A_1D_1|^2$$
$$|AD_1|^2 = \left(\sqrt{2}\right)^2 + 1^2$$
$$|AD_1|^2 = 3$$
$$|AD_1| = \sqrt{3}\ \text{(cm), bo } |AD_1| > 0.$$

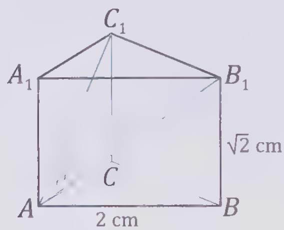
Odcinek D_1B_1 jest wysokością w trójkącie równobocznym $A_1B_1C_1$ (którego bok ma długość 2 cm), więc

$$|D_1B_1| = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}\ \text{(cm)}$$

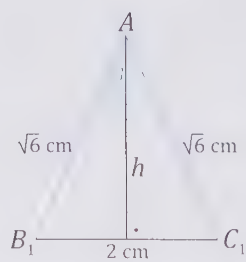
Ponieważ $|AD_1| = |D_1B_1| = \sqrt{3}$ cm, więc trójkąt prostokątny AB_1D_1 jest trójkątem równoramiennym, skąd wynika, że

$$\alpha = 45°$$

Ad b)



Oznaczymy szukaną miarę kąta przez β. Wyznaczymy sin β. Rozpatrzmy trójkąt AB_1C_1.



Obliczamy $|AB_1|$, korzystając z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta prostokątnego ABB_1.

$$|AB_1|^2 = |AB|^2 + |BB_1|^2$$
$$|AB_1|^2 = 2^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2$$
$$|AB_1|^2 = 6$$
$$|AB_1| = \sqrt{6}\ \text{(cm), bo } |AB_1| > 0.$$

Podobnie wyznaczamy długość odcinka AC_1.

$$|AC_1| = \sqrt{6}\ \text{(cm)}$$

Teraz bez kłopotu można obliczyć (również wykorzystując twierdzenie Pitagorasa) wysokość w trójkącie AB_1C_1 poprowadzoną z wierzchołka A.

$$h = \sqrt{5}\ \text{(cm)}$$

Obliczamy pole P trójkąta AB_1C_1 na dwa sposoby:

$P = \frac{1}{2}|B_1C_1| \cdot h$ oraz $P = \frac{1}{2}|AB_1| \cdot |AC_1| \cdot \sin\beta$, gdzie β jest miarą kąta ostrego (dlaczego?)

$P = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \sqrt{5}$ $\qquad P = \frac{1}{2} \cdot \left(\sqrt{6}\right)^2 \cdot \sin\beta$

Stąd otrzymujemy równanie:

$$\sqrt{5} = 3 \cdot \sin\beta$$

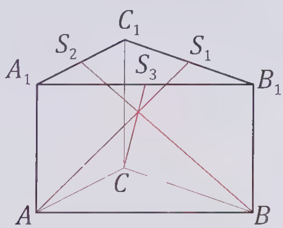
$$\sin\beta = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\beta \approx 48°$$

Kąt między przekątną ściany bocznej a sąsiednią ścianą boczną ma miarę 45°, natomiast kąt między przekątnymi ścian bocznych (wychodzącymi z tego samego wierzchołka) ma miarę ok. 48°.

Przykład 3.

W graniastosłupie trójkątnym łączymy wierzchołki A, B, C jednej podstawy ze środkami S_1, S_2, S_3 przeciwległych krawędzi drugiej podstawy (patrz rysunek). Wykażemy, że te trzy odcinki przecinają się w jednym punkcie, który dzieli je w stosunku 1 : 2.



Oznaczmy wierzchołki graniastosłupa, jak na rysunku powyżej; punkty S_1, S_2, S_3 oznaczają środki odpowiednich krawędzi górnej podstawy. Wykażemy najpierw, że odcinki AS_1 i BS_2 przecinają się w punkcie, który dzieli je w stosunku 1 : 2.

Z twierdzenia o odcinku łączącym środki boków w trójkącie $A_1B_1C_1$ otrzymujemy:

(1) $\qquad S_2S_1 \parallel A_1B_1$ i $|S_2S_1| = \frac{1}{2}|A_1B_1|$

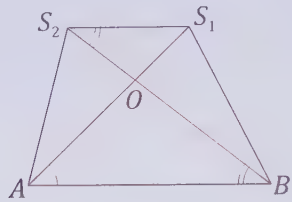
Ściana boczna ABB_1A_1 jest równoległobokiem, więc

(2) $\qquad AB \parallel A_1B_1$ i $|AB| = |A_1B_1|$

Z punktów (1) i (2) wynika (zobacz twierdzenie 5., str. 349), że

$$S_2S_1 \parallel AB \text{ i } |S_2S_1| = \frac{1}{2}|AB|$$

Tak więc punkty A, B, S_1, S_2 leżą w jednej płaszczyźnie. Wyznaczają na niej trapez. Odcinki AS_1 i BS_2 przecinają się w punkcie, który oznaczymy O.



Z twierdzenia o dwóch prostych równoległych przeciętych trzecią prostą wynika, że

$$|\sphericalangle S_2S_1A| = |\sphericalangle S_1AB| \text{ i } |\sphericalangle S_1S_2B| = |\sphericalangle S_2BA|$$

Zatem na mocy cechy (kkk) podobieństwa trójkątów otrzymujemy, że

$$\Delta OS_1S_2 \sim \Delta OAB$$

Tak więc boki jednego trójkąta są proporcjonalne do odpowiednich boków drugiego trójkąta. Mamy:

$$\frac{|S_1S_2|}{|AB|} = \frac{1}{2} = \frac{|S_1O|}{|OA|} = \frac{|S_2O|}{|OB|}$$

czyli punkt O dzieli przekątne AS_1 i BS_2 w stosunku 1 : 2 (licząc od punktów S_1, S_2). Rozumując podobnie, można wykazać, że przekątne BS_2 i CS_3 (odpowiednich trapezów) przecinają się w punkcie O_1, który dzieli je w stosunku 1 : 2 (licząc od punktów S_2, S_3). Ale odcinek BS_2 można podzielić w stosunku 1 : 2 (licząc od punktu S_2) tylko na jeden sposób, więc

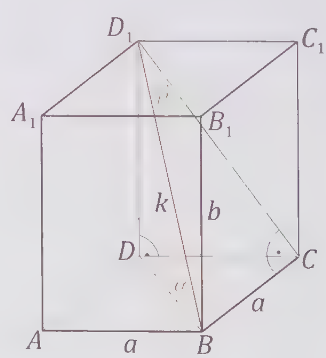
$$O_1 = O$$

Zatem trzy przekątne graniastosłupa przecinają się w jednym punkcie, który dzieli je w stosunku 1 : 2.

Przykład 4.

Przekątna graniastosłupa prawidłowego czworokątnego jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem α i tworzy z każdą ścianą boczną kąt β. Wykażemy, że $\cos^2\alpha + \cos 2\beta = 1$.

Założenie: Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku obok.
a – długość krawędzi podstawy, $a > 0$
b – wysokość graniastosłupa, $b > 0$
k – długość przekątnej graniastosłupa, $k > 0$
α – kąt między przekątną graniastosłupa a płaszczyzną podstawy
β – kąt między przekątną graniastosłupa a ścianą boczną



Teza: $\cos^2\alpha + \cos 2\beta = 1$

Dowód: Wyznaczamy $\cos\alpha$. Trójkąt DBD_1 jest trójkątem prostokątnym, zatem

$$\frac{|DB|}{|D_1B|} = \cos\alpha, \qquad \text{czyli} \qquad \frac{a\sqrt{2}}{k} = \cos\alpha, \qquad \text{stąd}$$

(*) $$\cos^2\alpha = \frac{2a^2}{k^2}$$

Obliczamy $|D_1C|$. Korzystamy z twierdzenia Pitagorasa zastosowanego do trójkąta prostokątnego CC_1D_1.

$$|D_1C| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Wyznaczamy $\cos\beta$. Trójkąt BCD_1 jest trójkątem prostokątnym, zatem

$$\frac{|D_1C|}{|D_1B|} = \cos\beta, \qquad \text{czyli} \qquad \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{k} = \cos\beta$$

Wyznaczamy $\cos 2\beta$. Korzystamy ze wzoru $\cos 2\beta = 2\cos^2\beta - 1$. Zatem

$$\cos^2\beta = \frac{a^2+b^2}{k^2}, \qquad \text{skąd} \qquad 2\cos^2\beta - 1 = \frac{2(a^2+b^2)}{k^2} - 1, \qquad \text{czyli}$$

(**) $$\cos 2\beta = \frac{2(a^2+b^2)}{k^2} - 1$$

Stosujemy twierdzenie Pitagorasa do trójkąta prostokątnego DBD_1. Otrzymujemy:

(***) $2a^2 + b^2 = k^2$

Obliczamy $\cos^2\alpha + \cos 2\beta$. Korzystamy z zależności (*), (**) i (***)

$$\cos^2\alpha + \cos 2\beta = \frac{2a^2}{k^2} + \frac{2(a^2+b^2)}{k^2} - 1 = \frac{2(2a^2+b^2)}{k^2} - 1 = \frac{2k^2}{k^2} - 1 = 2 - 1 = 1,$$

co kończy dowód.

Sprawdź, czy rozumiesz

1. Oblicz długość przekątnej:
   a) prostopadłościanu, którego krawędzie mają długość 3 cm, 4 cm, 12 cm
   b) graniastosłupa prawidłowego czworokątnego, którego krawędź podstawy ma długość 3 cm, a przekątna jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem 30°.

2. Przekątne graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego mają długość 15 cm i $3\sqrt{21}$ cm. Oblicz długość krawędzi podstawy i wysokość graniastosłupa.

3. W graniastosłupie prawidłowym trójkątnym $ABCA_1B_1C_1$ poprowadzono przekątną ściany bocznej AC_1. Czy kąt AC_1B_1 jest prosty? Odpowiedź uzasadnij.

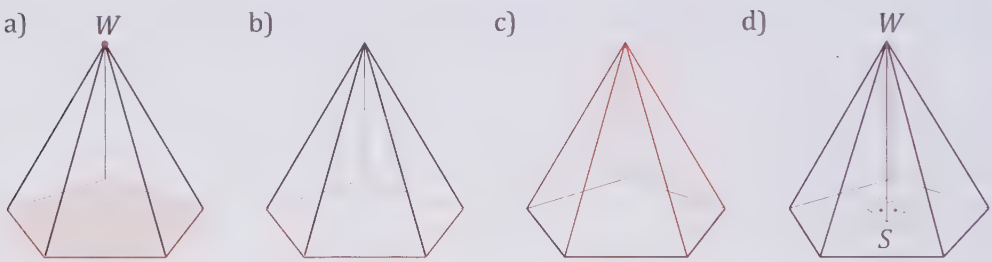
4. W graniastosłupie prawidłowym czworokątnym krawędź podstawy ma długość 10 cm, a wysokość – $10\sqrt{2}$ cm. Wyznacz miarę kąta:
   a) nachylenia przekątnej graniastosłupa do płaszczyzny podstawy graniastosłupa
   b) między przekątną graniastosłupa a krawędzią podstawy.

Ostrosłupy

Definicja 1.

Ostrosłupem nazywamy wielościan, którego jedna ze ścian, zwana podstawą, jest wielokątem, a pozostałe ściany są trójkątami o wspólnym wierzchołku (nieleżącym w płaszczyźnie podstawy), zwanym wierzchołkiem ostrosłupa.

Na rysunku poniżej kolorem czerwonym zaznaczono:
a) podstawę ostrosłupa oraz wierzchołek ostrosłupa (punkt W)
b) krawędzie podstawy ostrosłupa
c) krawędzie boczne ostrosłupa
d) wysokość ostrosłupa.



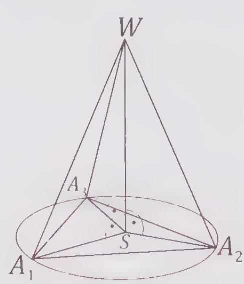
Wysokością ostrosłupa nazywamy odcinek (a także jego długość), którego jednym końcem jest wierzchołek ostrosłupa, a drugim końcem – jego rzut prostokątny na płaszczyznę podstawy. Na rysunku d) jest to odcinek WS. Punkt S nazywamy **spodkiem wysokości ostrosłupa**.

Opisując ostrosłupy, posługujemy się określeniami: trójkątny, czworokątny, pięciokątny itd., w zależności od tego, jaki wielokąt jest w podstawie ostrosłupa.

Przykład 1.

W ostrosłupie trójkątnym spodek wysokości ostrosłupa jest środkiem okręgu opisanego na podstawie. Wykażemy, że krawędzie boczne w tym ostrosłupie mają jednakową długość.

Niech dany będzie ostrosłup, którego podstawą jest trójkąt $A_1A_2A_3$ i którego wierzchołkiem jest punkt W.



Poprowadźmy wysokość WS w tym ostrosłupie. Z założenia wiemy, że spodek wysokości (punkt S) jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie $A_1A_2A_3$, zatem jest on równo odległy od wierzchołków A_1, A_2, A_3:

$|SA_1| = |SA_2| = |SA_3|$

Rozpatrzmy trójkąty: A_1SW, A_2SW, A_3SW. O trójkątach tych wiadomo, że:

- są prostokątne

  $|\sphericalangle A_1SW| = |\sphericalangle A_2SW| = |\sphericalangle A_3SW| = 90°$ – bo odcinek WS jest wysokością;
- mają wspólną przyprostokątną WS;
- pozostałe przyprostokątne w tych trójkątach mają równe długości:

  $|SA_1| = |SA_2| = |SA_3|$

Zatem trójkąty A_1SW, A_2SW, A_3SW (na podstawie cechy bkb) są przystające

$\Delta A_1SW \equiv \Delta A_2SW \equiv \Delta A_3SW$

Z tego wynika, że

$|A_1W| = |A_2W| = |A_3W|$,

czyli krawędzie boczne ostrosłupa mają jednakową długość.

Ostrosłup $WA_1A_2A_3$ jest przykładem ostrosłupa prostego.

Ostrosłupem prostym nazywamy ostrosłup spełniający dwa warunki:
1) na podstawie ostrosłupa można opisać okrąg,
2) spodek wysokości ostrosłupa jest środkiem okręgu opisanego na podstawie.

W klasie pierwszej poznałeś pojęcie okręgu opisanego na trójkącie, a w klasie drugiej – pojęcie okręgu opisanego na czworokącie. Ogólnie powiemy, że okrąg jest opisany na wielokącie wtedy, gdy wszystkie wierzchołki tego wielokąta należą do danego okręgu. Na danym wielokącie można opisać okrąg wtedy, gdy istnieje punkt równo odległy od wszystkich wierzchołków danego wielokąta.

Prawdziwe jest następujące twierdzenie.

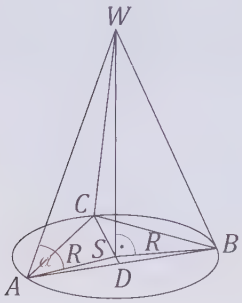
Twierdzenie 1.

Następujące warunki są równoważne:
1) ostrosłup jest ostrosłupem prostym
2) wszystkie krawędzie boczne ostrosłupa mają jednakową długość
3) wszystkie krawędzie boczne ostrosłupa tworzą jednakowe kąty z płaszczyzną podstawy.

Przykład 2.

Podstawą ostrosłupa jest trójkąt ABC, w którym $|AB| = 12$ cm, $|AC| = |BC| = 10$ cm. Wszystkie krawędzie boczne ostrosłupa mają jednakową długość. Wysokość ostrosłupa jest równa 15 cm. Wyznaczymy kąty, jakie tworzą krawędzie boczne z płaszczyzną podstawy.

Ponieważ wszystkie krawędzie boczne ostrosłupa mają jednakową długość, więc – zgodnie z twierdzeniem 1. – ostrosłup ten jest prosty. Z tego wynika, że spodek wysokości ostrosłupa jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC oraz że wszystkie jego krawędzie boczne tworzą jednakowe kąty z płaszczyzną podstawy. Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku poniżej.



$|AC| = |BC| = 10$ cm, $|AB| = 12$ cm
CD – wysokość trójkąta ABC, $|AD| = |BD|$
S – spodek wysokości ostrosłupa, $|WS| = 15$ cm
R – promień okręgu opisanego na podstawie ostrosłupa
α – szukany kąt
Wiemy już, że $|AS| = |BS| = |CS| = R$.

Obliczamy R.

Zauważ, że łatwo jest wyznaczyć wysokość CD trójkąta ABC, $|CD| = 8$ cm oraz pole P trójkąta ABC, $P = 48\text{ cm}^2$. Wiesz również, że

$$P = \frac{|AB| \cdot |BC| \cdot |AC|}{4 \cdot R}, \text{ zatem } R = \frac{|AB| \cdot |BC| \cdot |AC|}{4 \cdot P}, \text{ skąd}$$

$$R = 6{,}25 \text{ (cm)}$$

Obliczamy $\operatorname{tg}\alpha$ (korzystamy z definicji tangensa w trójkącie prostokątnym ASW).

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{|WS|}{R}, \text{ skąd}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = 2{,}4$$

Wyznaczamy α.

$$\alpha \approx 67{,}4^\circ$$

Krawędzie boczne ostrosłupa są nachylone do płaszczyzny podstawy pod kątem ok. 67° .

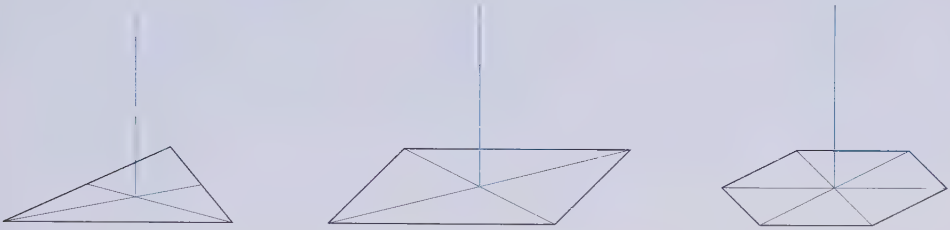
Ostrosłupem prawidłowym nazywamy ostrosłup prosty, którego podstawą jest wielokąt foremny.

Z określenia ostrosłupa prawidłowego i z twierdzenia 1. wynika wniosek.

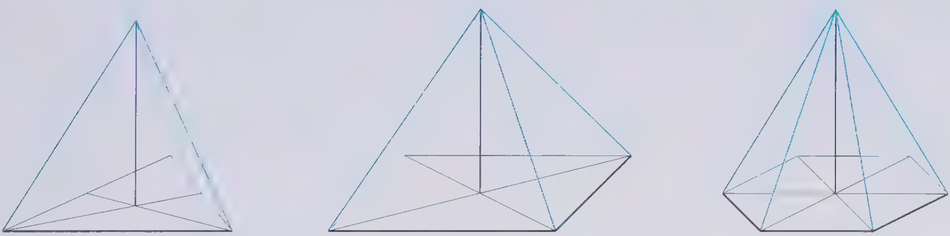
Wniosek: Ściany boczne ostrosłupa prawidłowego są przystającymi trójkątami równoramiennymi.

Aby narysować ostrosłup prawidłowy, wykorzystujemy – podobnie jak w przypadku rysowania graniastosłupów – własności rzutu równoległego na płaszczyznę. Rysowanie wygodnie jest zacząć od podstawy ostrosłupa.

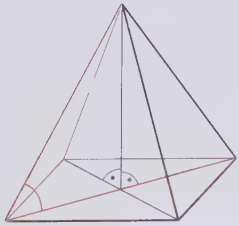
Spodek wysokości ostrosłupa prawidłowego trójkątnego jest punktem przecięcia się wysokości podstawy; dla ostrosłupa prawidłowego czworokątnego i sześciokątnego jest to punkt przecięcia przekątnych podstawy. Z tego punktu prowadzimy wysokość ostrosłupa.



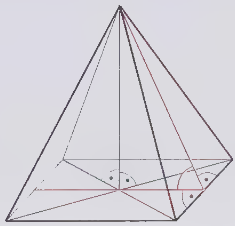
Długość wysokości dobieramy tak, aby krawędzie boczne poprowadzone z wierzchołka ostrosłupa do wierzchołków podstawy nie pokrywały się ze sobą ani z krawędziami podstawy.



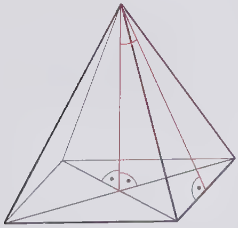
Omówimy teraz wybrane kąty w ostrosłupach na przykładzie ostrosłupa prawidłowego czworokątnego.



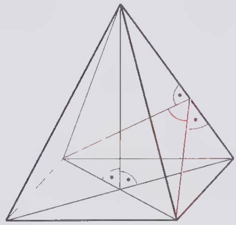
Kąt między krawędzią boczną a płaszczyzną podstawy.



Kąt między płaszczyzną ściany bocznej a płaszczyzną podstawy.



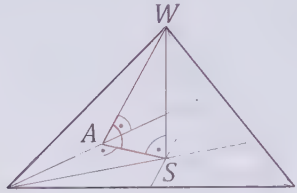
Kąt między wysokością ostrosłupa a płaszczyzną ściany bocznej.



Kąt między płaszczyznami sąsiednich ścian bocznych.

Przykład 3.

W ostrosłupie prawidłowym trójkątnym kąt między płaszczyzną ściany bocznej a płaszczyzną podstawy ma miarę 45°. Krawędź podstawy ma 12 cm długości. Wyznaczymy wysokość ostrosłupa i wysokość ściany bocznej.



Oznaczmy: WS – wysokość ostrosłupa, WA – wysokość ściany bocznej.

Odcinek AS stanowi $\frac{1}{3}$ wysokości podstawy (trójkąta równobocznego).

Wyznaczamy wysokość podstawy ostrosłupa – h

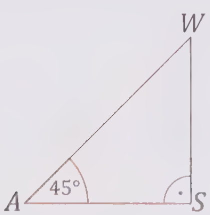
$$h = \frac{12\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}\ (\text{cm})$$

Znajdujemy długość odcinka AS:

$$|AS| = \frac{1}{3}h$$

$$|AS| = 2\sqrt{3}\ (\text{cm})$$

W celu wyznaczenia wysokości ostrosłupa i wysokości ściany bocznej rozpatrzmy trójkąt ASW. Jest to trójkąt prostokątny równoramienny.



$$|AS| = |WS| \text{ i } |AW| = \sqrt{2}\,|AS|$$

Mamy zatem:

$$|WS| = 2\sqrt{3}\ (\text{cm}) \text{ oraz}$$

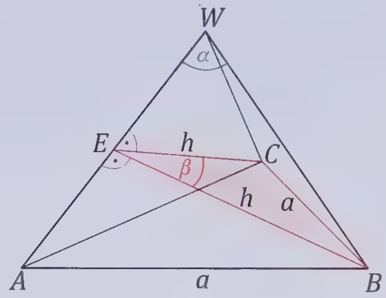
$$|AW| = \sqrt{2}\cdot 2\sqrt{3} = 2\sqrt{6}\ (\text{cm})$$

Wysokość ostrosłupa jest równa $2\sqrt{3}$ cm, a wysokość ściany bocznej $2\sqrt{6}$ cm.

Przykład 4.

W ostrosłupie prawidłowym trójkątnym kąt płaski przy wierzchołku ściany bocznej ma miarę α, zaś kąt dwuścienny między sąsiednimi ścianami bocznymi ma miarę β.

Wykażemy, że $\cos\beta = \dfrac{\cos\alpha}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}$.



Założenie: Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku obok.
$ABCW$ – ostrosłup prawidłowy trójkątny
α – miara kąta płaskiego przy wierzchołku każdej ściany bocznej
β – miara kąta dwuściennego między sąsiednimi ścianami bocznymi
a – długość krawędzi podstawy ostrosłupa
$|BE| = |CE| = h$

Teza: $\cos\beta = \dfrac{\cos\alpha}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}$

Dowód: Z twierdzenia cosinusów zastosowanego do trójkąta CEB wyznaczamy $\cos\beta$.

$$|CB|^2 = |BE|^2 + |CE|^2 - 2 \cdot |BE| \cdot |CE| \cdot \cos\beta, \text{ czyli}$$

$$a^2 = 2h^2 - 2h^2\cos\beta$$

$$\frac{a^2}{2h^2} = 1 - \cos\beta, \qquad \text{skąd}$$

$$(*) \quad \cos\beta = 1 - \frac{a^2}{2h^2}$$

Wyznaczamy h w zależności od a. W tym celu rozważmy trójkąt równoramienny ABW. Kąt przy wierzchołku W – z założenia – jest równy α. Zatem

$$|\sphericalangle BAW| = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$$

W trójkącie prostokątnym ABE mamy $|\sphericalangle BAE| = |\sphericalangle BAW| = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$. Stąd

$$\frac{|EB|}{|AB|} = \sin\left(90^\circ - \frac{\alpha}{2}\right), \text{ więc } \frac{h}{a} = \cos\frac{\alpha}{2} \quad \text{(skorzystaliśmy ze wzoru redukcyjnego)}$$

$$(**) \quad h = a \cdot \cos\frac{\alpha}{2}$$

Wyznaczamy $\cos\beta$ w zależności od cosinusa α. Korzystamy z zależności (*) i (**). Mamy:

$$\cos\beta = 1 - \frac{a^2}{2h^2} = 1 - \frac{a^2}{2 \cdot a^2 \cdot \cos^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{\cos\alpha}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}},$$

co kończy dowód.

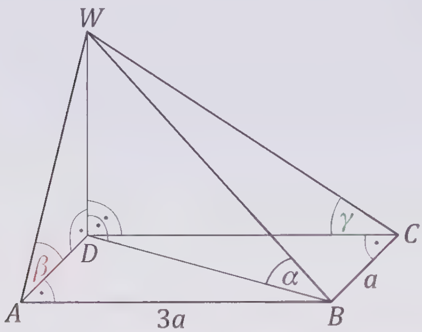
Przykład 5.

Podstawą ostrosłupa jest prostokąt, w którym stosunek długości boków jest równy 3 : 1. Dwie ściany boczne tego ostrosłupa są prostopadłe do płaszczyzny podstawy. Najdłuższa krawędź boczna tworzy z płaszczyzną podstawy kąt α, dla którego

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{30}}{10}$.

a) Wykażemy, że dwie pozostałe ściany boczne są także trójkątami prostokątnymi.
b) Obliczymy miary kątów, jakie tworzą te ściany z płaszczyzną podstawy.

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku poniżej.



$ABCD$ – prostokąt, $|AB| = |CD| = 3a$, $a > 0$
$|AD| = |BC| = a$
ADW i DCW – ściany boczne prostopadłe do płaszczyzny $(ABCD)$
WD – wysokość ostrosłupa
BW – najdłuższa krawędź boczna
$|\sphericalangle DBW| = \alpha$ – kąt, jaki tworzy krawędź BW z płaszczyzną $(ABCD)$
Ponadto oznaczmy:
$|\sphericalangle DAW| = \beta$ i $|\sphericalangle DCW| = \gamma$

Ad a) Wykażemy, że ściana boczna ABW jest trójkątem prostokątnym. W przypadku ściany BCW dowód jest analogiczny. Zauważmy, że

$AD \perp AB$ – bo z założenia podstawa $ABCD$ jest prostokątem

AD jest rzutem prostokątnym odcinka AW, bo $WD \perp (ABCD)$, zatem – na mocy twierdzenia o trzech prostych prostopadłych

$AB \perp AW$, a to znaczy, że $|\sphericalangle BAW| = 90°$, czyli trójkąt ABW jest trójkątem prostokątnym.

Ad b) Pokażemy najpierw, że ściana boczna ABW jest nachylona do płaszczyzny $(ABCD)$ pod kątem β.
Krawędzią przecięcia płaszczyzn (ABW) i $(ABCD)$ jest prosta AB. W celu wyznaczenia odpowiedniego kąta nachylenia prowadzimy płaszczyznę prostopadłą do krawędzi AB. Taką płaszczyzną jest na przykład płaszczyzna (ADW), ponieważ – z punktu a) – wiemy, że

$AB \perp AD$ oraz $AB \perp AW$ (z założenia), czyli – na mocy twierdzenia 1. ze str. 358

$AB \perp$ pł. (ADW), zatem

kąt DAW jest kątem liniowym kąta nachylenia płaszczyzny ściany bocznej do płaszczyzny podstawy, a

$|\sphericalangle DAW| = \beta$

Podobnie można pokazać, że ściana boczna BCW jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem γ. W celu wyznaczenia kątów β i γ obliczymy $\operatorname{tg}\beta$ i $\operatorname{tg}\gamma$. Najpierw wyznaczamy $|DB|$ i $|DW|$. Mamy:

$|BD| = \sqrt{9a^2 + a^2} = a\sqrt{10}$

$\frac{|WD|}{|DB|} = \operatorname{tg}\alpha$, więc $|WD| = a\sqrt{10} \cdot \frac{\sqrt{30}}{10} = a\sqrt{3}$, bo z założenia $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{30}}{10}$

Rozważmy dwa trójkąty prostokątne ADW i DCW. Mamy odpowiednio:

$\frac{|WD|}{|AD|} = \operatorname{tg}\beta$, stąd $\sqrt{3} = \operatorname{tg}\beta$

$\beta = 60°$, bo $\beta \in (0°, 90°)$

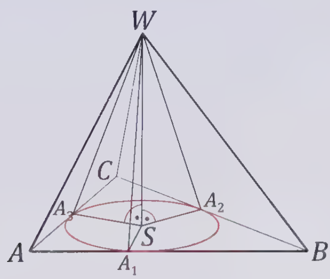
$\frac{|WD|}{|DC|} = \operatorname{tg}\gamma$, stąd $\frac{\sqrt{3}}{3} = \operatorname{tg}\gamma$

$\gamma = 30°$, bo $\gamma \in (0°, 90°)$

Przykład 6.

W ostrosłupie trójkątnym ściany boczne są nachylone do płaszczyzny podstawy pod tym samym kątem. Wykażemy, że spodek wysokości ostrosłupa jest środkiem okręgu wpisanego w podstawę tego ostrosłupa.

Niech dany będzie ostrosłup $ABCW$. Punkt S jest spodkiem wysokości ostrosłupa.



Niech punkty A_1, A_2, A_3 należą odpowiednio do krawędzi AB, BC, AC oraz

$SA_1 \perp AB \qquad SA_2 \perp BC \qquad SA_3 \perp AC$

Z twierdzenia o trzech prostych prostopadłych wynika, że

$WA_1 \perp AB \qquad WA_2 \perp BC \qquad WA_3 \perp AC$

Kąty WA_1S, WA_2S, WA_3S określają zatem miarę nachylenia ścian bocznych do płaszczyzny podstawy.

Z założenia wiemy, że

$|\sphericalangle WA_1S| = |\sphericalangle WA_2S| = |\sphericalangle WA_3S|.$

Stąd wynika, że trójkąty WSA_1, WSA_2 WSA_3 są przystające (na podstawie cechy kbk).

$\Delta WSA_1 \equiv \Delta WSA_2 \equiv \Delta WSA_3$

Zatem

$|SA_1| = |SA_2| = |SA_3|,$

czyli punkt S równo odległy od krawędzi podstawy jest środkiem okręgu wpisanego w podstawę.

W trakcie nauki poznałeś pojęcie okręgu wpisanego w trójkąt i wpisanego w czworokąt. Ogólnie powiemy, że okrąg jest wpisany w wielokąt (wypukły) wtedy, gdy okrąg ten jest styczny do wszystkich boków tego wielokąta. Okrąg można wpisać w dany wielokąt (wypukły) wtedy, gdy istnieje punkt równo odległy od boków wielokąta.

Prawdziwe jest następujące twierdzenie.

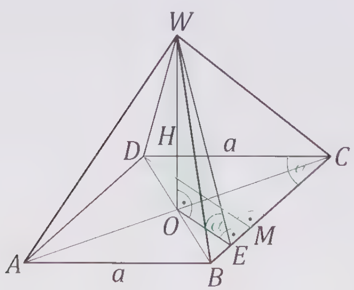
Twierdzenia 2.

W podstawę ostrosłupa można wpisać okrąg i spodek wysokości ostrosłupa jest środkiem tego okręgu wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie ściany boczne ostrosłupa są nachylone do płaszczyzny podstawy pod tym samym kątem.

Przykład 7.

Podstawą ostrosłupa jest romb o kącie ostrym α. Wszystkie ściany boczne są nachylone do płaszczyzny podstawy pod kątem α. Wiedząc, że stosunek wysokości ostrosłupa do długości krawędzi podstawy jest równy $\sqrt{3}$, obliczymy $\cos\alpha$.

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku poniżej.



a – długość boku rombu $ABCD$

h – wysokość rombu $ABCD$, $h = |DM|$

r – promień okręgu wpisanego w romb $ABCD$

$$r = |OE| = \frac{h}{2}$$

α – kąt ostry rombu i kąt nachylenia każdej ściany bocznej ostrosłupa do płaszczyzny podstawy

H – wysokość ostrosłupa $ABCDW$

$$H = |OW|$$

Z treści zadania wiemy, że

(*) $\quad \dfrac{H}{a} = \sqrt{3}$

Wyznaczamy wysokość rombu. Trójkąt DMC jest trójkątem prostokątnym o kącie ostrym α. Mamy:

$$\frac{|DM|}{|DC|} = \sin\alpha, \qquad \text{czyli} \qquad \frac{h}{a} = \sin\alpha, \qquad \text{stąd}$$

(**) $\quad h = a \cdot \sin\alpha$

Wyznaczamy wysokość ostrosłupa. Trójkąt WOE jest trójkątem prostokątnym o kącie ostrym α, więc

$$\frac{|OW|}{|OE|} = \operatorname{tg}\alpha, \qquad \text{czyli} \qquad \frac{H}{r} = \operatorname{tg}\alpha, \qquad \text{stąd} \qquad H = \frac{h}{2} \cdot \operatorname{tg}\alpha$$

Po uwzględnieniu warunku (**) otrzymujemy zależność:

$$(***) \qquad H = \frac{a \cdot \sin\alpha \cdot \operatorname{tg}\alpha}{2},$$

a stąd, po uwzględnieniu warunku (*), dostajemy równanie:

$$\frac{\sin\alpha \cdot \operatorname{tg}\alpha}{2} = \sqrt{3}, \text{ czyli } \frac{\sin^2\alpha}{2\cos\alpha} = \sqrt{3}, \text{ stąd } 1 - \cos^2\alpha = 2\sqrt{3}\cos\alpha$$

Obliczamy $\cos\alpha$.

$$\cos^2\alpha + 2\sqrt{3}\cos\alpha - 1 = 0$$

Podstawiamy zmienną pomocniczą t, $t = \cos\alpha$. Mamy:

$$t^2 + 2\sqrt{3}t - 1 = 0$$

$$\Delta = 16 \qquad t_1 = -\sqrt{3} - 2 \qquad t_2 = 2 - \sqrt{3}, \qquad \text{zatem}$$

$$\cos\alpha = -\sqrt{3} - 2 \qquad \text{równanie sprzeczne, bo } -\sqrt{3} - 2 < -1$$

lub $\qquad \cos\alpha = 2 - \sqrt{3}, \qquad 2 - \sqrt{3} \in (0, 1)$

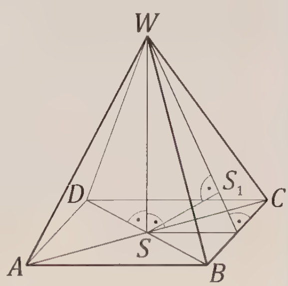
Ostatecznie otrzymaliśmy, że $\cos\alpha = 2 - \sqrt{3}$.

Sprawdź, czy rozumiesz

1. Czy istnieje ostrosłup, którego liczba wszystkich krawędzi jest równa:
   a) 27 b) 36?
   Odpowiedź uzasadnij.

2. Podstawą ostrosłupa jest trójkąt równoboczny ABC o boku mającym długość $4\sqrt{3}$ cm. Wysokość WA tego ostrosłupa jest równa 6 cm. Wyznacz miarę kąta nachylenia ściany bocznej BCW do płaszczyzny podstawy ABC.

3. W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym $ABCDW$ (zobacz rysunek obok) krawędź podstawy ma długość 26 cm. Punkt S jest punktem przecięcia przekątnych podstawy. Odcinek SS_1 jest prostopadły do ściany bocznej BCW i ma długość 12 cm. Wyznacz wysokość tego ostrosłupa.

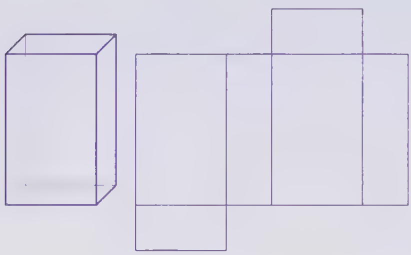


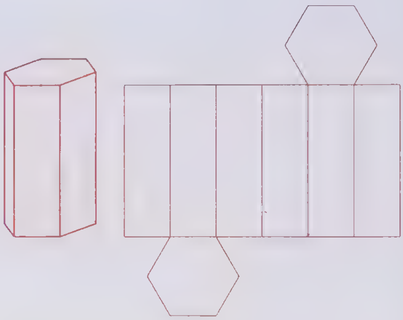
4. Podstawą ostrosłupa jest trójkąt równoramienny ABC, w którym $|AC| = |BC| = 4\sqrt{5}$ cm i $|AB| = 8$ cm. Wiedząc, że wysokość ostrosłupa jest równa 12 cm i wszystkie krawędzie boczne mają taką samą długość, oblicz długość krawędzi bocznych tego ostrosłupa.

Siatka wielościanu. Pole powierzchni wielościanu

Siatka wielościanu to figura płaska, którą otrzymuje się przez „rozcięcie" powierzchni wielościanu wzdłuż niektórych krawędzi tak, aby ściany dały się rozłożyć na płaszczyźnie i były połączone ze sobą niektórymi bokami. Wielościan może mieć wiele różnych siatek.

Poniżej przedstawione są przykłady graniastosłupów i ich siatki.





Pole powierzchni siatki wielościanu jest polem powierzchni całkowitej tego wielościanu.

Przypomnijmy wzór na pole powierzchni całkowitej graniastosłupa:

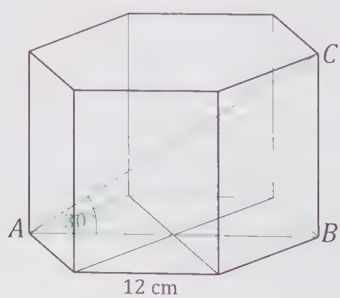
Pole powierzchni całkowitej graniastosłupa P_c jest równe sumie podwojonego pola podstawy P_p i pola powierzchni bocznej P_b graniastosłupa.

$$P_c = 2P_p + P_b$$

Przykład 1.

Obliczymy pole powierzchni całkowitej graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego, w którym najdłuższa przekątna jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem 30°, a krawędź podstawy ma długość 12 cm.

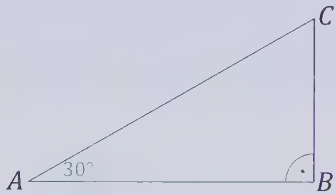
Rysunek poniżej przedstawia graniastosłup prawidłowy sześciokątny, odcinek AC jest najdłuższą przekątną w tym graniastosłupie.



Obliczamy pole podstawy P_p.
Sześciokąt foremny, którego bok ma długość 12 cm, można podzielić na sześć trójkątów równobocznych. Każdy bok takiego trójkąta ma długość 12 cm. Zatem

$$P_p = 6 \cdot \frac{12^2\sqrt{3}}{4} = 216\sqrt{3} \ (\text{cm}^2)$$

Obliczamy długość krawędzi bocznej BC.
Rozważmy trójkąt prostokątny ABC. Odcinek AB ma długość 24 cm (dlaczego?).



$$\frac{|BC|}{|AB|} = \text{tg}\, 30°, \text{ więc } |BC| = 24 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = 8\sqrt{3} \ (\text{cm})$$

Obliczamy pole powierzchni bocznej P_b.
Powierzchnia boczna składa się z sześciu przystających prostokątów o wymiarach 12 cm na $8\sqrt{3}$ cm.

$$P_b = 6 \cdot 12 \cdot 8\sqrt{3} = 576\sqrt{3} \ (\text{cm}^2)$$

Obliczamy pole powierzchni całkowitej P_c

$$P_c = P_b + 2P_p, \text{ więc } P_c = 576\sqrt{3} + 2 \cdot 216\sqrt{3} = 1008\sqrt{3} \ (\text{cm}^2).$$

Pole powierzchni całkowitej graniastosłupa jest równe $1008\sqrt{3}$ cm^2.

Przykład 2.

Przekątna prostopadłościanu ma długość d. Jakie największe pole powierzchni całkowitej może mieć taki prostopadłościan?

Oznaczmy literami a, b, c długości krawędzi wychodzące z jednego wierzchołka. Wówczas prawdziwa jest równość

$$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

(Uzasadnij to dokładnie, wykorzystując twierdzenie Pitagorasa).
Pole powierzchni całkowitej P_c prostopadłościanu możemy zapisać następująco:

$$P_c = 2ab + 2bc + 2ac$$

Ze wzoru na kwadrat różnicy dwóch wyrażeń wynika, że

$$2ab = a^2 + b^2 - (a-b)^2$$

$$2bc = b^2 + c^2 - (b-c)^2$$

$$2ac = a^2 + c^2 - (a-c)^2$$

Stąd

$$P_c = 2(a^2 + b^2 + c^2) - (a-b)^2 - (b-c)^2 - (a-c)^2 = 2d^2 - (a-b)^2 - (b-c)^2 - (a-c)^2$$

Łatwo zauważyć, że P_c przyjmuje największą wartość wtedy, gdy

$(a-b)^2=(b-c)^2=(a-c)^2=0$, czyli wtedy, gdy $a=b=c$.

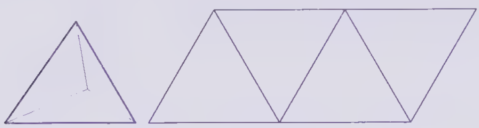
Wówczas

$P_c=2d^2$

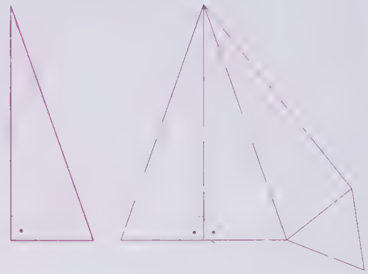
Największe pole powierzchni całkowitej P_c ma sześcian i wtedy $P_c=2d^2$.

Poniżej przedstawione są przykłady ostrosłupów i ich siatki.

a)



b)



Przypomnijmy wzór na pole powierzchni całkowitej ostrosłupa.

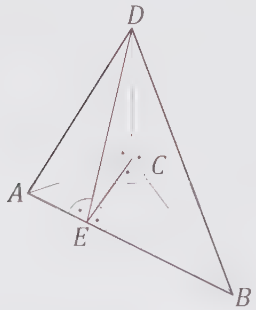
Pole powierzchni całkowitej ostrosłupa P_c jest równe sumie pola podstawy P_p i pola powierzchni bocznej P_b ostrosłupa.

$P_c=P_p+P_b$

Przykład 3.

W ostrosłupie trójkątnym trzy krawędzie o wspólnym końcu są do siebie prostopadłe i mają długość 6 cm, 8 cm i 6,4 cm. Obliczymy pole powierzchni całkowitej tego ostrosłupa.

Szkicujemy ostrosłup tak, aby jego podstawą był trójkąt prostokątny o przyprostokątnych mających długość 6 cm i 8 cm.



Oznaczmy wierzchołki ostrosłupa tak, że

$|AC|=6$ cm

$|BC|=8$ cm

$|DC|=6,4$ cm

Pole powierzchni całkowitej jest równe sumie pól czterech trójkątów: ABC, ABD, ACD i CBD.

$P_c=P_{ABC}+P_{ABD}+P_{ACD}+P_{CBD}$

Obliczamy pola trójkątów ABC, ACD, CBD.

$$P_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 = 24\ (\mathrm{cm}^2) \qquad P_{ACD} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6{,}4 = 19{,}2\ (\mathrm{cm}^2)$$

$$P_{CBD} = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 6{,}4 = 25{,}6\ (\mathrm{cm}^2)$$

Z twierdzenia Pitagorasa zastosowanego do trójkąta prostokątnego ABC wyznaczamy długość odcinka AB.

$$|AB| = 10 \text{ cm}$$

Prowadzimy wysokość CE w trójkącie ABC oraz odcinek DE. Z twierdzenia o trzech prostych prostopadłych wynika, że

$$DE \perp AB$$

Zatem odcinek DE jest wysokością trójkąta ABC.
Obliczamy długość odcinka CE.

$$\frac{1}{2}|AB| \cdot |CE| = \frac{1}{2}|AC| \cdot |BC|, \text{ skąd } \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot |CE| = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8, \text{ zatem } |CE| = 4{,}8\ (\mathrm{cm}).$$

Z twierdzenia Pitagorasa zastosowanego do trójkąta prostokątnego ECD wyznaczamy $|DE|$.

$$|DE| = 8\ (\mathrm{cm})$$

Obliczamy pole trójkąta ABD i pole powierzchni całkowitej ostrosłupa.

$$P_{ABD} = \frac{1}{2}|AB| \cdot |DE| \qquad P_{ABD} = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 8 = 40\ (\mathrm{cm}^2)$$

$$P_c = 19{,}2 + 25{,}6 + 24 + 40 = 108{,}8\ (\mathrm{cm}^2)$$

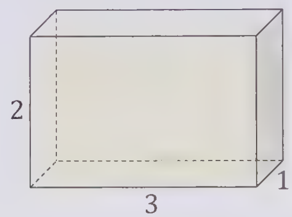
Pole powierzchni całkowitej ostrosłupa jest równe $108{,}8\ \mathrm{cm}^2$.

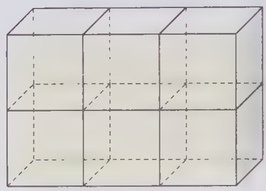
Sprawdź, czy rozumiesz

1. Przekątna sześcianu ma długość 6 cm. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego sześcianu.
2. Oblicz pole powierzchni całkowitej prostopadłościanu o podstawie kwadratowej, jeśli przekątna ściany bocznej ma długość 30 cm oraz kąt między tą przekątną i przekątną prostopadłościanu, wychodzącymi z tego samego wierzchołka, ma miarę 30°.
3. Wysokość ostrosłupa prawidłowego czworokątnego jest równa 2 dm. Kąt dwuścienny między ścianą boczną a podstawą ma miarę 30°. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego ostrosłupa.
4. Podstawą ostrosłupa jest prostokąt o bokach mających długość 12 cm i 3 cm. Wysokość ostrosłupa jest równa 4 cm, a spodek tej wysokości jest jednym z wierzchołków podstawy. Oblicz pole powierzchni bocznej tego ostrosłupa.
5. Pole powierzchni bocznej ostrosłupa prawidłowego trójkątnego jest równe $45\sqrt{3}\ \mathrm{cm}^2$, a pole podstawy – $27\sqrt{3}\ \mathrm{cm}^2$. Oblicz wysokość tego ostrosłupa.

Objętość figury przestrzennej. Objętość wielościanów

Objętość jest liczbą, którą można przyporządkować pewnym figurom przestrzennym. Na początku ustala się jednostkę – sześcian o krawędzi 1 (sześcian jednostkowy). Jeśli na przykład chcemy określić objętość prostopadłościanu o wymiarach 3 na 2 na 1, to dzielimy ten prostopadłościan na sześciany jednostkowe. Bez trudu zauważamy, że tych sześcianów jest sześć, więc objętość tego prostopadłościanu jest równa 6.





W ogólnym przypadku, aby określić objętość figury przestrzennej (bryły) F, buduje się tzw. sieci sześcienne (na wzór sieci kwadratowych konstruowanych przy określaniu pola). Przestrzeń dzieli się na sześciany jednostkowe w taki sposób, że dowolne dwa sześciany albo są rozłączne, albo mają wspólny wierzchołek, albo wspólną krawędź, albo wspólną ścianę. Następnie patrzymy, ile sześcianów zawiera się w bryle F. Sumę ich objętości oznaczamy przez w_1. Następnie ustalamy, ile sześcianów sieci ma co najmniej jeden punkt wspólny z bryłą F. Sumę ich objętości oznaczamy przez z_1. W kolejnym kroku dzielimy każdy z sześcianów sieci na 10^3 (czyli 1000) przystających sześcianików. Każdy z tych mniejszych sześcianików ma objętość równą 0,001 sześcianu jednostkowego. I znów sprawdzamy, ile sześcianików jest zawartych w bryle F i ile sześcianików ma punkty wspólne z bryłą F. Postępując podobnie dalej, tworzymy dwa ciągi:

$w_1, w_2, w_3, w_4, \ldots$

$z_1, z_2, z_3, z_4, \ldots$

Liczby w pierwszym ciągu przybliżają objętość bryły F z niedomiarem, natomiast liczby w drugim ciągu przybliżają objętość tej bryły z nadmiarem (z coraz większą dokładnością). Liczby z pierwszego ciągu dążą do pewnej liczby, którą nazywamy miarą wewnętrzną bryły F. Liczby z drugiego ciągu również dążą do pewnej liczby, którą nazywamy miarą zewnętrzną bryły F. Jeśli obie te miary (wewnętrzna i zewnętrzna) są równe i nie zależą od wyboru sieci i sposobu zagęszczania, to tę wspólną miarę nazywamy **objętością** bryły F.

W klasie pierwszej skonstruowaliśmy figurę płaską, która nie miała pola (kwadrat, umieszczony w układzie współrzędnych, z którego usunięto wszystkie punkty o obu współrzędnych będących liczbami wymiernymi). Spróbuj skonstruować w podobny sposób figurę przestrzenną, która nie ma objętości.

UWAGA: Nie należy mylić objętości zerowej z brakiem objętości (niemożliwością określenia objętości).

Prawdziwe jest następujące twierdzenie.

Twierdzenie 1. (własności objętości)

1) Objętość bryły jest liczbą nieujemną.
2) Objętości brył przystających, wyznaczone przy tej samej jednostce, są równe.
3) Jeśli bryła F składa się z dwóch brył F_1 i F_2, mających objętości i wnętrzami rozłącznych, to objętość bryły F jest równa sumie objętości brył F_1 i F_2 (przy tej samej jednostce).
4) Sześcian o krawędzi jednostkowej ma objętość równą 1.

Zajmiemy się obliczaniem objętości graniastosłupów i ostrosłupów. Przypomnijmy znany Ci z gimnazjum wzór na objętość graniastosłupa.

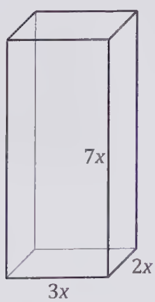
Twierdzenie 2.

Objętość V graniastosłupa jest równa iloczynowi pola podstawy P_p i wysokości h graniastosłupa:

$$V = P_p \cdot h$$

Przykład 1.

Pole powierzchni całkowitej prostopadłościanu jest równe 328 cm^2. Stosunek długości krawędzi wychodzących z jednego wierzchołka wynosi 7 : 3 : 2. Obliczymy objętość tego prostopadłościanu.



Stosunek długości krawędzi wynosi 7 : 3 : 2, to znaczy, że przy pewnej jednostce długości x ($x > 0$) długość krawędzi można zapisać jako $7x$, $3x$, $2x$.
Wyrazimy pole powierzchni całkowitej P_c w zależności od x.

$$P_c = 2(3x \cdot 7x + 7x \cdot 2x + 3x \cdot 2x) = 2(21x^2 + 14x^2 + 6x^2) = 2 \cdot 41x^2 = 82x^2$$

Z warunków zadania wiemy, że

$P_c = 328\ (\text{cm}^2)$, zatem

$82x^2 = 328 \quad /: 82$

$x^2 = 4$

$x = 2 \ \ (\text{bo } x > 0)$

Obliczamy długość krawędzi wychodzących z jednego wierzchołka.

$7 \cdot 2 = 14\ (\text{cm}) \qquad 3 \cdot 2 = 6\ (\text{cm}) \qquad 2 \cdot 2 = 4\ (\text{cm})$

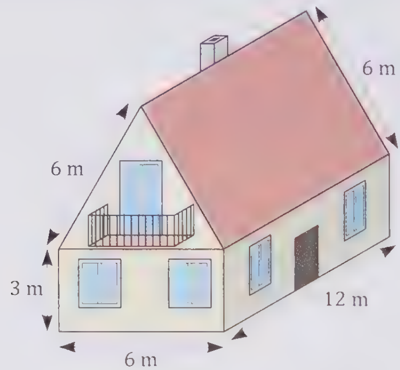
Obliczamy objętość V prostopadłościanu.

$V = 14 \cdot 6 \cdot 4 = 336\ (\text{cm}^3)$

Objętość prostopadłościanu jest równa 336 cm^3.

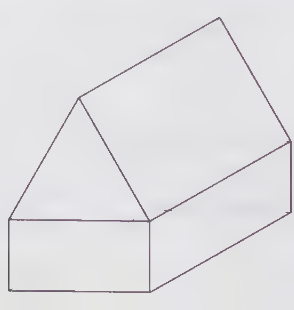
Przykład 2.

Państwo Świerczyńscy kupili dom, którego wymiary podane są na schematycznym rysunku poniżej.

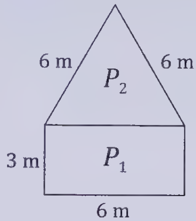


Chcą kupić piec, który ogrzewałby cały dom (włącznie z poddaszem). W sklepie są dwa piece. Pierwszy ogrzewa skutecznie pomieszczenia o łącznej kubaturze do 350 m^3, a drugi – pomieszczenia o łącznej kubaturze do 450 m^3. Czy piec o mniejszej mocy wystarczy do ogrzania domu państwa Świerczyńskich? W obliczeniach pominiemy grubość ścian i grubość dachu.
Kubatura to pojemność (objętość) pomieszczenia lub zbiornika wyrażona zwykle w metrach sześciennych.

Niech graniastosłup pięciokątny prosty na rysunku poniżej reprezentuje dom, którego dotyczy zadanie.



Obliczamy pole podstawy P_p graniastosłupa. Pole podstawy jest równe sumie pola P_1 prostokąta i pola P_2 trójkąta równobocznego.



$$P_1 = 3 \cdot 6 = 18 \ (\mathrm{m}^2)$$

$$P_2 = \frac{6^2\sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3} \ (\mathrm{m}^2)$$

$$P_p = P_1 + P_2$$

$$P_p = 18 + 9\sqrt{3} \ (\mathrm{m}^2)$$

Obliczamy objętość V graniastosłupa. Jego wysokość jest równa 12 m.

$$V = \left(18 + 9\sqrt{3}\right) \cdot 12 = \left(216 + 108\sqrt{3}\right) \ (\mathrm{m}^3)$$

Obliczamy (za pomocą kalkulatora) przybliżenie liczby $216 + 108\sqrt{3}$.

$$216 + 108\sqrt{3} \approx 403$$

Ponieważ $350 < 403 < 450$, więc piec o mniejszej mocy nie wystarczy do ogrzania domu.

Przypomnimy wzór na objętość ostrosłupa.

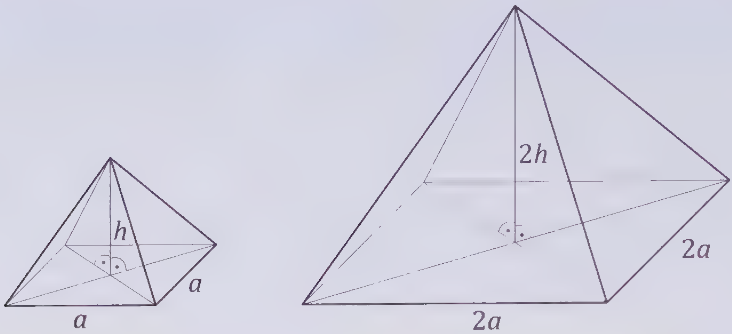
Twierdzenie 3.

Objętość V ostrosłupa jest równa jednej trzeciej iloczynu pola podstawy P_p i wysokości h ostrosłupa:

$$V = \frac{1}{3} \cdot P_p \cdot h$$

Przykład 3.

Dane są dwa ostrosłupy prawidłowe czworokątne. W pierwszym ostrosłupie krawędzie podstawy są dwa razy krótsze niż w drugim ostrosłupie i wysokość w pierwszym ostrosłupie jest dwa razy krótsza niż w drugim ostrosłupie. Ile razy objętość drugiego ostrosłupa jest większa od objętości pierwszego ostrosłupa?



Niech a oznacza długość krawędzi podstawy w pierwszym (mniejszym) ostrosłupie, h – wysokość w tym ostrosłupie. Wówczas objętość V_1 tego ostrosłupa jest równa

$$V_1 = \frac{1}{3}a^2 \cdot h$$

Długość krawędzi podstawy w drugim (większym) ostrosłupie jest równa $2a$, natomiast wysokość – $2h$. Objętość V_2 tego ostrosłupa jest równa

$$V_2 = \frac{1}{3}(2a)^2 \cdot 2h = \frac{8}{3}a^2 \cdot h$$

Obliczamy stosunek objętości ostrosłupów.

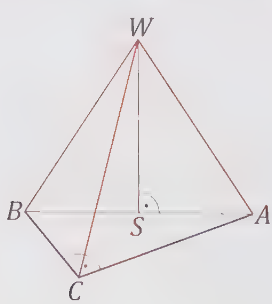
$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{\frac{8}{3}a^2h}{\frac{1}{3}a^2h} = 8$$

Drugi ostrosłup ma objętość 8 razy większą od objętości pierwszego ostrosłupa.

Przykład 4.

Podstawą ostrosłupa jest trójkąt prostokątny. Przyprostokątne tego trójkąta mają długość 14 cm i 48 cm. Krawędzie boczne mają jednakową długość równą 65 cm. Obliczymy objętość tego ostrosłupa.

Krawędzie boczne mają jednakową długość, zatem ostrosłup jest prosty (twierdzenie 1. str. 381) i spodek S wysokości ostrosłupa jest środkiem okręgu opisanego na podstawie. Środkiem okręgu opisanego na trójkącie prostokątnym – jak zapewne pamiętasz z klasy pierwszej – jest środek przeciwprostokątnej tego trójkąta.



Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku powyżej. Mamy:

$|BC| = 14$ cm, $|AC| = 48$ cm, $|AW| = |BW| = |CW| = 65$ cm, $|BS| = |SA|$

Z twierdzenia Pitagorasa zastosowanego do trójkąta prostokątnego ABC wynika, że

$|AB| = 50$ cm

Punkt S jest spodkiem wysokości ostrosłupa, więc

$|BS| = \frac{1}{2}|AB|$, czyli

$|BS| = 25$ cm

Obliczamy wysokość WS ostrosłupa, stosując twierdzenie Pitagorasa do trójkąta prostokątnego BSW. Otrzymujemy:

$|WS| = 60$ cm

Obliczamy pole podstawy P_p ostrosłupa.

$$P_p = \frac{1}{2}|BC| \cdot |AC|$$

$$P_p = \frac{1}{2} \cdot 14 \cdot 48 = 336 \left(\text{cm}^2\right)$$

Obliczamy objętość V ostrosłupa.

$$V = \frac{1}{3} \cdot P_p \cdot |WS|$$

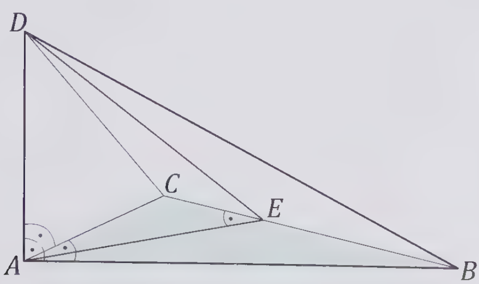
$$V = \frac{1}{3} \cdot 336 \cdot 60 = 6720 \left(\text{cm}^3\right)$$

Objętość ostrosłupa jest równa 6720 cm^3.

Przykład 5.

W ostrosłupie trójkątnym $ABCD$ krawędzie AB, AC i AD są parami prostopadłe oraz $|AB| = 20$, $|AC| = 15$ i $|AD| = 9$. Wyznaczymy odległość wierzchołka A od płaszczyzny (BCD).

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku poniżej.



I sposób

Dodatkowo oznaczmy przez H odległość punktu A od płaszczyzny (BCD).
Zauważ, że odległość punktu A od płaszczyzny (BCD) jest wysokością ostrosłupa $ABCD$.
Obliczymy objętość V ostrosłupa, którą można zapisać jako:

(*) $V = \frac{1}{3} \cdot P_{BCD} \cdot H,$ gdzie P_{BCD} jest polem trójkąta BCD

Oczywiście objętość ostrosłupa można też obliczyć tak:

(**) $V = \frac{1}{3} \cdot P_{ABC} \cdot |AD|,$ gdzie P_{ABC} jest polem trójkąta ABC

Wykorzystując wzory (*) i (**), otrzymujemy zależność:

(***) $P_{BCD} \cdot H = P_{ABC} \cdot |AD|,$

która umożliwia obliczenie H. Tak więc obliczamy najpierw P_{ABC}. Mamy:

$$P_{ABC} = \frac{1}{2}|AC| \cdot |AB|, \qquad \text{skąd} \qquad P_{ABC} = 150$$

Następnie obliczamy: $|BC|$, wysokość AE trójkąta ABC i $|DE|$. Zatem

$$|BC| = \sqrt{|AB|^2 + |AC|^2} = \sqrt{20^2 + 15^2} = 25$$

$$|AE| = \frac{2 \cdot P_{ABC}}{|BC|} = \frac{2 \cdot 150}{25} = 12$$

$$|DE| = \sqrt{|AD|^2 + |AE|^2} = \sqrt{9^2 + 12^2} = 15$$

Z twierdzenia o trzech prostych prostopadłych wynika, że $DE \perp BC$ (przeanalizuj to dokładnie!), czyli DE jest wysokością trójkąta BCD. Teraz możemy już obliczyć P_{BCD}.

$$P_{BCD} = \frac{1}{2}|BC| \cdot |DE|, \qquad \text{skąd} \qquad P_{BCD} = 187{,}5$$

Obliczamy H, stosujemy wzór (***).

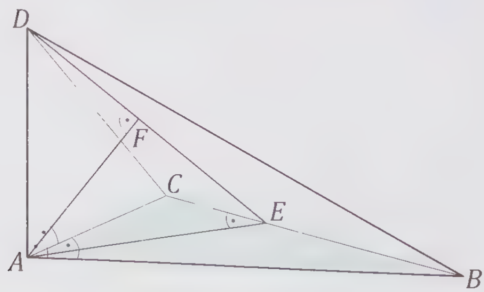
$$187{,}5 \cdot H = 150 \cdot 9$$

$$H = 7{,}2$$

Odległość wierzchołka A od płaszczyzny (BCD) jest równa 7,2.

II sposób

Prowadzimy wysokość AF ostrosłupa. Wykażemy, że spodek tej wysokości leży na odcinku DE.



W tym celu wystarczy pokazać, że płaszczyzny (BCD) i (AED) są prostopadłe.
Zauważmy, że

$$AE \perp BC \text{ oraz } DE \perp BC$$

(zobacz I sposób), więc pr. BC jest prostopadła do płaszczyzny (AED). Zatem płaszczyzna (BCB) – zawierająca prostą BC – jest prostopadła do płaszczyzny (AED).

Rozważmy trójkąt prostokątny AED.
W tym trójkącie odcinek AF jest wysokością. Pole P_{AED} trójkąta AED zapisujemy na dwa sposoby.

$$P_{AED} = \frac{1}{2}|AE| \cdot |AD| \quad \text{i} \quad P_{AED} = \frac{1}{2}|DE| \cdot |AF|$$

Mamy:

$$|AE| = 12 \qquad |AD| = 9 \qquad |DE| = 15, \text{ więc}$$

$$12 \cdot 9 = 15 \cdot |AF|$$

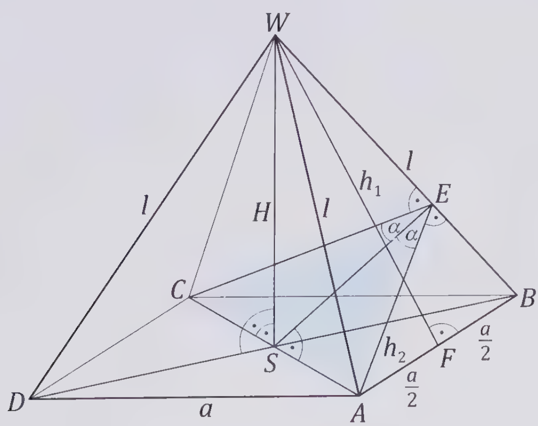
$$|AF| = 7{,}2$$

Odległość wierzchołka A od płaszczyzny (BCD) jest równa 7,2.

Przykład 6.

W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym krawędź boczna ma długość l, a kąt dwuścienny między sąsiednimi ścianami bocznymi ma miarę 2α. Wyznaczymy objętość tego ostrosłupa (w zależności od l i α).

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku poniżej.



$$|AW| = |BW| = |CW| = |DW| = l$$

a – długość krawędzi podstawy
H – wysokość ostrosłupa
h_1 – wysokość ściany bocznej poprowadzonej na bok AB
h_2 – wysokość ściany bocznej poprowadzonej na bok WB

Prosta WB jest prostopadła do płaszczyzny (CAE) (uzasadnij to!).

Wyznaczamy $|SA|$ w zależności od a.

$$|SA| = \frac{1}{2}|CA| = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

Wyznaczamy h_2 w zależności od α. Trójkąt CAE jest równoramienny, więc

$$SE \perp AC \quad \text{i} \quad |\sphericalangle CES| = |\sphericalangle SEA| = \alpha$$

$$\frac{|SA|}{|AE|} = \sin\alpha, \quad \alpha \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{h_2} = \sin\alpha, \qquad \text{więc}$$

$$h_2 = \frac{a\sqrt{2}}{2\sin\alpha}$$

Wyznaczamy h_1 w zależności od a.

$$h_1 = \sqrt{l^2 - \frac{a^2}{4}}$$

Obliczamy kwadrat długości krawędzi podstawy ostrosłupa. Pole P_{ABW} trójkąta ABW zapisujemy na dwa sposoby.

$$P_{ABW} = \frac{1}{2}\cdot a \cdot h_1 = \frac{1}{2}\cdot l \cdot h_2$$

$$\frac{1}{2}\cdot a \cdot \sqrt{l^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{1}{2}\cdot l \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2\sin\alpha} \qquad / : \frac{1}{2}a$$

$$(*) \qquad \sqrt{l^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{l\sqrt{2}}{2\sin\alpha}$$

Obie strony równania (*) są dodatnie, więc po podniesieniu ich do kwadratu otrzymamy równanie równoważne.

$$l^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{2l^2}{4\sin^2\alpha}, \qquad \text{stąd}$$

$$a^2 = 4l^2\left(1 - \frac{1}{2\sin^2\alpha}\right),$$

co możemy zapisać krócej

$$a^2 = 2l^2 \cdot \frac{(-\cos 2\alpha)}{\sin^2\alpha} \qquad \text{(sprawdź!)}$$

Obliczamy H, korzystamy z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta SBW.

$$H = \sqrt{l^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2}$$

$$H = \sqrt{l^2 - \frac{a^2}{2}} \quad \text{i} \quad a^2 = 2l^2 \frac{(-\cos 2\alpha)}{\sin^2\alpha},$$

skąd po przekształceniach (wykonaj je!) otrzymujemy:

$$H = \frac{l \cdot \cos\alpha}{\sin\alpha}$$

Obliczamy objętość V ostrosłupa.

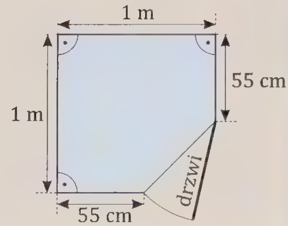
$$V = \frac{1}{3} \cdot P_p \cdot H, \text{ gdzie } P_p = a^2$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot 2l^2 \frac{(-\cos 2\alpha)}{\sin^2\alpha} \cdot \frac{l \cdot \cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{-2}{3} \cdot l^3 \cdot \frac{\cos 2\alpha \cdot \cos\alpha}{\sin^3\alpha}$$

Objętość ostrosłupa jest równa $\frac{-2}{3} \cdot l^3 \cdot \frac{\cos 2\alpha \cdot \cos\alpha}{\sin^3\alpha}$.

Sprawdź, czy rozumiesz

1. Jedna z krawędzi prostopadłościanu ma długość 5 cm, a stosunek długości dwóch pozostałych jest równy 3 : 2. Wiedząc, że pole powierzchni całkowitej tego prostopadłościanu wynosi 258 cm^2, oblicz objętość prostopadłościanu.
2. W graniastosłupie prawidłowym trójkątnym pole powierzchni bocznej jest równe sumie pól obu podstaw. Objętość graniastosłupa wynosi 1 dm^3. Oblicz długość krawędzi podstawy i wysokość graniastosłupa.
3. Podstawą graniastosłupa prostego jest romb, w który wpisano okrąg o promieniu 10 cm. Kąt ostry rombu ma miarę 30°, a kąt między przekątną ściany bocznej i krawędzią podstawy ma miarę 45°. Oblicz objętość tego graniastosłupa.
4. Szafa ma kształt graniastosłupa prostego o wysokości 2 m. Podstawę tej szafy wraz z wymiarami przedstawia rysunek obok. Oblicz pojemność tej szafy. Wynik podaj w litrach.



Przekroje wielościanów – konstrukcje

Przekrojem wielościanu płaszczyzną π nazywamy figurę, która jest częścią wspólną płaszczyzny π i tego wielościanu.

Przekrojem wielościanu może być punkt, odcinek, wielokąt lub zbiór pusty. W dalszej części tematu będziemy zajmować się takimi przekrojami wielościanów, które są wielokątami.

Omówimy wyznaczanie przekrojów wielościanów w przypadku, gdy płaszczyzna przekroju określona jest przez podanie trzech niewspółliniowych punktów.

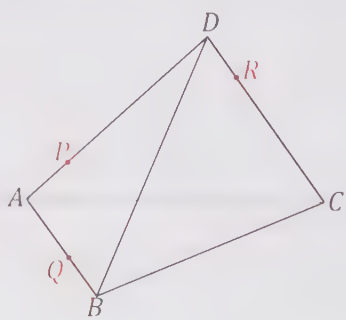
Aby przedstawić na rysunku przekrój płaszczyzną π danego wielościanu, wystarczy skonstruować punkty przecięcia płaszczyzny π z krawędziami wielościanu i połączyć punkty leżące na tej samej ścianie. Oczywiście kolejność wyznaczania wierzchołków przekroju nie jest istotna, natomiast konstrukcja powinna być zgodna z aksjomatami i twierdzeniami stereometrii.

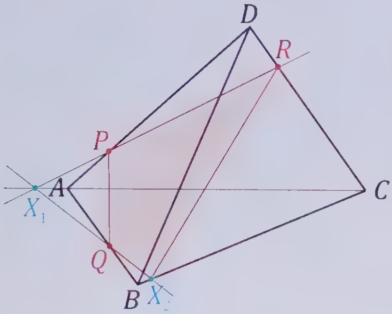
Przypomnijmy:

1) Aby wyznaczyć krawędź przecięcia dwóch płaszczyzn (np. płaszczyzny przekroju i płaszczyzny zawierającą ścianę wielościanu), wystarczy wyznaczyć dwa punkty, z których każdy należy do obu płaszczyzn. Wówczas prosta wyznaczona przez te punkty jest krawędzią przecięcia danych płaszczyzn.
2) Aby wyznaczyć punkt, w którym prosta k przebija płaszczyznę π, wystarczy wyznaczyć punkt przecięcia prostej k i prostej l, która jest krawędzią przecięcia płaszczyzny π i dowolnej płaszczyzny π_1 zawierającej prostą k (zobacz przykład 1., str. 346).

Przykład 1.

Na rysunku przedstawiony jest ostrosłup trójkątny $ABCD$, punkty P, Q, R leżą odpowiednio na krawędziach tego ostrosłupa. Skonstruujemy przekrój ostrosłupa $ABCD$ płaszczyzną (PQR).





Opis konstrukcji:

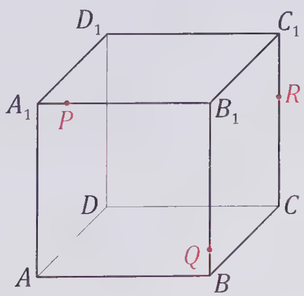
- Wyznaczamy punkt przecięcia prostych PR i AC (te proste leżą na płaszczyźnie (ACD)). Otrzymujemy punkt X_1.
- Punkt X_1 leży też na płaszczyźnie (ABC), podobnie jak punkt Q. Wyznaczamy punkt przecięcia prostej X_1Q i krawędzi BC. Otrzymujemy punkt X_2.
- Czworokąt PQX_2R jest szukanym przekrojem.

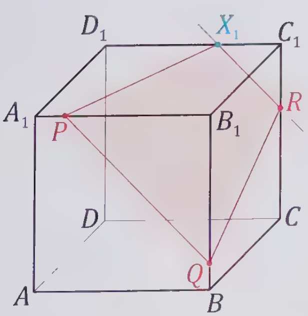
Uzasadnienie poprawności konstrukcji:

Punkty P, Q należą (z założenia) do płaszczyzny przekroju, więc (zgodnie z aksjomatem A5) prosta PQ leży na płaszczyźnie przekroju. W szczególności punkt X_1 leży na płaszczyźnie przekroju. Podobnie, można stwierdzić, że ponieważ punkty X_1 i Q leżą na płaszczyźnie przekroju, to prosta X_1Q też zawiera się w tej płaszczyźnie, a więc i punkt X_2 należy do tej płaszczyzny. Zatem konstrukcja została wykonana poprawnie.

Przykład 2.

Na rysunku przedstawiony jest sześcian $ABCDA_1B_1C_1D_1$, punkty P, Q, R leżą odpowiednio na krawędziach tego sześcianu. Skonstruujemy przekrój sześcianu $ABCDA_1B_1C_1D_1$ płaszczyzną (PQR).





Opis konstrukcji:

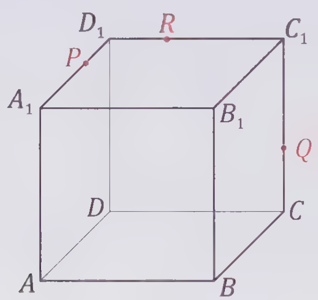
- Przez punkt R prowadzimy prostą równoległą do prostej PQ. Ta prosta leży na płaszczyźnie (DCC_1D_1) i przecina krawędź D_1C_1 w punkcie X_1.
- Czworokąt $PQRX_1$ jest szukanym przekrojem sześcianu.

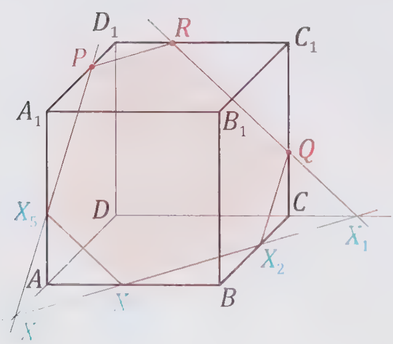
Uzasadnienie poprawności konstrukcji:

Ściany sześcianu ABB_1A_1 i DCC_1D_1 leżą na płaszczyznach równoległych. Płaszczyzna przekroju (PQR) przecina te płaszczyzny. Zgodnie z twierdzeniem 6. ze str. 351, jeśli płaszczyzna przecina dwie płaszczyzny równoległe, to krawędzie przecięcia tych płaszczyzn są prostymi równoległymi. Z konstrukcji wiemy, że prosta RX_1 leży na płaszczyźnie (DCC_1D_1) i jest równoległa do prostej PQ. Jest więc krawędzią przecięcia płaszczyzny (DCC_1D_1) i płaszczyzny przekroju (PQR). W szczególności punkt X_1 leży na płaszczyźnie (PQR).

Przykład 3.

Na rysunku przedstawiony jest sześcian $ABCDA_1B_1C_1D_1$, punkty P, Q, R leżą odpowiednio na krawędziach tego sześcianu. Skonstruujemy przekrój sześcianu $ABCDA_1B_1C_1D_1$ płaszczyzną (PQR).





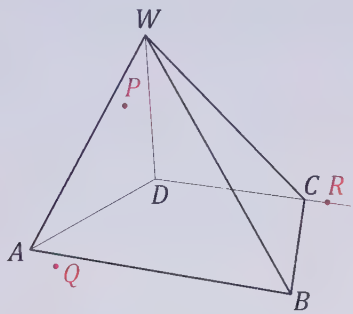
Opis konstrukcji:

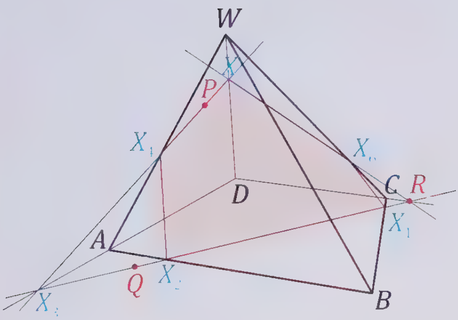
- Wyznaczamy punkt przecięcia prostych QR i CD (te proste leżą na płaszczyźnie (DCC_1D_1)). Otrzymujemy punkt X_1.
- Przez punkt X_1 prowadzimy prostą równoległą do prostej PR. Prosta przechodząca przez punkt X_1 leży na płaszczyźnie $(ABCD)$ i przecina krawędzie BC i AB odpowiednio w punktach X_2 i X_3 oraz prostą AD w punkcie X_4.
- Punkty X_4 i P leżą na płaszczyźnie (ADD_1A_1), jak i prosta AA_1. Prowadzimy prostą X_4P, która przecina krawędź AA_1 w punkcie X_5.
- Sześciokąt $QRPX_5X_3X_2$ jest szukanym przekrojem.

Wykaż, że powyższa konstrukcja jest poprawna.

Przykład 4.

Na rysunku poniżej przedstawiony jest ostrosłup czworokątny $ABCDW$. Punkt P leży na płaszczyźnie (ADW), punkt Q leży na płaszczyźnie $(ABCD)$, punkt R leży na prostej DC. Skonstruujemy przekrój ostrosłupa $ABCDW$ płaszczyzną (PQR).





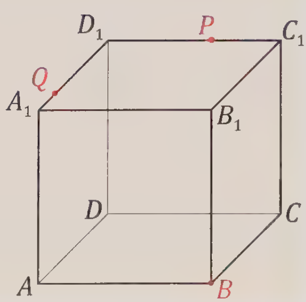
Opis konstrukcji:

- Punkty Q i R leżą w płaszczyźnie $(ABCD)$. Prowadzimy prostą QR, która przecina krawędzie BC i AB odpowiednio w punktach X_1 i X_2, a prostą AD w punkcie X_3.
- Punkty X_3 i P leżą na płaszczyźnie (ADW). Prowadzimy prostą X_3P, która przecina krawędzie AW i DW w punktach X_4 i X_5.
- Punkty X_5 i R leżą w płaszczyźnie (DCW). Prowadzimy prostą X_5R, która przecina krawędź CW w punkcie X_6.
- Pięciokąt $X_6X_5X_4X_2X_1$ jest szukanym przekrojem.

Wykaż, że powyższa konstrukcja jest poprawna.

Sprawdź, czy rozumiesz

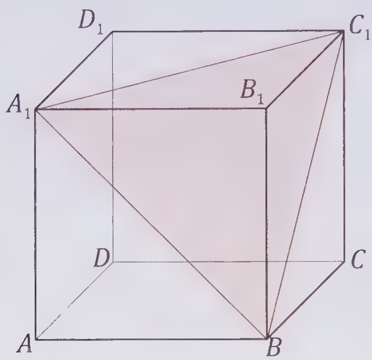
1. Rysunek obok przedstawia sześcian $ADCDA_1B_1C_1D_1$. Punkty P, Q należą odpowiednio do krawędzi C_1D_1 i A_1D_1. Przerysuj rysunek do zeszytu i skonstruuj przekrój sześcianu płaszczyzną (PQB).

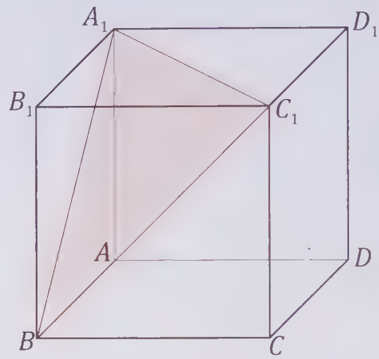


Przekroje wielościanów – zadania

Przykład 1.

Sześcian $ABCDA_1B_1C_1D_1$ przecięto płaszczyzną przechodzącą przez punkty A_1, B, C_1. Obliczymy pole otrzymanego przekroju, wiedząc, że krawędź sześcianu ma długość $\sqrt{8}$ cm.





Szukanym przekrojem jest trójkąt równoboczny A_1BC_1 (każdy bok trójkąta jest równy przekątnej ściany sześcianu). Obliczamy długość boku a tego trójkąta (korzystamy ze wzoru na przekątną kwadratu).

$$a = \sqrt{2} \cdot \sqrt{8} = \sqrt{16} = 4 \text{ (cm)}$$

Wyznaczamy pole P trójkąta równobocznego A_1BC_1.

$$P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4},$$

więc

$$P = \frac{4^2\sqrt{3}}{4} = 4\sqrt{3} \ (\text{cm}^2)$$

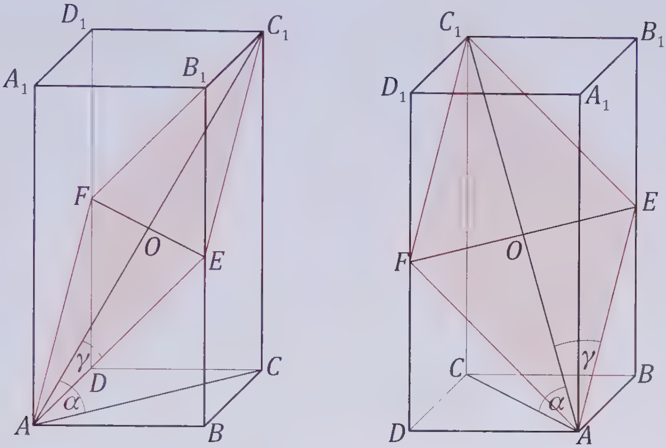
Pole przekroju jest równe $4\sqrt{3}$ cm^2.

Przykład 2.

Dany jest prostopadłościan $ABCDA_1B_1C_1D_1$, którego podstawa $ABCD$ jest kwadratem. Przez punkty A, C_1, E, F, gdzie E i F są odpowiednio środkami krawędzi BB_1 i DD_1, poprowadzono płaszczyznę przekroju (zobacz rysunek poniżej). Wykażemy, że:

a) przekrojem prostopadłościanu jest romb,

b) $\cos\alpha = \operatorname{tg}\gamma$, gdzie α jest miarą kąta nachylenia płaszczyzny przekroju do płaszczyzny podstawy, a 2γ jest miarą kąta ostrego rombu.



Ad a) Zauważmy, że płaszczyzna przekroju przecina cztery ściany boczne. Płaszczyzny (ABB_1A_1) i (DCC_1D_1) są równoległe, więc krawędzie przecięcia z płaszczyzną przekroju (AEC_1F) też są równoległe (zobacz twierdzenie 6. ze str. 351). Zatem

$$AE \parallel FC_1$$

Rozumując podobnie, otrzymujemy, że

$$AF \parallel EC_1$$

Tak więc przekrój AEC_1F jest równoległobokiem.
Rozpatrzmy dwa kolejne boki tego równoległoboku, np. AE i EC_1. Pokażemy, że mają taką samą długość. Wiemy, że

$|AB| = |B_1C_1|$ – podstawą prostopadłościanu jest kwadrat

$|BE| = |B_1E|$ – punkt E jest środkiem krawędzi BB_1

$|\sphericalangle ABE| = |\sphericalangle EB_1C_1| = 90°$,

stąd (na podstawie cechy bkb przystawania trójkątów)

$\Delta ABE \equiv \Delta C_1B_1E$, a zatem

$|AE| = |EC_1|$

Czworokąt AEC_1F jest równoległobokiem, którego dwa kolejne boki mają równą długość, a więc jest rombem.

Ad b) W naszym przypadku kąt nachylenia płaszczyzny przekroju do płaszczyzny podstawy jest kątem między przekątną prostopadłościanu a przekątną podstawy prostopadłościanu (zobacz rysunek powyżej), tak więc

$|\sphericalangle CAC_1| = \alpha,$ zatem

$$\cos\alpha = \frac{|AC|}{|AC_1|}$$

Oznaczmy punkt przecięcia przekątnych rombu przez O. Przekątne rombu dzielą jego kąty wewnętrzne na połowy, zatem

$|\sphericalangle OAE| = \gamma$

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{|OE|}{|AO|} = \frac{\frac{1}{2}|FE|}{\frac{1}{2}|AC_1|} = \frac{\frac{1}{2}|DB|}{\frac{1}{2}|AC_1|} = \frac{\frac{1}{2}|AC|}{\frac{1}{2}|AC_1|} = \frac{|AC|}{|AC_1|} = \cos\alpha,$$

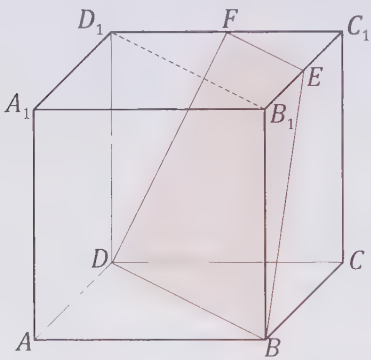
co kończy dowód.

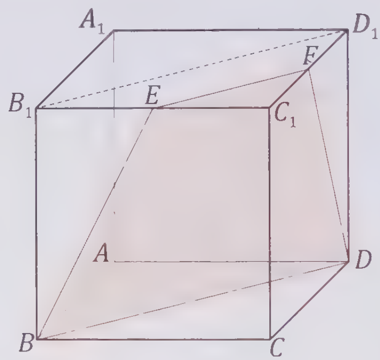
Przykład 3.

Dany jest sześcian $ABCDA_1B_1C_1D_1$, który przecięto płaszczyzną przechodzącą przez punkty D, B, E, F, gdzie punkty E i F są odpowiednio środkami krawędzi B_1C_1 oraz C_1D_1 (zobacz rysunki poniżej). Krawędź sześcianu ma długość $2\sqrt{2}$ cm.

a) Obliczymy obwód przekroju $DBEF$.

b) Wykażemy, że przekątne czworokąta $DBEF$ są prostopadłe.





Ad a) Płaszczyzna przekroju przecina cztery ściany sześcianu, z których dwie – płaszczyzny $(ABCD)$ i $(A_1B_1C_1D_1)$ – są równoległe. Zatem odcinki BD i EF są równoległe. Tak więc przekrój $DBEF$ jest trapezem. Jest to trapez równoramienny (uzasadnij to dokładniej).

Obliczamy długość dłuższej podstawy trapezu $DBEF$ (korzystamy ze wzoru na przekątną kwadratu).

$$|BD| = \sqrt{2}\,|AB|$$

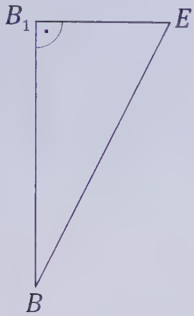
$$|BD| = \sqrt{2}\cdot 2\sqrt{2} = 4 \text{ (cm)}$$

Obliczamy długość krótszej podstawy trapezu $DBEF$ (korzystamy z twierdzenia o odcinku łączącym środki boków trójkąta $D_1B_1C_1$).

$$|FE| = \frac{1}{2}|D_1B_1|, \text{ gdzie } |D_1B_1| = |DB| = 4 \text{ cm}$$

$$|FE| = 2 \text{ cm}$$

Wyznaczamy długość ramienia BE trapezu $DBEF$. W tym celu rozpatrzmy trójkąt prostokątny BEB_1.



Mamy:

$$|BB_1| = 2\sqrt{2}\ \text{(cm)}$$

$$|B_1E| = \frac{1}{2}|BB_1| = \frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{2} = \sqrt{2}\ \text{(cm)}$$

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta BEB_1 obliczamy długość odcinka BE.

$$|BE|^2 = |BB_1|^2 + |B_1E|^2$$

$$|BE|^2 = \left(2\sqrt{2}\right)^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2$$

$$|BE| = \sqrt{10}\ \text{(cm)}$$

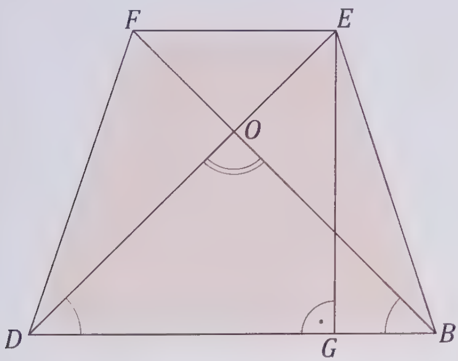
Obliczamy obwód trapezu $DBEF$.

$$Obw = |BD| + 2\cdot|BE| + |FE|$$

$$Obw = 4 + 2\cdot\sqrt{10} + 2 = 6 + 2\sqrt{10}\ \text{(cm)}$$

Obwód trapezu $DBEF$ jest równy $\left(6 + 2\sqrt{10}\right)$ cm.

Ad b) Naszkicujmy trapez $DBEF$. Niech przekątne tego trapezu przecinają się w punkcie O, a odcinek EG będzie wysokością trapezu.



Obliczamy $|EG|$. Mamy

$$|GB| = \frac{|DB| - |FE|}{2}$$ (uzasadnij to), więc

$$|GB| = \frac{4-2}{2} = 1\ \text{(cm)}$$

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta prostokątnego GBE otrzymujemy:

$$|EG|^2 = |BE|^2 - |GB|^2$$

$$|EG|^2 = \left(\sqrt{10}\right)^2 - 1^2 = 9$$

$$|EG| = 3\ \text{(cm)}$$

Obliczamy $|DG|$.

$$|DG| = |DB| - |GB|$$

$$|DG| = 4 - 1 = 3\ \text{(cm)}$$

Ponieważ $|EG| = |DG| = 3$ cm, więc trójkąt DGE jest trójkątem prostokątnym równoramiennym,

$$|\sphericalangle EDG| = 45^\circ$$

Podobnie można pokazać, że

$$|\sphericalangle DBF| = 45^\circ$$

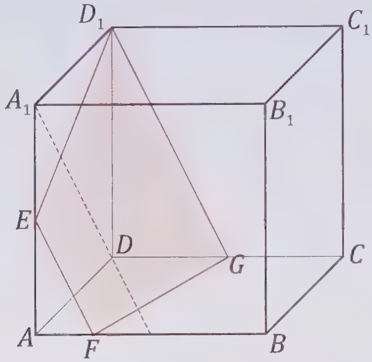
Zatem trójkąt DBO jest trójkątem równoramiennym, w którym kąty równe mają po 45°. Trzeci kąt ($\sphericalangle DOB$) jest więc kątem prostym, a to znaczy, że przekątne trapezu $DBEF$ przecinają się pod kątem prostym.

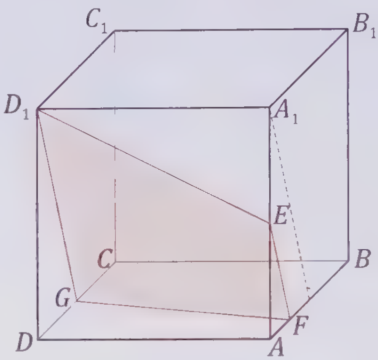
Przykład 4.

Sześcian $ABCDA_1B_1C_1D_1$ przecięto płaszczyzną przechodzącą przez punkty D_1, E, G, gdzie E i G są odpowiednio środkami krawędzi AA_1 i DC. Wykażemy, że:

a) otrzymany przekrój D_1EFG jest trapezem, w którym dłuższa podstawa ma taką długość jak dłuższe ramię

b) przekątna GE zawiera się w dwusiecznej kąta FED_1.





Ad a) Płaszczyzna przekroju przecina dwie równoległe ściany sześcianu (ABB_1A_1 i DCC_1D_1), zatem otrzymane w wyniku przecięcia odcinki EF i D_1G są do siebie równoległe:

$EF \parallel D_1G$

Czworokąt $EFGD_1$ jest więc trapezem. Łatwo stwierdzić, że

$|EF| < |D_1G|$ i $|FG| < |ED_1|$

Wykażemy, że $|D_1G| = |ED_1|$. Rozpatrzmy dwa trójkąty DGD_1 i D_1EA_1. Mamy

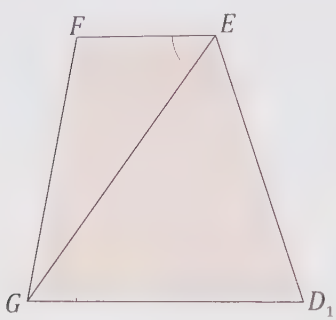
$|DG| = |EA_1|$ i $|DD_1| = |D_1A_1|$ oraz $|\sphericalangle D_1DG| = |\sphericalangle D_1A_1E| = 90°$

Zatem z cechy bkb przystawania trójkątów

$\Delta\, DGD_1 \equiv \Delta\, D_1EA_1$, skąd

$|D_1G| = |ED_1|$

Ad b) Naszkicujmy trapez D_1EFG wraz z przekątną GE. W punkcie a) wykazaliśmy, że $|D_1G| = |ED_1|$.



Z tego wynika, że trójkąt GD_1E jest trójkątem równoramiennym, zatem ma równe kąty przy podstawie,

(1) $|\sphericalangle D_1GE| = |\sphericalangle GED_1|$

Z twierdzenia o dwóch prostych równoległych (pr. $GD_1 \parallel$ pr. FE) przeciętych trzecią prostą (pr. GE) wynika, że

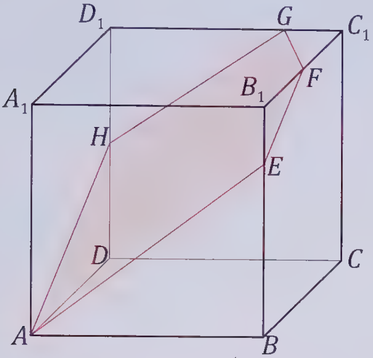
(2) $|\sphericalangle D_1GE| = |\sphericalangle GEF|$

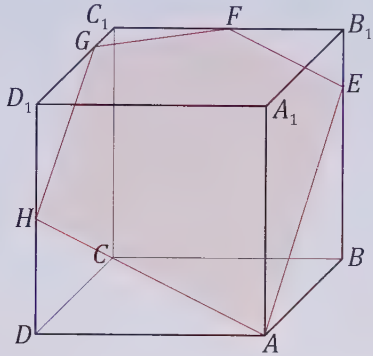
Z punktów (1) i (2) otrzymujemy

$|\sphericalangle GED_1| = |\sphericalangle GEF|$

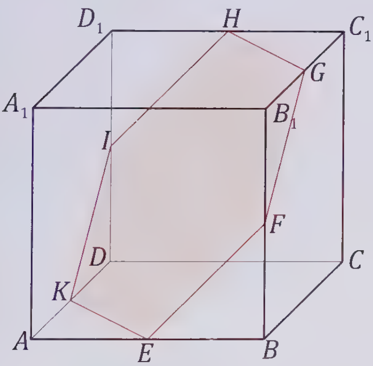
A to znaczy, że przekątna GE zawiera się w dwusiecznej kąta FED_1.

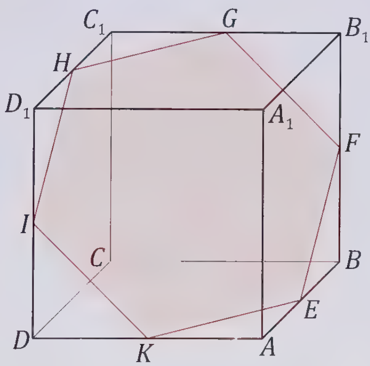
Na koniec tego tematu przedstawimy jeszcze dwa przekroje sześcianu. W pierwszym przypadku przekrojem jest pięciokąt $AEFGH$.





W drugim przypadku przekrojem sześcianu jest sześciokąt foremny $EFGHIK$. Tu punkty: E, F, G, H, I, K są środkami odpowiednich krawędzi.





Sprawdź, czy rozumiesz

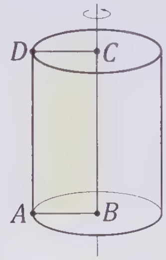
1. Czy przekrojem sześcianu może być trójkąt równoramienny (nierównoboczny) oraz trójkąt różnoboczny? Jeśli tak – wykonaj odpowiednie rysunki.
2. Czy przekrojem prostopadłościanu może być prostokąt nieprzystający do żadnej ze ścian? Odpowiedź uzasadnij.
3. Przekrojem sześcianu jest sześciokąt foremny (zobacz rysunki powyżej). Wiedząc, że krawędź sześcianu ma długość $6\sqrt{2}$ cm, oblicz obwód i pole tego sześciokąta.
4. Przekrojem sześcianu jest pięciokąt $AEFGH$ (zobacz rysunki u góry strony). Wiedząc, że punkt H jest środkiem krawędzi DD_1, a punkt F – środkiem krawędzi B_1C_1, oblicz, w jakim stosunku punkt G dzieli krawędź D_1C_1 a w jakim – punkt E dzieli krawędź BB_1.
5. Wykaż, że przekrojem sześcianu nie może być pięciokąt foremny.

Bryły obrotowe.
Pole powierzchni brył obrotowych

W tym temacie przypomnimy i uzupełnimy Twoje wiadomości dotyczące walca, stożka i kuli.

Walec

Walcem nazywamy figurę geometryczną otrzymaną przez obrót prostokąta wokół prostej zawierającej jego bok.

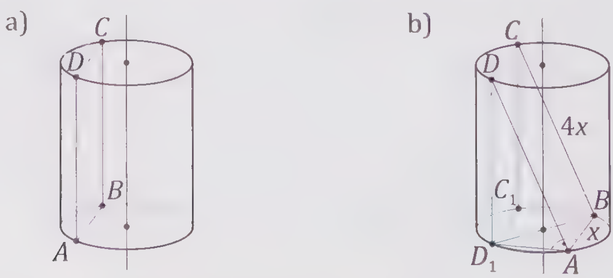


Prostą, wokół której obracamy prostokąt, nazywamy **osią obrotu walca**. Boki prostokąta prostopadłe do osi obrotu zakreślają dwa koła, które nazywamy **podstawami walca**. Bok prostokąta równoległy do osi obrotu i do niej nienależący zakreśla **powierzchnię boczną walca**. Każdy odcinek zawarty w powierzchni bocznej walca, którego końce należą do podstaw, nazywamy **tworzącą walca**. Powierzchnia boczna walca wraz z dwiema podstawami tworzy **powierzchnię całkowitą walca**. **Wysokością walca** nazywamy każdy odcinek (a także jego długość), którego końce leżą w płaszczyznach zawierających podstawy i który jest prostopadły do tych płaszczyzn. W szczególności każda tworząca walca jest jego wysokością.

Przykład 1.

Wysokość walca jest równa 32 cm, a promień podstawy – 13 cm. Wierzchołki prostokąta, którego stosunek długości boków jest równy 1 : 4, należą do okręgów podstaw walca (po dwa do każdego okręgu). Obliczymy pole tego prostokąta.

Zauważmy najpierw, że możliwe są dwa położenia prostokąta.



Oś walca może nie przebijać prostokąta (rys. a) lub może go przebijać (rys. b).

I przypadek

Dłuższy bok prostokąta $ABCD$ ma długość 32 cm (tak jak wysokość walca). Zatem krótszy bok ma długość

$$32 : 4 = 8 \text{ (cm)}$$

Obliczamy pole prostokąta $ABCD$.

$$32 \cdot 8 = 256 \text{ (cm}^2\text{)}$$

II przypadek

Przyjmijmy oznaczenia:

$|AB| = x$, $|AD| = 4x$ (wtedy, oczywiście, $x > 0$)

Stąd pole prostokąta $ABCD$ jest równe

$$4x^2$$

Rozpatrzmy rzut prostokątny prostokąta $ABCD$ na dolną płaszczyznę podstawy. Otrzymujemy wówczas prostokąt ABC_1D_1 (uzasadnij to dokładnie). Zatem odcinek D_1B jest średnicą podstawy.

$$|D_1B| = 26 \text{ cm}$$

Ponadto mamy

$$DD_1 \perp D_1B,$$

więc trójkąt DD_1B jest prostokątny. Stosujemy do niego twierdzenie Pitagorasa i obliczamy $|DB|^2$.

$$|DB|^2 = |DD_1|^2 + |D_1B|^2$$

$$|DB|^2 = 32^2 + 26^2$$

$$|DB|^2 = 1700$$

Trójkąt ABD jest trójkątem prostokątnym, więc na mocy twierdzenia Pitagorasa prawdziwa jest równość:

$|AD|^2 + |AB|^2 = |DB|^2$, skąd

$$16x^2 + x^2 = 1700$$

$$x^2 = 100$$

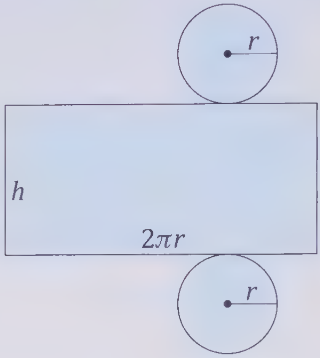
Obliczamy pole prostokąta $ABCD$.

$$4 \cdot 100 = 400 \text{ (cm}^2\text{)}$$

Pole prostokąta jest równe 256 cm^2 lub 400 cm^2.

Przekrój walca to część wspólna tego walca i dowolnej płaszczyzny. **Przekrój osiowy walca** to przekrój płaszczyzną zawierającą oś obrotu walca. Przekrój osiowy walca jest prostokątem, którego jednym bokiem jest średnica podstawy, a drugim – wysokość walca.

Oto rozwinięcie powierzchni walca o promieniu podstawy r i wysokości h na płaszczyźnie.



Powierzchnia boczna po rozwinięciu na płaszczyznę jest prostokątem, którego jeden bok ma długość równą obwodowi podstawy ($2\pi r$), a drugi – ma taką samą długość jak wysokość walca (h).

Twierdzenie 1.

Pole powierzchni bocznej P_b walca określa wzór

$$P_b = 2\pi r \cdot h$$

pole podstawy P_p

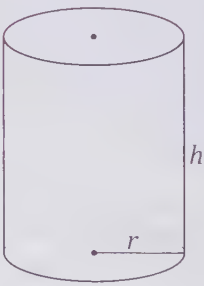
$$P_p = \pi r^2$$

pole powierzchni całkowitej P_c

$$P_c = 2\pi r \cdot h + 2\pi r^2$$

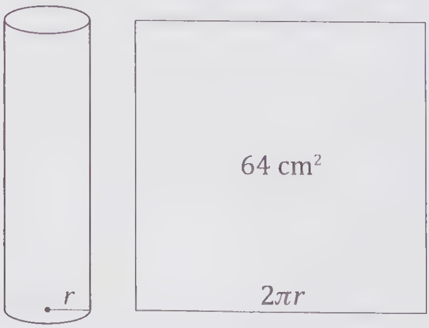
$$P_c = 2\pi r(h + r),$$

gdzie r jest promieniem podstawy, h – wysokością walca.



Przykład 2.

Powierzchnia boczna walca po rozwinięciu na płaszczyznę jest kwadratem o polu 64 cm^2. Obliczymy pole podstawy tego walca. Wynik podamy z dokładnością do 0,01 cm^2.



Oznaczmy przez r promień podstawy walca, a przez h – jego wysokość. Ponieważ pole powierzchni bocznej jest równe 64 cm^2 i powierzchnia ta jest kwadratem, więc bok tego kwadratu ma długość 8 cm.
Obliczamy promień podstawy.

$$2\pi r = 8 \quad /: 2\pi$$

$$r = \frac{4}{\pi}$$

Obliczamy pole podstawy P_p.

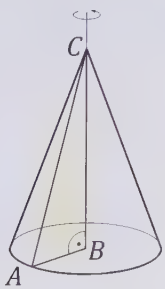
$$P_p = \pi r^2$$

$$P_p = \pi \cdot \left(\frac{4}{\pi}\right)^2 = \frac{16}{\pi} \approx 5{,}09\ (cm^2)$$

Pole podstawy walca jest równe w przybliżeniu 5,09 cm^2.

Stożek

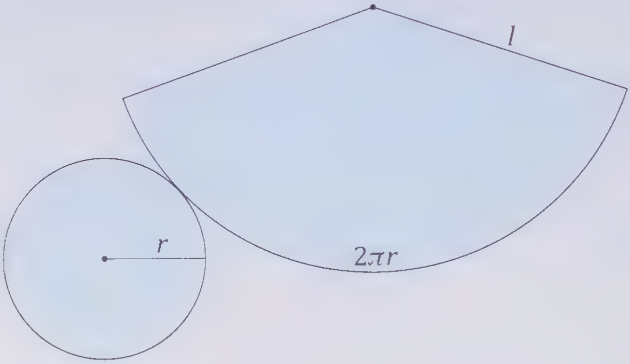
Stożkiem nazywamy figurę geometryczną, która powstaje w wyniku obrotu trójkąta prostokątnego wokół prostej zawierającej przyprostokątną tego trójkąta.



Prostą, wokół której obracamy trójkąt, nazywamy **osią obrotu stożka**. Przyprostokątna prostopadła do osi obrotu zakreśla koło, które nazywamy **podstawą stożka**. Przeciwprostokątna zakreśla **powierzchnię boczną stożka**. Podstawa stożka i powierzchnia boczna stożka tworzą **powierzchnię całkowitą stożka**. Wspólny koniec przeciwprostokątnej i przyprostokątnej zawartej w osi obrotu nazywamy **wierzchołkiem stożka**. Każdy odcinek, którego jednym końcem jest wierzchołek stożka, a drugim – dowolny punkt okręgu podstawy, nazywamy **tworzącą stożka**. **Wysokością stożka** nazywamy odcinek (a także jego długość), którego jednym końcem jest wierzchołek stożka, a drugim – rzut prostokątny wierzchołka na płaszczyznę podstawy.

Przekrój stożka jest to część wspólna danej płaszczyzny i tego stożka. Przekrój stożka płaszczyzną zawierającą jego oś obrotu nazywamy **przekrojem osiowym stożka**. Przekrój osiowy stożka jest trójkątem równoramiennym. Kąt między ramionami tego trójkąta nazywamy **kątem rozwarcia stożka**.

Rysunek poniżej przedstawia rozwinięcie powierzchni stożka na płaszczyźnie.



Powierzchnia boczna stożka po rozwinięciu na płaszczyznę jest wycinkiem koła.

Twierdzenie 2.

Pole powierzchni bocznej P_b stożka wyraża się wzorem

$$P_b = \pi \cdot r \cdot l$$

pole podstawy P_p

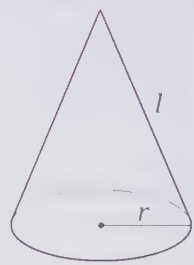
$$P_p = \pi \cdot r^2$$

pole powierzchni całkowitej P_c

$$P_c = \pi r l + \pi r^2$$

$$P_c = \pi r(l + r),$$

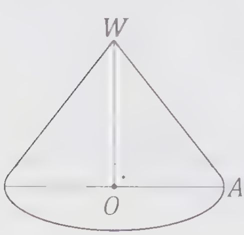
gdzie r jest promieniem podstawy stożka, l – długością tworzącej.



Przykład 3.

Należy pokryć miedzianą blachą dach mający kształt stożka, którego wysokość jest równa 10 m, a promień podstawy ma długość 7,5 m. Ile blachy miedzianej należy przygotować, jeśli 10% całej ilości przeznaczyć trzeba na łączenia? Wynik podamy z dokładnością do 0,01 m^2.

Niech stożek na rysunku poniżej przedstawia dach, którego dotyczy zadanie, odcinek OW jest wysokością stożka, odcinek OA jest promieniem podstawy.



Mamy dane:

$|OW| = 10$ m

$|OA| = 7,5$ m

Obliczamy długość tworzącej stożka, stosując twierdzenie Pitagorasa do trójkąta prostokątnego WOA, i otrzymujemy

$|WA| = 12{,}5$ (m)

Wyznaczamy pole powierzchni bocznej P_b stożka.

$P_b = \pi \cdot |OA| \cdot |WA|$

$P_b = \pi \cdot 7{,}5 \cdot 12{,}5 = 93{,}75\pi \ (\mathrm{m}^2)$

Powierzchnia boczna stożka stanowi 90% potrzebnej blachy miedzianej. Niech x oznacza pole powierzchni blachy miedzianej. Wówczas

$90\%x = 93{,}75\pi$

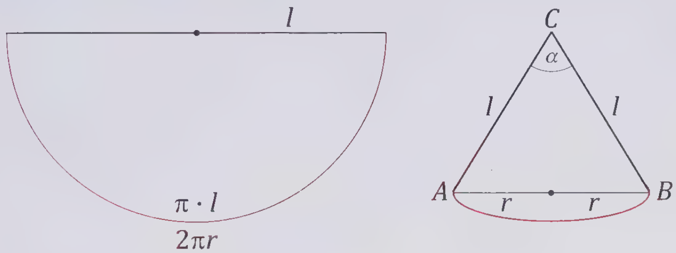
$$x = \frac{937{,}5\pi}{9} \approx 327{,}2396 \ (\mathrm{m}^2)$$

Na pokrycie dachu potrzeba 327,24 m^2 blachy miedzianej.

Przykład 4.

Kartkę w kształcie półkola zwinięto tak, że otrzymano model powierzchni bocznej stożka. Wyznaczymy kąt rozwarcia tego stożka.

Niech rysunek poniżej przedstawia półkole przed „zwinięciem” i po „zwinięciu”.



Oznaczmy przez r promień podstawy stożka, przez l – promień koła, z którego „odcięto” półkole. Po „zwinięciu” półkola otrzymujemy powierzchnię boczną stożka, którego tworząca ma długość l.
Obliczamy długość łuku zaznaczonego na rysunku kolorem.
Z jednej strony jest to połowa długości okręgu o promieniu l, z drugiej natomiast jest to obwód koła o promieniu r. Mamy więc:

$$\frac{1}{2} \cdot 2\pi l = 2\pi r,$$

skąd

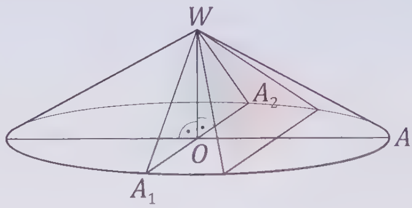
$l = 2r$

Zatem średnica podstawy stożka ma długość l. Przekrój osiowy tego stożka jest więc trójkątem równobocznym, czyli kąt rozwarcia stożka ($\sphericalangle\alpha$) ma miarę 60°.

Przykład 5.

Tworząca stożka ma długość 10, a wysokość stożka jest równa 5. Rozpatrujemy przekroje stożka płaszczyzną przechodzącą przez jego wierzchołek. Wyznaczymy największy obwód i największe pole otrzymanego przekroju.

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku poniżej.



Mamy:

$$|WO| = 5 \qquad |WA| = |WA_1| = |WA_2| = 10$$

Przekrojem stożka płaszczyzną przechodzącą przez jego wierzchołek może być punkt, odcinek lub trójkąt. Zajmiemy się przekrojami, które są trójkątami. Każdy z takich trójkątów jest równoramienny, a ramiona są tworzącymi stożka. Zatem największy obwód będzie miał ten trójkąt, który ma najdłuższą podstawę. Oczywiście jest to przekrój osiowy stożka – na rysunku trójkąt A_1A_2W. Łatwo obliczyć, że

$$|A_1A_2| = 10\sqrt{3}$$

Wyznaczamy obwód trójkąta A_1A_2W.

$$|A_1A_2| + |A_1W| + |A_2W| = 10\sqrt{3} + 10 + 10 = 10\left(\sqrt{3} + 2\right)$$

Wyznaczamy największe pole otrzymanego przekroju. Pole P trójkąta można obliczyć, posługując się wzorem

$$P = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot \sin\gamma,$$

gdzie a, b są długościami boków trójkąta, γ – miarą kąta między nimi. W naszym przypadku możemy przyjąć $a = b = 10$. Mamy więc:

$$P = 50 \cdot \sin\gamma$$

Kąt γ przyjmuje wartości od zera do wartości równej kątowi rozwarcia stożka. W naszym przypadku mamy:

$$\gamma \in (0°, 120°\rangle$$

(zauważ, że np. trójkąt A_1OW jest „połową" trójkąta równobocznego, więc $|\sphericalangle OA_1W| = 60°$).

Zatem największa wartość $\sin\gamma$ jest równa 1 (przyjmowana wtedy, gdy $\gamma = 90°$).

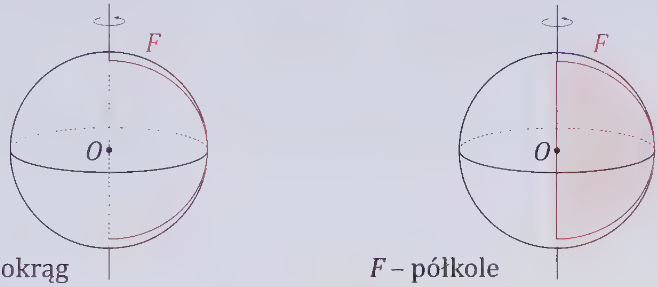
Największy obwód – równy $10\left(\sqrt{3} + 2\right)$ – ma przekrój osiowy stożka, natomiast największe pole – równe 50 – ma przekrój stożka, w którym tworzące są prostopadłe.

Kula i sfera

Sferą o środku w punkcie O i promieniu r, $r > 0$, nazywamy zbiór punktów przestrzeni, których odległość od punktu O jest równa r. Taką sferę oznaczamy $s(O, r)$.

Kulą o środku w punkcie O i promieniu r, $r > 0$, nazywamy zbiór punktów przestrzeni, których odległość od punktu O jest nie większa niż r. Taką kulę oznaczamy $k(O, r)$.

UWAGA: Sferę i kulę można też otrzymać w wyniku obrotu pewnej figury F wokół pewnej prostej l.

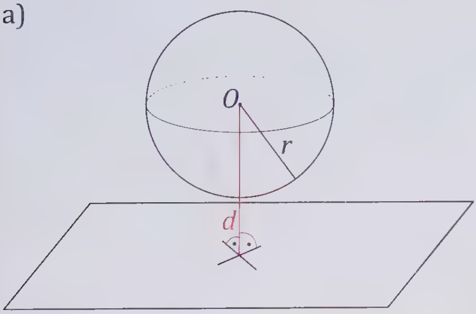


F – półokrąg

F – półkole

Rozpatrzymy wzajemne położenie sfery (kuli) i płaszczyzny.

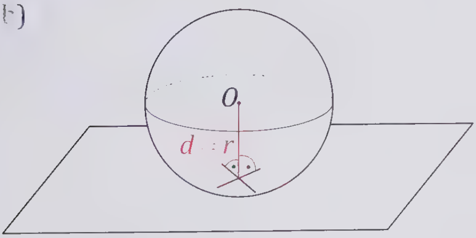
a)



Płaszczyzna nie ma punktów wspólnych ze sferą (z kulą).

Odległość d środka O sfery (kuli) od płaszczyzny jest większa niż promień r sfery (kuli).

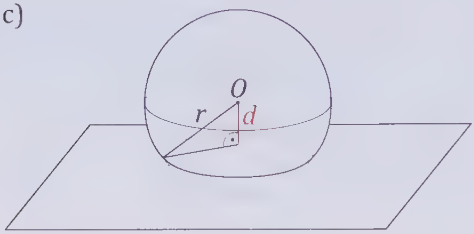
b)



Płaszczyzna ma tylko jeden punkt wspólny ze sferą (z kulą) – płaszczyzna jest styczna do sfery (kuli).

Odległość d środka O sfery (kuli) od płaszczyzny jest równa promieniowi r sfery (kuli).
Promień poprowadzony do punktu styczności jest prostopadły do płaszczyzny stycznej.

c)



Płaszczyzna ma nieskończenie wiele punktów wspólnych ze sferą (z kulą) – płaszczyzna przecina sferę (kulę).

Odległość d środka O sfery (kuli) od płaszczyzny jest mniejsza niż promień r sfery (kuli).

W przypadku c) częścią wspólną sfery (kuli) i płaszczyzny jest okrąg (koło) o promieniu $\sqrt{r^2 - d^2}$. Jeśli do płaszczyzny należy punkt O, to taki przekrój nazywamy **okręgiem wielkim** sfery (**kołem wielkim** kuli). Okrąg wielki (koło wielkie) ma taki sam promień jak sfera (kula).

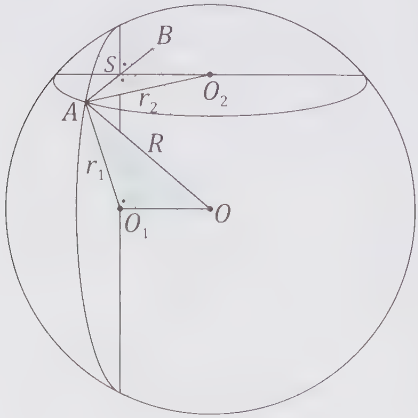
Prawdziwe jest następujące twierdzenie.

Twierdzenie 3.

Jeśli w przestrzeni dwa okręgi leżące w różnych płaszczyznach mają dwa punkty wspólne, to istnieje tylko jedna sfera zawierająca te okręgi.

Przykład 6.

Na sferze o promieniu $5\sqrt{13}$ cm są dwa okręgi o_1 i o_2 zawierające się w płaszczyznach prostopadłych. Wspólna cięciwa AB tych okręgów ma długość 16 cm. Odległość środka O sfery od środka O_1 okręgu o_1 jest równa 6 cm. Obliczymy promienie r_1 i r_2 okręgów o_1 i o_2.



Niech rysunek obok ilustruje sytuację opisaną w zadaniu.

R – promień sfery

$R = 5\sqrt{13}$ (cm)

Punkt S jest środkiem odcinka AB, więc

$$|AS| = \frac{1}{2}|AB| = 8 \text{ (cm)}$$

Ponieważ płaszczyzny zawierające okręgi są prostopadłe, więc

$$|SO_2| = |O_1O|,$$

zatem

$$|SO_2| = 6 \text{ (cm)}$$

Obliczamy r_2, korzystając z twierdzenia Pitagorasa zastosowanego do trójkąta prostokątnego SAO_2.

$$|AO_2|^2 = |SO_2|^2 + |AS|^2$$

$$r_2^2 = 6^2 + 8^2, \qquad \text{skąd} \qquad r_2 = 10 \text{ (cm)}$$

Obliczamy r_1, korzystając z twierdzenia Pitagorasa zastosowanego do trójkąta prostokątnego O_1OA.

$$|AO|^2 = |AO_1|^2 + |O_1O|^2$$

$$\left(5\sqrt{13}\right)^2 = r_1^2 + 6^2, \qquad \text{skąd} \qquad r_1 = 17 \text{ (cm)}$$

Promienie r_1 i r_2 są odpowiednio równe 17 cm i 10 cm.

Kula jest wpisana w wielościan (wielościan jest opisany na kuli) wtedy i tylko wtedy, gdy jest styczna do każdej ściany wielościanu. Natomiast **kula jest opisana na wielościanie** (wielościan jest wpisany w kulę) wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie wierzchołki wielościanu należą do sfery wyznaczającej daną kulę.

Przykład 7.

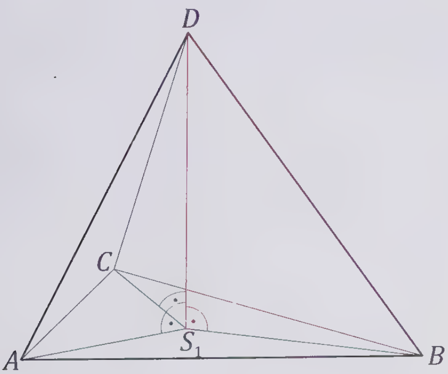
W sześcian, którego krawędź ma długość a, można wpisać kulę o promieniu $\frac{a}{2}$.

Środkiem tej kuli jest punkt O przecięcia przekątnych sześcianu. Punkt O jest też środkiem kuli opisanej na tym sześcianie. Promień tej kuli jest równy połowie długości przekątnej sześcianu, czyli $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Przykład 8.

Wykażemy, że w czworościanie foremnym (czyli w czworościanie, w którym wszystkie ściany są identycznymi trójkątami równobocznymi) wysokości przecinają się w jednym punkcie, który jest środkiem kuli wpisanej w czworościan i środkiem kuli opisanej na tym czworościanie. Wyznaczymy promienie tych kul (w zależności od długości a krawędzi).

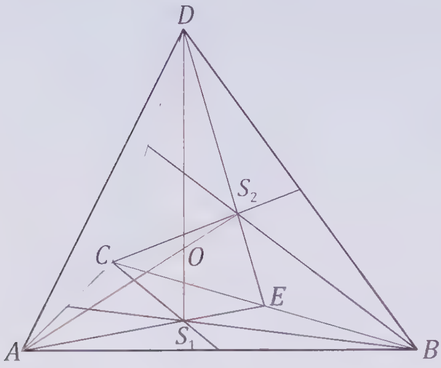
Wprowadźmy oznaczenia jak na rysunku poniżej.



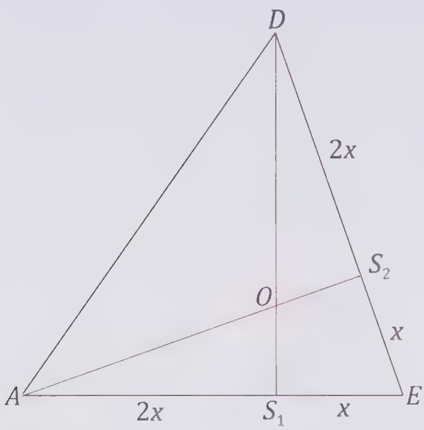
Prowadzimy wysokość DS_1. Trójkąty AS_1D, BS_1D i CS_1D są parami przystające (są to trójkąty prostokątne, mające wspólną przyprostokątną i równe przeciwprostokątne). Zatem

$$|AS_1| = |BS_1| = |CS_1|, \text{ czyli}$$

punkt S_1 jest równo odległy od punktów A, B, C. Dla nas jest istotne, że punkt S_1 jest punktem przecięcia się środkowych. (Pamiętaj – tak jest tylko w przypadku trójkąta równobocznego! W ogólnym przypadku – punkt równo odległy od wierzchołków trójkąta jest punktem przecięcia się symetralnych boków).



Prowadzimy drugą wysokość (AS_2) w czworościanie, punkt E jest środkiem krawędzi BC. Oczywiście wszystkie wysokości w czworościanie foremnym są równe. Wysokości DS_1 i AS_2 leżą w jednej płaszczyźnie (AED), zatem przecinają się. Punkt przecięcia oznaczmy przez O. Wykażemy, że przez punkt O przechodzą wszystkie wysokości i punkt O dzieli je w stosunku 3 : 1.



Rozważmy trójkąt AED. Punkty S_1 i S_2 są punktami przecięcia środkowych, więc dzielą odpowiednio odcinki AE i DE w stosunku 2 : 1.

$\frac{|AS_1|}{|S_1E|} = \frac{|DS_2|}{|S_2E|} = \frac{2}{1}$, stąd otrzymujemy, że

$AD \parallel S_1S_2$, a zatem

$$\frac{|AE|}{|S_1E|} = \frac{3}{1} = \frac{|AD|}{|S_1S_2|} = \frac{|DO|}{|OS_1|} = \frac{|AO|}{|OS_2|}$$

(uzasadnij to dokładnie; wskaż odpowiednie pary trójkątów podobnych). Otrzymaliśmy więc:

$$\frac{3}{1} = \frac{|DO|}{|OS_1|} = \frac{|AO|}{|OS_2|}$$

Analogiczne rozumowanie można przeprowadzić dla dowolnej pary wysokości czworościanu foremnego, a to znaczy, że wszystkie wysokości przecinają się w jednym punkcie, który dzieli je w stosunku 3 : 1. Mamy ponadto:

$$|OA| = |OB| = |OC| = |OD|,$$

czyli punkt O jest równo odległy od wierzchołków czworościanu, więc jest środkiem kuli opisanej na tym czworościanie. Łatwo też zauważyć, że punkt O jest równo odległy od wszystkich ścian czworościanu, jest więc też środkiem kuli wpisanej w ten czworościan.

Obliczamy promień R kuli opisanej na czworościanie foremnym o krawędzi a i promień r kuli wpisanej w ten czworościan. W tym celu obliczamy najpierw wysokość czworościanu. Rozważmy np. trójkąt prostokątny AS_1D. Z twierdzenia Pitagorasa otrzymujemy zależność:

$$|DS_1|^2 = |AD|^2 - |AS_1|^2$$

$$|DS_1|^2 = a^2 - \left(\frac{2}{3}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 = a^2 - \frac{a^2}{3} = \frac{2a^2}{3}$$

$$|DS_1| = \frac{a\sqrt{6}}{3}, \qquad \text{zatem}$$

$$R = \frac{3}{4}|DS_1| = \frac{a\sqrt{6}}{4} \qquad\qquad r = \frac{1}{4}|DS_1| = \frac{a\sqrt{6}}{12}$$

Promień kuli wpisanej w czworościan foremny o krawędzi mającej długość a jest równy $\frac{a\sqrt{6}}{12}$, a promień kuli opisanej na takim czworościanie jest równy $\frac{a\sqrt{6}}{4}$.

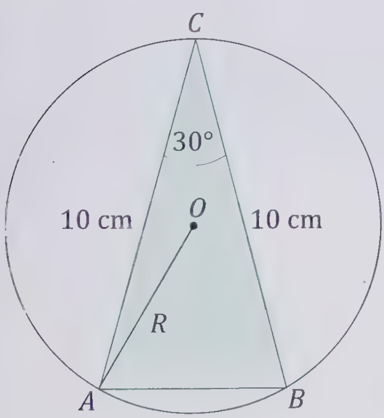
Kula jest wpisana w stożek (stożek jest opisany na kuli) wtedy i tylko wtedy, gdy jest styczna do podstawy stożka i każdej jego tworzącej. **Kula jest opisana na stożku** (stożek jest wpisany w kulę) wtedy i tylko wtedy, gdy okrąg podstawy stożka zawiera się w sferze wyznaczającej tę kulę i wierzchołek stożka należy do tej sfery.

W każdy stożek można wpisać kulę i na każdym stożku można opisać kulę.

Przykład 9.

Kąt rozwarcia stożka jest równy 30°, tworząca ma długość 10 cm. Wyznaczymy promień kuli opisanej na tym stożku.

Rysunek poniżej przedstawia przekrój osiowy stożka, którego dotyczy zadanie, wpisanego w kulę.



Przekrój ten jest trójkątem równoramiennym ABC, wpisanym w koło o promieniu R. Promień koła jest taki sam jak promień kuli. Wiemy, że

$$|\sphericalangle ACB| = 30°,$$

zatem

$$|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle ABC| = \frac{1}{2}(180° - 30°) = 75°$$

Obliczamy R. Z twierdzenia sinusów zastosowanego do trójkąta ABC otrzymujemy zależność:

$$\frac{|BC|}{\sin A} = 2R, \qquad \text{skąd} \qquad R = \frac{5}{\sin 75°}\ \text{(cm)}$$

Obliczamy:

$$\sin 75^\circ = \sin(45^\circ + 30^\circ) = \sin 45^\circ \cdot \cos 30^\circ + \cos 45^\circ \cdot \sin 30^\circ =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

$$R = \frac{5}{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}} = \frac{20}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} = 5\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right) \text{ (cm)}$$

Promień kuli opisanej na stożku jest równy $5\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)$ cm.

Kula jest wpisana w walec (walec jest opisany na kuli) wtedy i tylko wtedy, gdy kula jest styczna do dwóch podstaw walca i do każdej tworzącej walca. Kulę można wpisać w walec tylko wtedy, gdy wysokość walca jest równa średnicy jego podstawy. **Kula jest opisana na walcu** (walec jest wpisany w kulę) wtedy i tylko wtedy, gdy okręgi podstaw walca zawierają się w sferze wyznaczającej tę kulę. Na każdym walcu można opisać kulę.

Twierdzenie 4.

Pole powierzchni P kuli o promieniu r wyraża się wzorem

$$P = 4\pi r^2$$

UWAGA: Powierzchni kuli nie można rozciąć na takie części, które można by było rozłożyć na płaszczyźnie.

Przykład 10.

Płuca dorosłego człowieka zbudowane są z ok. 300 milionów pęcherzyków płucnych, każdy o średnicy ok. 0,32 mm. Obliczymy, jakie pole powierzchni mają płuca, przyjmując założenie, że pęcherzyk płucny jest kuleczką o średnicy 0,32 mm. Odpowiedź wyrazimy w metrach kwadratowych.

Obliczamy pole powierzchni P pęcherzyka płucnego.

$P = 4\pi r^2$, gdzie $r = 0{,}16 \text{ mm} = 0{,}00016 \text{ m} = 1{,}6 \cdot 10^{-4} \text{ m}$

$$P = 4 \cdot \pi \cdot \left(1{,}6 \cdot 10^{-4}\right)^2 = 10{,}24 \cdot \pi \cdot 10^{-8} \left(\text{m}^2\right)$$

Obliczamy pole powierzchni płuc $P_{pł}$.

$$P_{pł} = 300\,000\,000 \cdot 10{,}24 \cdot \pi \cdot 10^{-8} = 3 \cdot 10^8 \cdot 10{,}24 \cdot \pi \cdot 10^{-8} =$$

$$= 30{,}72 \cdot \pi \approx 96{,}51 \left(\text{m}^2\right)$$

Pole powierzchni płuc dorosłego człowieka jest równe ok. 97 m^2.

Przykład 11.

Z drewnianego klocka w kształcie sześcianu o krawędzi mającej długość a wytoczono bryłę w kształcie kuli o średnicy a. Obliczymy, jakim procentem pola powierzchni drewnianego klocka jest pole powierzchni otrzymanej kuli. Wynik podamy z dokładnością do dwóch miejsc po przecinku.

Obliczamy pole powierzchni P_{sz} sześcianu.

$$P_{sz} = 6a^2$$

Obliczamy pole powierzchni P_k kuli.

Promień r kuli jest równy $\frac{a}{2}$ oraz

$$P_k = 4\pi r^2 \qquad r = \frac{a}{2}, \qquad \text{więc}$$

$$P_k = 4\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2 = \pi \cdot a^2$$

Obliczamy, jakim procentem pola powierzchni sześcianu jest pole powierzchni kuli.

$$\frac{P_k}{P_{sz}} = \frac{\pi \cdot a^2}{6 \cdot a^2} = \frac{\pi}{6} = 0{,}52359...$$

Pole powierzchni kuli stanowi ok. 52,36% pola powierzchni sześcianu.

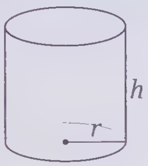
Sprawdź, czy rozumiesz

1. Prostokąt o bokach mających długość 3 cm i 4 cm obracamy wokół jednego z boków. Oblicz pole powierzchni całkowitej otrzymanego w ten sposób walca. Rozważ dwa przypadki.
2. Pole powierzchni bocznej walca jest równe P. Wyznacz pole przekroju osiowego tego walca.
3. Tworząca stożka ma długość 10 cm, a kąt rozwarcia stożka jest kątem prostym. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego stożka.
4. Tworząca stożka jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod takim kątem α, że $\cos\alpha = 0{,}6$. Oblicz miarę kąta środkowego wycinka koła będącego powierzchnią boczną tego stożka po rozwinięciu na płaszczyznę.
5. Oblicz promień kuli, jeśli:
   a) pole powierzchni kuli jest równe 36π cm^2
   b) pole powierzchni kuli jest o 48π cm^2 większe od pola koła wielkiego tej kuli.

Objętość brył obrotowych

Prawdziwe jest następujące twierdzenie.

Twierdzenie 1.
Objętość V walca o promieniu podstawy r i wysokości h wyraża się wzorem

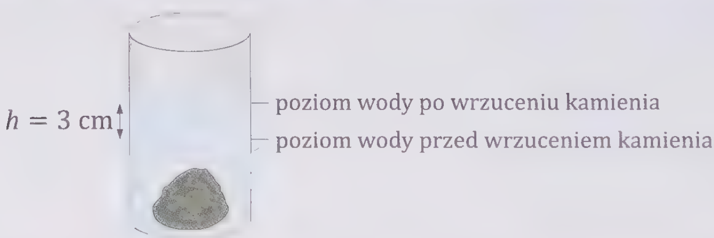


$$V = \pi r^2 \cdot h$$

Objętość walca jest równa iloczynowi pola podstawy walca i jego wysokości.

Przykład 1.

Do naczynia w kształcie walca napełnionego częściowo wodą wrzucono kamień, który zanurzył się całkowicie. Poziom wody podniósł się o 3 cm. Wiedząc, że promień podstawy naczynia ma długość 5 cm, wyznaczymy objętość kamienia.



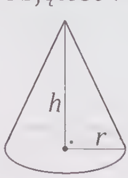
Kamień wypiera wodę o takiej objętości, jaką sam ma, dlatego też objętość V kamienia jest równa objętości walca o wysokości 3 cm i promieniu podstawy 5 cm.

$V = \pi r^2 \cdot h$, gdzie $r = 5$ i $h = 3$

$V = \pi \cdot 5^2 \cdot 3 = 75\pi$

Objętość kamienia jest równa 75π cm^3, czyli ok. 235,5 cm^3.

Twierdzenie 2.
Objętość V stożka o wysokości h i promieniu podstawy r wyraża się wzorem

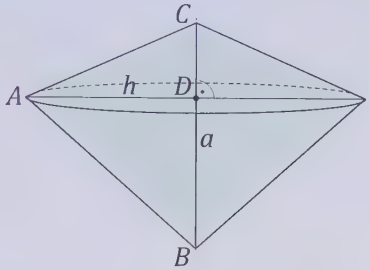


$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot h$$

Objętość stożka jest równa jednej trzeciej objętości walca o takiej samej wysokości i takim samym promieniu podstawy, jak dany stożek.

Przykład 2.

Trójkąt ostrokątny ABC obraca się wokół prostej zawierającej bok BC mający długość a. Wyznaczymy objętość otrzymanej bryły w zależności od pola P trójkąta ABC.



Niech h oznacza wysokość trójkąta ABC opuszczoną na bok BC. W wyniku obrotu trójkąta ABC wokół prostej BC otrzymujemy bryłę, która jest sumą dwóch stożków złączonych podstawami.
Wyznaczamy objętość V_a otrzymanej bryły.

$$V_a = \frac{1}{3}\pi h^2|CD| + \frac{1}{3}\pi h^2|BD| = \frac{1}{3}\pi h^2(|CD| + |BD|) = \frac{1}{3}\pi h^2 a$$

Wyznaczamy pole P trójkąta ABC.

$$P = \frac{1}{2}ah, \text{ zatem}$$

$$V_a = \frac{1}{3}\pi h^2 a = \frac{1}{3}\pi \frac{\left(\frac{1}{2}ah\right)^2 \cdot 4}{a} = \frac{4}{3}\pi \frac{P^2}{a}$$

Zależność objętości V_a otrzymanej bryły obrotowej od pola trójkąta P wyraża się wzorem $V_a = \frac{4}{3}\pi\frac{P^2}{a}$.

Niech b oznacza długość odcinka AC i c oznacza długość odcinka AB.
Gdybyśmy obracali trójkąt ABC wokół prostej zawierającej bok AC, a następnie wokół prostej zawierającej bok AB i objętości otrzymanych brył oznaczyli odpowiednio V_b, V_c, to otrzymalibyśmy zależności:

$$V_b = \frac{4}{3}\pi\frac{P^2}{b} \qquad V_c = \frac{4}{3}\pi\frac{P^2}{c}$$

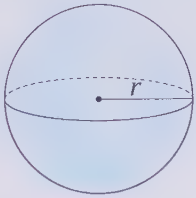
Zależności te oraz zależność z przykładu możemy zapisać tak:

$$V_a \cdot a = \frac{4}{3}\pi \cdot P^2 \qquad V_b \cdot b = \frac{4}{3}\pi \cdot P^2 \qquad V_c \cdot c = \frac{4}{3}\pi \cdot P^2$$

A zatem objętości brył, otrzymanych przez kolejne obroty trójkąta ABC wokół prostych zawierających boki tego trójkąta są odwrotnie proporcjonalne do długości tych boków.

Twierdzenie 3.

Objętość V kuli o promieniu r wyraża się wzorem



$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Przykład 3.

Pole powierzchni kuli K_1 jest 9 razy większe od pola powierzchni kuli K_2. Ile razy objętość kuli K_1 jest większa od objętości kuli K_2?

Przyjmijmy oznaczenia:

R – promień kuli K_1 r – promień kuli K_2

Pole powierzchni P_1 kuli K_1 przedstawia wzór:

$P_1 = 4\pi R^2$

Pole powierzchni P_2 kuli K_2 wyraża się wzorem:

$P_2 = 4\pi r^2$

Z warunków zadania wynika, że

$P_1 = 9P_2$, więc

$4\pi R^2 = 9 \cdot 4\pi r^2$, skąd otrzymujemy

$R = 3r$

Wyznaczamy objętość V_1 kuli K_1 i objętość V_2 kuli K_2.

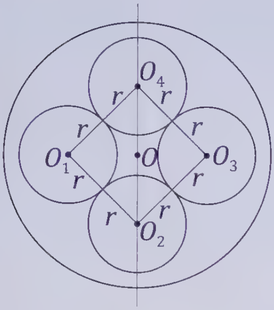
$V_1 = \frac{4}{3} \cdot \pi R^3 = \frac{4}{3} \cdot \pi(3r)^3 = 36\pi r^3$ $V_2 = \frac{4}{3} \cdot \pi r^3$, zatem

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{36\pi r^3}{\frac{4}{3}\pi r^3} = 27$$

Objętość kuli K_1 jest 27 razy większa od objętości kuli K_2.

Przykład 4.

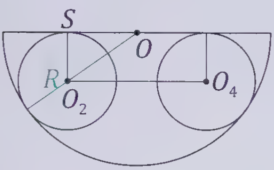
Do misy w kształcie półsfery włożono cztery jednakowe pomarańcze. Gdy misę przykryto płaską pokrywką, okazało się, że każda pomarańcza dotyka pokrywki. Średnica misy jest równa 24 cm. Obliczymy, jaką objętość (z dokładnością do 1 cm^3) ma każda z pomarańczy.



Załóżmy, że pomarańcze będą reprezentowane przez cztery przystające kule, każda o promieniu r, a misa – przez połowę sfery o promieniu 12 cm (R = 12 cm). Niech punkt O będzie środkiem sfery, a punkty O_1, O_2, O_3, O_4 będą środkami przystających kul. Punkty te wyznaczają kwadrat, którego przekątna O_2O_4 ma długość $2r\sqrt{2}$,

$$|O_2O_4| = 2r\sqrt{2}$$

Narysujemy przekrój półsfery płaszczyzną przechodzącą przez punkty O_2, O_4 prostopadłą do płaszczyzny $(O_1O_2O_3O_4)$.



Niech punkt S będzie punktem styczności kuli o środku O_2 z płaszczyzną zawierającą okrąg wielki sfery. Mamy wówczas:

$$|SO| = \frac{1}{2}|O_2O_4| = r\sqrt{2}$$

Na podstawie twierdzenia Pitagorasa zastosowanego do trójkąta prostokątnego O_2OS wyznaczamy długość odcinka OO_2.

$$|OO_2| = r\sqrt{3}$$

Z punktu O (przez punkt O_2) prowadzimy promień R.

$$R = r + |OO_2|, \text{ czyli } R = r + r\sqrt{3}$$

Wyznaczamy promień kuli r.

$$R = r\left(\sqrt{3}+1\right)$$

$$r = \frac{R}{\sqrt{3}+1} \quad \text{i} \quad R = 12 \text{ (cm)}, \quad \text{zatem} \quad r = \frac{12\left(\sqrt{3}-1\right)}{\left(\sqrt{3}+1\right)\left(\sqrt{3}-1\right)} = 6\left(\sqrt{3}-1\right) \text{ (cm)}.$$

Obliczamy objętość V kuli.

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3, \text{ więc } V = \frac{4}{3}\pi \cdot 6^3 \cdot \left(\sqrt{3}-1\right)^3 \approx 355 \left(\text{cm}^3\right)$$

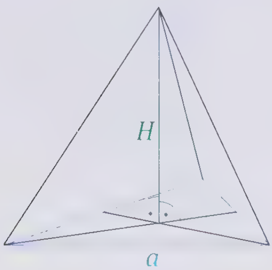
Sprawdź, czy rozumiesz

1. Objętość walca wynosi 45 cm^3, a pole powierzchni bocznej jest równe 30 cm^2. Oblicz wysokość tego walca.
2. Oblicz objętość bryły powstałej w wyniku obrotu trójkąta prostokątnego o przyprostokątnych mających długość 15 cm i 20 cm wokół:
   a) krótszej przyprostokątnej b) przeciwprostokątnej.
3. Objętość kuli K_1 jest 125 razy większa od objętości kuli K_2. Ile razy pole powierzchni kuli K_1 jest większe od pola powierzchni kuli K_2?

Zastosowanie analizy matematycznej w rozwiązywaniu zadań z geometrii przestrzennej

Przykład 1.

Suma długości wszystkich krawędzi podstawy i wysokości ostrosłupa prawidłowego trójkątnego jest równa 21. Wyznaczymy wzór funkcji opisującej objętość ostrosłupa w zależności od długości krawędzi jego podstawy. Zbadamy przebieg zmienności tej funkcji i naszkicujemy jej wykres.



a – długość krawędzi podstawy
H – wysokość ostrosłupa
V – objętość ostrosłupa

$$3a + H = 21$$

Wyznaczamy objętość ostrosłupa w zależności od a. Mamy:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot H \qquad \text{oraz} \qquad H = 3 \cdot (7 - a)$$

$$V(a) = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot 3 \cdot (7 - a)$$

Otrzymujemy wzór funkcji V:

$$V(a) = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \left(-a^3 + 7a^2\right), \qquad D_V = (0, 7)$$

Badamy przebieg zmienności funkcji V. Funkcja V jest ciągła. Obliczamy granice funkcji na końcach przedziału określoności:

$$\lim_{a \to 0^+} V(a) = 0 \qquad \lim_{a \to 7^-} V(a) = 0$$

Wykres funkcji V nie ma asymptot. Wyznaczamy pochodną funkcji V i badamy znak pochodnej:

$$V'(a) = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(-3a^2 + 14a\right) \qquad D_{V'} = D_V$$

$$V'(a) = 0 \Leftrightarrow a = 4\frac{2}{3}$$

$$V'(a) > 0 \Leftrightarrow a \in \left(0, 4\frac{2}{3}\right)$$

$$V'(a) < 0 \Leftrightarrow a \in \left(4\frac{2}{3}, 7\right)$$

Funkcja V jest rosnąca w przedziale $\left(0,\ 4\frac{2}{3}\right\rangle$ i malejąca w przedziale $\left\langle 4\frac{2}{3},\ 7\right)$.

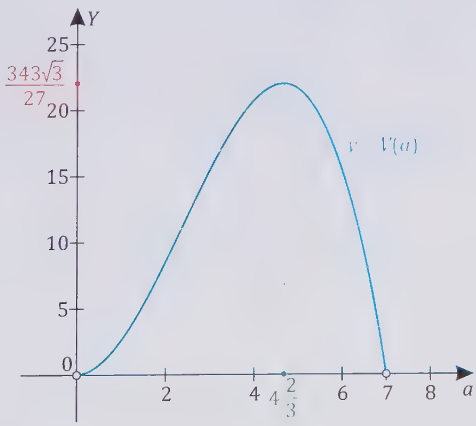
Zatem dla argumentu $4\frac{2}{3}$ funkcja objętości przyjmuje wartość największą, równą $V_{\max}\left(4\frac{2}{3}\right)$,

$$V_{\max}\left(4\frac{2}{3}\right) = \frac{343\sqrt{3}}{27}$$

Budujemy tabelę przebiegu zmienności funkcji V.

a	$\left(0, 4\frac{2}{3}\right)$	$4\frac{2}{3}$	$\left(4\frac{2}{3}, 7\right)$
$V'(a)$	+	0	–
$V(a)$	0 ↗	$\frac{343\sqrt{3}}{27}$	↘ 0

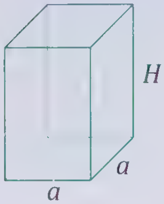
Szkicujemy wykres funkcji V.



Przykład 2.

Wśród graniastosłupów prawidłowych czworokątnych o objętości 8 cm^3 istnieje taki, który ma najmniejsze pole powierzchni całkowitej. Wyznaczymy długość jego krawędzi.

Podstawą graniastosłupa jest kwadrat.



Wprowadźmy oznaczenia:
a – długość krawędzi podstawy
H – wysokość graniastosłupa
V – objętość graniastosłupa; $V = 8\ \text{cm}^3$
P – pole powierzchni całkowitej graniastosłupa

Ze wzoru na objętość prostopadłościanu otrzymujemy:

$$a^2 \cdot H = 8,$$

stąd

$$H = \frac{8}{a^2}$$

Wyznaczamy pole powierzchni całkowitej P graniastosłupa w zależności od a:

$$P = 2a^2 + 4aH = 2a^2 + \frac{32}{a}$$

$$P(a) = \frac{2a^3 + 32}{a},\ D_P = (0, +\infty)$$

Funkcja P jest funkcją opisującą pole powierzchni całkowitej graniastosłupów prawidłowych czworokątnych o objętości 8 (cm^3).

Funkcja P jest ciągła. Wyznaczymy ekstrema lokalne funkcji P. W tym celu obliczamy pochodną:

$$P'(a) = \frac{6a^2 \cdot a - (2a^3 + 32) \cdot 1}{a^2} = \frac{4a^3 - 32}{a^2} \qquad D_{P'} = D_P$$

Mamy:

$$P'(a) = 0 \Leftrightarrow a = 2$$

$$P'(a) < 0 \Leftrightarrow a \in (0, 2)$$

$$P'(a) > 0 \Leftrightarrow a \in (2, +\infty)$$

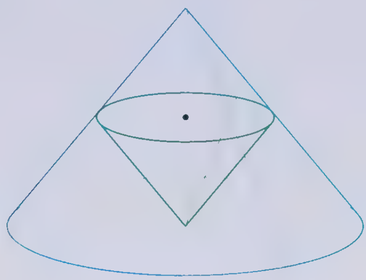
W punkcie 2 funkcja P ma minimum lokalne, równe $P(2)$.
Ponieważ funkcja P jest malejąca w przedziale $(0, 2\rangle$ i rosnąca w przedziale $\langle 2, +\infty)$, to $P(2)$ jest wartością najmniejszą funkcji P.
Wyznaczamy wysokość H, jeśli $a = 2$:

$$H = \frac{8}{2^2} = 2$$

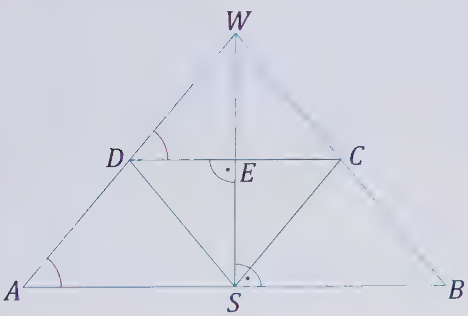
Wszystkie krawędzie graniastosłupa mającego najmniejsze pole powierzchni całkowitej mają długość 2 cm.

Przykład 3.

Dany jest stożek o promieniu podstawy 5 cm i wysokości 6 cm. W ten stożek wpisujemy drugi stożek tak, że wierzchołek wpisanego stożka leży w środku podstawy danego stożka, zaś okrąg ograniczający podstawę stożka wpisanego leży na powierzchni bocznej danego stożka (zobacz rysunek poniżej). Jaką największą objętość może mieć drugi (wpisany) stożek?



Szkicujemy przekrój osiowy danego stożka i wprowadzamy oznaczenia.



$|AB| = 10$ cm $\qquad |WS| = 6$ cm

r – promień podstawy wpisanego stożka
h – wysokość wpisanego stożka
V – objętość wpisanego stożka

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

Zauważamy, że trójkąty ABW i DCW są podobne – cecha (kkk) podobieństwa trójkątów. Otrzymujemy:

$$\frac{|AB|}{|DC|} = \frac{|WS|}{|WE|}$$

$$\frac{10}{2r} = \frac{6}{6-h}$$

$60 - 10h = 12r, \qquad$ stąd

$h = 6 - 1{,}2r, \qquad$ gdzie $r \in (0, 5)$

Wyznaczamy objętość $V(r)$ stożka wpisanego w dany stożek w zależności od promienia r podstawy tego stożka. Otrzymujemy funkcję:

$$V(r) = \frac{\pi}{3}\left(-1{,}2r^3 + 6r^2\right), \qquad D_V = (0, 5)$$

Chcemy wyznaczyć największą wartość tej funkcji. Funkcja V jest ciągła.
Obliczamy pochodną funkcji V:

$$V'(r) = 2\pi r(-0{,}6r + 2), \qquad D_{V'} = (0, 5)$$

$$V'(r) = 0 \Leftrightarrow r = \frac{10}{3}$$

Jedynym punktem krytycznym jest $\frac{10}{3}$. Obliczamy wartość funkcji V w punkcie krytycznym i granice na końcach przedziału określoności:

$$V\left(\frac{10}{3}\right) = \frac{200\pi}{27} \quad (\approx 23{,}27)$$

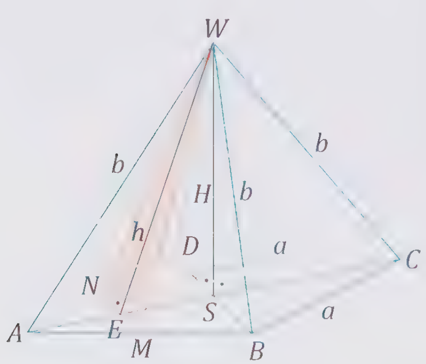
$$\lim_{r\to 0^+} V(r) = 0 \qquad \lim_{r\to 5} V(r) = 0$$

Liczba $\frac{200\pi}{27}$ jest największą wartością funkcji V.
Stożek wpisany w dany stożek może mieć największą objętość równą $\frac{200\pi}{27}$ cm^3.

Przykład 4.

Rozważmy zbiór ostrosłupów prawidłowych czworokątnych, których każda krawędź boczna ma długość 3 cm. Dowolny ostrosłup z tego zbioru przecinamy płaszczyzną przechodzącą przez środki dwóch sąsiednich krawędzi podstawy i wierzchołek ostrosłupa. Wyznaczymy długość krawędzi podstawy tego ostrosłupa, dla którego przekrój daną płaszczyzną ma największe pole.

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku poniżej.



$ABCD$ – kwadrat o boku długości a, $a > 0$
$b = 3$ – długość krawędzi bocznych
EW – wysokość przekroju NMW, $|EW| = h$
WS – wysokość ostrosłupa, $|WS| = H$
NM – odcinek łączący środki krawędzi AB i AD

$$P_{NMW} = \frac{1}{2} \cdot |NM| \cdot h$$

Wyznaczamy długość odcinków NM i ES w zależności od a:

$$|NM| = \frac{1}{2}|DB|, \text{ czyli } |NM| = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

$$|ES| = \frac{1}{2}|AS|, \text{ czyli } |ES| = \frac{a\sqrt{2}}{4}$$

Na podstawie twierdzenia Pitagorasa (dla trójkątów prostokątnych ESW i SCW) otrzymujemy równości:

$$\frac{a^2}{8} + H^2 = h^2 \qquad \text{i} \qquad \frac{a^2}{2} + H^2 = 9,$$

z których obliczamy h w zależności od a:

$$h = \sqrt{\frac{72 - 3a^2}{8}}, \qquad \text{gdzie } a \in \left(0,\, 2\sqrt{6}\right) \qquad \text{(uzasadnij to!)}$$

Wyznaczamy pole P przekroju w zależności od a:

$$P = \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{\frac{72 - 3a^2}{8}} = \frac{1}{8}\sqrt{72a^2 - 3a^4},$$

zatem

$$P(a) = \frac{1}{8}\sqrt{72a^2 - 3a^4}, \qquad D_P = \left(0,\, 2\sqrt{6}\right)$$

Ponieważ funkcja $y = \frac{1}{8}\sqrt{t}$, gdzie $t \in (0, +\infty)$, jest rosnąca, to funkcja P przyjmuje wartość największą dla takiego samego argumentu, jak funkcja $f(a) = 72a^2 - 3a^4$, gdzie $a \in \left(0,\, 2\sqrt{6}\right)$. Funkcja f jest ciągła i różniczkowalna.

Badamy pochodną funkcji f:

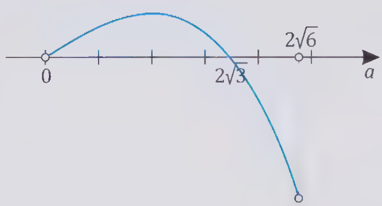
$$f'(a) = 12a\left(12 - a^2\right), \text{ gdzie } a \in \left(0,\, 2\sqrt{6}\right)$$

$$f'(a) = 0 \Leftrightarrow \left[a \in \left\{-2\sqrt{3},\, 0,\, 2\sqrt{3}\right\} \wedge a \in \left(0,\, 2\sqrt{6}\right)\right]$$

$$\Leftrightarrow a = 2\sqrt{3}$$

$$f'(a) > 0 \Leftrightarrow a \in \left(0,\, 2\sqrt{3}\right)$$

$$f'(a) < 0 \Leftrightarrow a \in \left(2\sqrt{3},\, 2\sqrt{6}\right)$$



Funkcja f jest rosnąca w przedziale $\left(0,\, 2\sqrt{3}\right\rangle$ i malejąca w przedziale $\left\langle 2\sqrt{3},\, 2\sqrt{6}\right)$. To znaczy, że dla argumentu $2\sqrt{3}$ funkcja f ma wartość największą, a tym samym funkcja P też w punkcie $2\sqrt{3}$ przyjmuje wartość największą.

Przekrój ostrosłupa daną płaszczyzną ma największe pole wówczas, gdy krawędź podstawy ostrosłupa ma długość $2\sqrt{3}$ cm.

Przykład 5.

Na kuli opisujemy stożki. Wykażemy, że objętość każdego z tych stożków nie jest mniejsza niż podwojona objętość danej kuli.

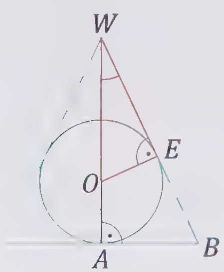
Założenie: R – promień kuli, V_K – objętość kuli, $V_K = \frac{4}{3}\pi R^3$

V – objętość stożka opisanego na kuli o promieniu R; $V = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot h$
r – promień podstawy stożka
h – wysokość stożka

Teza: $V \geqslant 2V_K$, czyli $V \geqslant \frac{8}{3}\pi R^3$

Dowód:

Wyznaczymy objętość V w zależności od h.
Przekrojem osiowym stożka jest trójkąt równoramienny, a przekrojem osiowym kuli – koło wpisane w ten trójkąt. Prowadzimy promień koła do punktu styczności z ramieniem trójkąta, jak na rysunku poniżej.



Na podstawie cechy (kkk) otrzymujemy, że

$\Delta OEW \sim \Delta BAW$, stąd

$$\frac{|OE|}{|AB|} = \frac{|WE|}{|AW|}$$

$$(*) \quad \frac{R}{r} = \frac{|WE|}{h}$$

Stosujemy twierdzenie Pitagorasa do wyznaczenia $|WE|$ w trójkącie ABW:

$$|WE|^2 = |OW|^2 - |OE|^2$$

$$|WE|^2 = (h - R)^2 - R^2$$

$$|WE| = \sqrt{h^2 - 2Rh}, \qquad \text{gdzie } h \in (2R, +\infty)$$

Z równości (*) wyznaczamy r^2:

$$\frac{R}{r} = \frac{\sqrt{h^2 - 2Rh}}{h}$$

$$\frac{R^2}{r^2} = \frac{h - 2R}{h},$$

zatem

$$r^2 = \frac{hR^2}{h - 2R}$$

Otrzymujemy objętość stożka jako funkcję zmiennej h:

$$V(h) = \frac{\pi R^2}{3} \cdot \frac{h^2}{h-2R} \qquad D_V = (2R, +\infty)$$

Funkcja V jest ciągła. Szukamy najmniejszej wartości funkcji V. W tym celu wyznaczamy pochodną funkcji V. Ułamek $\frac{\pi R^2}{3}$ jest stałą, wobec tego

$$V'(h) = \frac{\pi R^2}{3} \cdot \frac{h^2 - 4Rh}{(h-2R)^2} \qquad D_{V'} = D_V$$

$$V'(h) = 0 \Leftrightarrow h = 4R$$

Obliczamy wartość funkcji V w punkcie krytycznym $4R$ oraz granice funkcji V na końcach przedziału $(2R, +\infty)$:

$$V(4R) = \frac{\pi R^2}{3} \cdot \frac{16R^2}{4R-2R} = \frac{8\pi R^3}{3}$$

$$\lim_{h \to 2R^+} V(h) = \lim_{h \to 2R^+} \left(\frac{\pi R^2}{3} \cdot \frac{h^2}{h-2R} \right) = +\infty$$

$$\lim_{h \to +\infty} V(h) = \lim_{h \to +\infty} \left(\frac{\pi R^2}{3} \cdot \frac{h}{1 - \frac{2R}{h}} \right) = +\infty$$

Otrzymaliśmy, że najmniejszą wartością funkcji V jest liczba $\frac{8\pi R^3}{3}$, czyli

$V(h) \geqslant \frac{8\pi R^3}{3}$ dla $h \in D_V$, zatem

$V \geqslant 2V_K$, co kończy dowód.

Sprawdź, czy rozumiesz

1. Wśród stożków o tworzącej długości 4 znajduje się ten, który ma największą objętość. Wyznacz promień podstawy i wysokość tego stożka. Podaj jego objętość.
2. Szynka konserwowa ma być pakowana do puszek w kształcie walca o pojemności 128π cm^3. Obliczymy, jakie wymiary powinna mieć ta puszka, aby na jej wyprodukowanie zużyć jak najmniej blachy.
3. Rozważmy zbiór ostrosłupów prawidłowych czworokątnych, których każda krawędź boczna ma długość b. Dowolny ostrosłup z tego zbioru przecinamy płaszczyzną zawierającą krawędź boczną i wysokość bryły. Wykaż, że krawędź podstawy tego ostrosłupa, którego dany przekrój ma pole największe, jest równa b.
4. W kulę o promieniu $0{,}5\sqrt{10}$ wpisujemy prostopadłościany, których pola podstawy są równe 4. Wyznacz wymiary tego prostopadłościanu, który ma największą objętość.

Skorowidz ważniejszych terminów

Odpowiedzi do zadań

1. Funkcja wykładnicza i funkcja logarytmiczna

Potęga o wykładniku rzeczywistym – powtórzenie

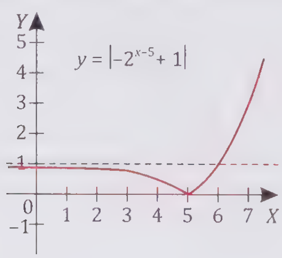
1. $265\frac{3}{8}$
2. $3^{\frac{19}{12}}$
3. $a < b$

Funkcja wykładnicza i jej własności

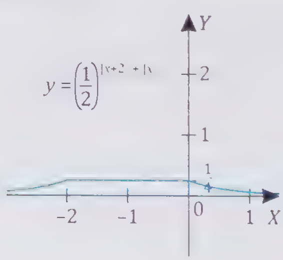
1. $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ $\quad f(-0{,}75) = \sqrt[4]{8}$
2. $l < m < n < k$
3. a) dodatnia b) ujemna c) ujemna d) dodatnia
5. 6
6. a) $\left\langle -6\frac{1}{4}, +\infty \right)$ b) $\left\langle \frac{1}{25}, 25 \right\rangle$

Przekształcenia wykresu funkcji wykładniczej. Rozwiązywanie zadań z zastosowaniem wykresów funkcji wykładniczych

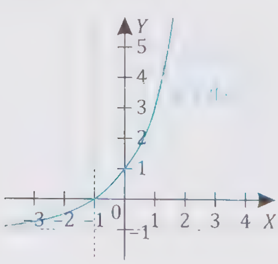
1. a)



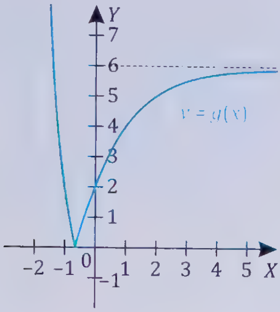
b)



2. a) $x \in \{0, 1\}$ b) $x \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$
3. $m \in (-2, 0) \cup (0, 2)$
4. $f(x) = 2^{x+1} - 1$



a)



b) $g(x) = |2^{2-x} - 6|$; $(0, 2)$

c) $m \in \left(-2\sqrt{2}, -2\right) \cup \left(2, 2\sqrt{2}\right)$

Równania wykładnicze

1. a) $x = \frac{1}{3}$ b) $x = 1$ c) $x = -1$
2. a) $x = 0{,}2 \vee x = 7$ b) $x = -1 \vee x = 3$
3. a) $x = 3$ b) $x = -2$
4. a) $x = 2$ b) $x = -1$

Nierówności wykładnicze

1. a) $x \in (-\infty, -4)$ b) $x \in (-\infty, 8\rangle$ c) $x \in (3{,}6, +\infty)$
2. a) $x \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$ b) $x \in \boldsymbol{R}$ c) $x \in \left\langle -4\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle$
3. a) $x \in (-\infty, 0)$ b) $x \in (-\infty, 1\rangle$
4. a) $x \in (-\infty, 2)$ b) $x \in (-\infty, 0\rangle$

Zastosowanie równań i nierówności wykładniczych w rozwiązywaniu zadań

1. $x = 2$
2. $x \in \boldsymbol{R}$
3. $x \in \left\langle -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{\pi}{3} + 2k\pi \right\rangle, k \in \boldsymbol{C}$
4. $m \in \left(-\infty, -\frac{2}{3}\right)$

Logarytm – powtórzenie wiadomości

1. -2
2. 8
3. $a = 2, b = 1;\quad b < a$

Funkcja logarytmiczna i jej własności

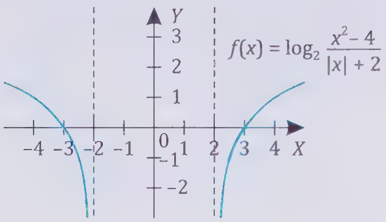
1. $y = x$
2. $y = \log_{\frac{2}{3}} x,\ x \in (0, +\infty)$

3. $x \in \left(3, \sqrt{10}\right) \cup \left(\sqrt{10}, +\infty\right)$

6. $\log_{\frac{1}{2}} 3, \log_5 \sqrt{6}, \log_5 6, \log_3 4, \log_2 3, \log_2 81$

Przekształcenia wykresu funkcji logarytmicznej. Rozwiązywanie równań, nierówności oraz układów równań z zastosowaniem wykresu funkcji logarytmicznej

1.



Wskazówka: $f(x) = \log_2(|x| - 2)$

$y = \log_2 x \xrightarrow{T_{\vec{u}=[2,\,0]}} f_1(x) = \log_2(x-2) \xrightarrow{y=f_1(|x|)} f(x) = \log_2(|x| - 2)$

2. 3

3. $x \in (-\infty, 2) \cup (6, +\infty)$

Równania logarytmiczne

1. a) 3 b) 25 c) 33

2. a) $x \in \left\{1\frac{1}{2}, 10\right\}$ b) $x \in \left\{3, 3+\sqrt{2}\right\}$

3. $x \in \left\{\frac{\sqrt[3]{9}}{9}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right\}$

4. 5

5. a) $x \in \left\{\frac{1}{\sqrt[3]{4}}, 8\right\}$ b) $x = 100$ c) $x = 4$ d) $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ e) $x \in \left\{\frac{1}{3}, 3, 9\right\}$ f) $x = 5$

6. a) $x = -4$ b) $x \in \left\{-6, -3\frac{1}{27}\right\}$

Nierówności logarytmiczne

1. a) $x \in \left(\frac{3}{2}, 3\right)$ b) $x \in (1, 2) \cup (3, 4)$

2. $x \in \left\langle\frac{1}{4}, 2\right\rangle$

3. $x \in (0, 1) \cup \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, 2\right)$

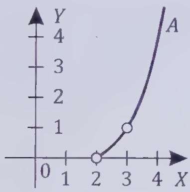
4. $x \in \left(0, \frac{1}{4}\right\rangle \cup \langle 4, +\infty)$

5. $x \in (0, 3^9\rangle$

Równania i nierówności logarytmiczno-wykładniczo-potęgowe

1. $x \in \left\{\frac{1}{3}, 3\right\}$
2. $x \in \left\{\frac{1}{3}, 9\right\}$
3. $x \in (-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$
4. $x \in (0, 10\rangle$

Zastosowanie równań i nierówności logarytmicznych w rozwiązywaniu zadań

1. $x \in \left(\frac{1}{9}, \sqrt{3}\right\rangle$
2. 

$A = \{(x, y) \colon y = (x-2)^2 \wedge x \in (2, 3) \cup (3, +\infty) \wedge y > 0\}$
3. $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \boldsymbol{C}$
4. $x = \log 3$ lub $x = \log 15$

Zastosowanie funkcji wykładniczej i funkcji logarytmicznej do rozwiązywania zadań umieszczonych w kontekście praktycznym

1. a) ok. 590 sztuk b) po 14 latach

2. Elementy analizy matematycznej

Powtórzenie i uzupełnienie wiadomości o granicach ciągów

2. 0

Obliczanie granic funkcji w punkcie

1. a) 5 b) 3 c) 2 d) $-\frac{2}{3}$
2. a) 6 b) 0 c) -4 d) $\frac{1}{4}$
3. 0

Granice jednostronne funkcji w punkcie

1. a) 0 b) $-\frac{1}{5}$ c) 0 d) 6

Granice funkcji w nieskończoności

2. a) 0 b) 2 c) 5
3. a) $-1{,}5$ b) 1 c) $-\sqrt{2}$

Granica niewłaściwa funkcji

1. a) $-\infty$ b) $+\infty$ c) $-\infty$
2. a) $+\infty$ b) $-\infty$ c) $-\infty$ d) $+\infty$ e) $-\infty$ f) $-\infty$
3. a) $+\infty$ b) $-\infty$ c) $+\infty$ d) $+\infty$ e) $+\infty$ f) $-\infty$

Ciągłość funkcji w punkcie

2. a) nie b) tak

Ciągłość funkcji w zbiorze

1. tylko funkcje f i g
2. $\left\langle -2\frac{1}{2}, -1\frac{3}{5} \right\rangle$

Asymptoty wykresu funkcji

1. a) $x = -4$ – asymptota pionowa prawostronna (lewostronna nie istnieje) b) nie istnieje asymptota pionowa prawostronna ani lewostronna c) $x = 1$ – asymptota pionowa lewostronna; $x = 1$ – asymptota pionowa prawostronna
2. a) $x = -5$ b) $x = -7$ c) $x = 2$
3. a) $y = 1$ – asymptota pozioma obustronna b) $y = 0$ – asymptota pozioma prawostronna (lewostronna nie istnieje) c) $y = -\frac{1}{2}$ – asymptota pozioma obustronna
4. a) $y = 3x - 6$ b) $y = -2x$ c) $y = -x + 3$
5. asymptoty pionowe obustronne: $x = \sqrt{3}$, $x = -\sqrt{3}$, asymptota pozioma obustronna: $y = 2$

Pochodna funkcji w punkcie

1. a) 4 b) 6 c) $-\frac{2}{9}$
2. $f'_{-}(2) = 4, f'_{+}(2) = -1$

Funkcja pochodna

1. a) $f'(x) = 3x^2 - 10x$ b) $f'(x) = \frac{-2}{x^2}$ 3 c) $-18x^5 + 8x^3 - 6x$ d) $\frac{-30x^3 + 15x^2}{(3x-1)^2}$

   e) $-3x^{-4} + 4x^{-5}$ f) $2 \cdot x^{-\frac{2}{3}} - \sqrt{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}}$
2. a) Wskazówka: funkcja nie jest ciągła w punkcie 0.

   b) Wskazówka: pochodne jednostronne w punkcie 1 są różne.
3. $f'(x) = \begin{cases} -x, & \text{jeśli } x \leqslant 1 \\ \frac{-1}{x^2}, & \text{jeśli } x > 1 \end{cases}$
4. $f'(x) = \begin{cases} -9x^2 + 6x, & \text{jeśli } x \in (-\infty, 1) \\ 9x^2 - 6x, & \text{jeśli } x \in (1, +\infty) \end{cases}$

Styczna do wykresu funkcji

1. $y=-4x-1$
2. dwie styczne: l_1: $y=-\frac{1}{3}x+2$, $P_1(3, 1)$ oraz l_2: $y=-\frac{1}{3}x-2$, $P_2(-3,-1)$
3. a) l_1: $y=2$, $P_1(0, 2)$ oraz l_2: $y=-2$, $P_2(2,-2)$ b) $Q_1(3, 2)$ oraz $Q_2(-1,-2)$
4. $y=x+1$

Pochodna funkcji a monotoniczność funkcji

2. a) funkcja rosnąca w przedziałach: $\left(-\infty, -\frac{1}{6}\right\rangle$, $\left\langle\frac{1}{2}, +\infty\right)$; funkcja malejąca w przedziale $\left\langle-\frac{1}{6}, \frac{1}{2}\right\rangle$

   b) funkcja rosnąca w przedziałach: $\left\langle-3, -\sqrt{5}\right\rangle$, $\left\langle\sqrt{5}, +\infty\right)$; funkcja malejąca w przedziałach: $\left(-\infty, -3\right\rangle$, $\left\langle-\sqrt{5}, \sqrt{5}\right\rangle$

   c) funkcja rosnąca w przedziałach: $(-\infty, -1\rangle$, $\langle 1, +\infty)$; funkcja malejąca w przedziałach: $\langle -1, 0)$, $(0, 1\rangle$

   d) funkcja malejąca w przedziałach: $(-\infty, -2)$, $(-2, 2)$, $(2, +\infty)$

Ekstrema lokalne funkcji

1. $f_{min}(-2)=0$, $f_{max}(1)=4$, $f_{min}(3)=-1$
   $g_{min}(-3)=g_{min}(-1)=g_{min}(1)=g_{min}(3)=0$, $g_{max}(-2)=g_{max}(2)=1$, $g_{max}(0)=3$
2. punkty krytyczne: $x_1=0$, $x_2=-1$, $x_3=2$; $f(0)$ – minimum lokalne; funkcja f nie ma ekstremum w punkcie -1; $f(2)$ – maksimum lokalne
3. punkty krytyczne: $x_1=-3$, $x_2=1$; $f(-3)$ – maksimum lokalne, $f(1)$ – minimum lokalne
4. a) punkty krytyczne: -2 oraz 1; $f_{max}(-2)=0$, $f_{min}\left(\frac{2}{3}\right)=-9\frac{13}{27}$

   b) punkty krytyczne: -2 oraz 2; $f_{min}(-2)=-30\frac{1}{3}$; funkcja f nie ma ekstremum w punkcie 2

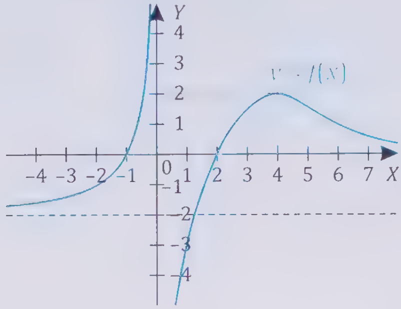
   c) punkty krytyczne: -7 oraz -3; $f_{max}(-7)=-9$, $f_{min}(-3)=-1$ d) punkt krytyczny: $\sqrt[3]{2}$; $f_{min}\left(\sqrt[3]{2}\right)=1{,}5\sqrt[3]{2}$
5. a) $f_{min}(0)=-3$ b) $f_{min}(2)=-8$, $f_{max}(4)=0$

Największa i najmniejsza wartość funkcji w przedziale

1. funkcja f przyjmuje wartość największą równą 8 (dla argumentu 2) i wartość najmniejszą równą -55 (dla argumentu 5)
2. funkcja f przyjmuje wartość największą równą 32 (dla argumentu -2) i wartość najmniejszą równą -16 (dla argumentu 2)
4. nie istnieje wartość najmniejsza; wartość największa funkcji f jest równa 0
5. funkcja f nie ma wartości największej; wartość najmniejsza jest równa 6 (przyjmowana dla argumentu 3)
6. a) $\left\langle-\frac{1}{2}, 6\right\rangle$ b) $(1, 3\rangle$

Badanie przebiegu zmienności funkcji

1. wykres przykładowej funkcji f



2.

x	$(-\infty, -3)$	-3	$(-3, 0)$	0	$(0, 3)$	3	$(3, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	–	X	+	0	–
$f(x)$	2 ↗	5 max lok	↘	0 min lok	↗	5 max lok	↘ 2

3. a) $D_f = \boldsymbol{R}$; brak asymptot

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 6)$	6	$(6, 9)$	9	$(9, +\infty)$
$f'(x)$	–	0	–	0	+	+	+
$f(x)$	$-\infty$ ↗	0 max lok	↘	-108 min lok	↗	0	↗ $+\infty$

b) $D_f = \boldsymbol{R} - \{1\}$; asymptota pionowa obustronna: $x = 1$; asymptota ukośna obustronna: $y = x + 1$

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 1)$	1	$(1, 2)$	2	$(2, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	–	X	–	0	+
$f(x)$	$-\infty$ ↗	0 max lok	↘ $-\infty$	X	$+\infty$ ↘	4 min lok	↗ $+\infty$

c) $D_f = \boldsymbol{R} - \{-1, 1\}$; asymptoty pionowe obustronne: $x = -1$ oraz $x = 1$; asymptota pozioma obustronna: $y = -1$

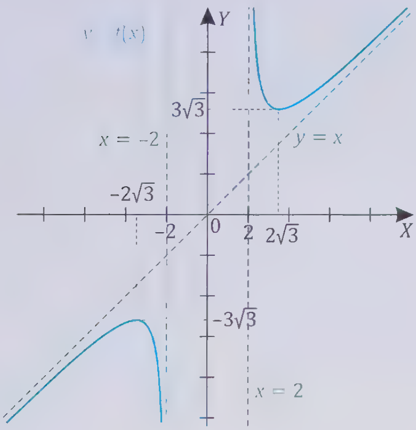
x	$(-\infty, -2)$	-2	$(-2, -1)$	-1	$(-1, 0)$	0	$(0, 1)$	1	$(1, 2)$	2	$(2, +\infty)$
$f'(x)$	+	+	+	X	+	0	–	X	–	–	–
$f(x)$	-1 ↗	0	↗ $+\infty$	X	$-\infty$ ↗	4 max lok	↘ $-\infty$	X	$+\infty$ ↘	0	↘ -1

d) $D = \boldsymbol{R} - \{0\}$; asymptota pionowa obustronna: $x = 0$; brak asymptot ukośnych

x	$(-\infty, -\sqrt[3]{2})$	$-\sqrt[3]{2}$	$(-\sqrt[3]{2}, 0)$	0	$(0, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	–	–	–	X	–	0	+
$f(x)$	$+\infty$ ↘	0	↘ $-\infty$	X	$+\infty$ ↘	3 min lok	↗ $+\infty$

4. $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 - 4}$, $D_f = (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$; funkcja nieparzysta; asymptota pionowa lewostronna $x = -2$; asymptota pionowa prawostronna: $x = 2$; asymptota ukośna: $y = x$

x	$(-\infty, -2\sqrt{3})$	$-2\sqrt{3}$	$(-2\sqrt{3}, -2)$	$\langle -2, 2 \rangle$	$(2, 2\sqrt{3})$	$2\sqrt{3}$	$(2\sqrt{3}, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	–	X	–	0	+
$f(x)$	$-\infty \nearrow$	$-3\sqrt{3}$ max lok	$\searrow -\infty$	X	$+\infty \searrow$	$3\sqrt{3}$ min lok	$\nearrow +\infty$



Zadania optymalizacyjne

1. ok. 106 km/h Koszty są sumą płacy kierowcy i kosztów paliwa; opisuje je funkcja $K(x) = d\left(\dfrac{80}{x} + \dfrac{x}{140}\right)$, $D_K = \langle 50, 140 \rangle$, gdzie d (stała) oznacza długość drogi (w km). Funkcja K przyjmuje najmniejszą wartość w punkcie $\sqrt{11\,200}$ ($\approx 105{,}8$).

3. Geometria analityczna

Wektor w układzie współrzędnych. Współrzędne środka odcinka

1. a) $m = -8$, $n = 3$ b) $m = \dfrac{2}{3}$, $n = -3$
2. $A(-2, 5)$
3. a) $A_1(4, 2)$ b) $B(1, 7)$
4. $P_1(-3, -4)$ $P_2(-1, -3)$ $P_3(1, -2)$ $P_4(3, -1)$
5. $S(-3, 2)$

Kąt między niezerowymi wektorami

1. $\cos\alpha = \dfrac{-\sqrt{10}}{10}$, $\cos\beta = \dfrac{13\sqrt{10}}{50}$, $\cos\gamma = \dfrac{4}{5}$

2. $a \in \{-2, 2\}$
3. $b \in \left\{\frac{4}{5}, 3\right\}$

Równanie kierunkowe prostej

1. a) $y = x + 2$ b) $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + 1 + \frac{\sqrt{3}}{3}$ c) $y = \sqrt{3}x + 1 + \sqrt{3}$
2. a) $y = -\sqrt{3}x + 2\sqrt{3} - 4$ b) $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x - \frac{\sqrt{3} - 21}{3}$ c) $y = -2x + 11$
3. $y = 2\frac{2}{5}x + 28$
4. $A(2, 3), B(2 + \sqrt{3}, 6), C(2 - \sqrt{3}, 6)$

Równanie ogólne prostej

1. a) $5x + 4y - 8 = 0$ b) $y + 5 = 0$ c) $x + 7 = 0$
2. $x + 3y - 15 = 0$ oraz $x = 0$

Kąt między prostymi

1. a) $135°$ b) $120°$
2. a) l: $2x - 3y + 330 = 0$ b) $3x + 2y - 200 = 0$
3. $m \in \left\{\frac{-1 - \sqrt{5}}{2}, \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}, 1\right\}$
4. $2\sqrt{3}, 2\sqrt{3}, 2\sqrt{3}, 4\sqrt{3}$

Odległość punktu od prostej. Odległość między dwiema prostymi równoległymi

1. $y = \frac{8}{15}x$ oraz $x = 0$
2. $7, \frac{31\sqrt{34}}{34}, \frac{217\sqrt{53}}{265}$
3. $1\frac{3}{5}$ oraz $2\sqrt{5}$
4. $99x - 27y - 23 = 0, \quad 21x + 77y + 3 = 0$
   Wskazówka: Każdy punkt dwusiecznej kąta jest równo odległy od ramion tego kąta.

Pole trójkąta. Pole wielokąta

1. a) $A(-2, 2), B(6, 0), C(2, 4)$
   b) $\cos\alpha = \frac{7\sqrt{85}}{85}, \cos\beta = \frac{5\sqrt{34}}{34}, \cos\gamma = -\frac{\sqrt{10}}{10}$
   c) $2(2\sqrt{2} + \sqrt{17} + \sqrt{5})$
   d) 12
2. 88
3. $B(2, 2), D(-6, -6)$

4. $B_1(0,-2)$, $B_2\left(-2\frac{26}{29},\ 5\frac{7}{29}\right)$, $B_3\left(6\frac{26}{29},\ \frac{22}{29}\right)$, $B_4(4, 8)$

Równanie okręgu. Nierówność opisująca koło

1. $(x+3)^2+(y-4)^2=25$
2. $S(5, 1)$, $r=\sqrt{7}$
3. $(x-1)^2+(y+3)^2=36$; pole pierścienia: 31π
4. $S(2a, b)$; $r=|4a-b|$
5. Zbiór A to koło o środku w punkcie $S_1(3, 1)$ i promieniu $r_1=2$, zaś zbiór B to koło o środku w punkcie $S_2(6, 5)$ i promieniu $r_2=4$
6. $(x-10)^2+(y+4)^2=97$; pole trójkąta: $291\sqrt{3}$

Wzajemne położenie prostej i okręgu. Styczna do okręgu

1. a) prosta jest rozłączna z okręgiem
   b) prosta jest sieczną okręgu
2. $(-2,-2)$
3. $m \in \left(-\sqrt{41},\ \sqrt{41}\right)$; prosta k jest styczna do okręgu, jeśli $m \in \{-4, 4\}$; sieczną okręgu, jeśli $m \in (-4, 4)$; rozłączna z okręgiem, jeśli $m \in \left(-\sqrt{41}, -4\right) \cup \left(4,\ \sqrt{41}\right)$
4. $y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x+\frac{9-8\sqrt{3}}{3}$, $y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x+\frac{9+8\sqrt{3}}{3}$
5. $2x-3y+24=0$, $17x-6y+9=0$

Wzajemne położenie dwóch okręgów

1. a) są rozłączne wewnętrznie b) przecinają się c) są styczne zewnętrznie
2. $m \in \left(-\infty,\ \frac{-7-2\sqrt{11}}{5}\right) \cup \left(\frac{-7+2\sqrt{11}}{5},\ +\infty\right)$
3. $(0,-2)$, $(6,-2)$
4. $y=-\frac{1}{2}x-1\frac{1}{2}$ oraz $y=2x-1\frac{1}{2}$

Jednokładność. Jednokładność w układzie współrzędnych

1. $A_2(25, 3)$, $B_2(15, 9)$, $C_2(19,-3)$, $P_{A_2B_2C_2}=48$

Zastosowanie analizy matematycznej w rozwiązywaniu zadań z geometrii analitycznej

2. $B(2, 2)$, $3\sqrt{5}$
3. $C\left(-\sqrt{6},\ \frac{\sqrt{6}}{2}\right)$

4. Kombinatoryka i rachunek prawdopodobieństwa

Reguła mnożenia i reguła dodawania

1. 20 odcinków
2. na 40 sposobów
3. a) na 72 sposoby b) na 32 sposoby c) na 6 sposobów d) na 16 sposobów

Wariacje

1. na 9 sposobów
2. a) na 10 000 sposobów b) na 5040 sposobów c) na 10 sposobów

Permutacje

1. a) 30 b) 696 c) 288 d) 90
2. 5040 liczb
3. 360 liczb
4. na 144 sposoby
5. na 24 sposoby
6. na 1152 sposoby

Kombinacje

1. a) 20 b) 42 c) 18 d) 10
3. a) 21 odcinków b) 35 trójkątów

Kombinatoryka – zadania różne

1. a) 6 kodów b) 6 kodów c) 12 kodów d) 3360 kodów
2. a) 648 liczb b) 90 liczb c) 300 liczb d) 240 liczb

Doświadczenie losowe

2. np. $\Omega = \{(O, O, O), (O, O, R), (O, R, O), (R, O, O), (R, R, O), (R, O, R), (O, R, R), (R, R, R)\}$.
3. np. Ω jest to zbiór wszystkich czterowyrazowych permutacji zbioru $\{A, B, C, D\}$.
4. np. Ω jest to zbiór wszystkich pięcioelementowych kombinacji zbioru złożonego z 52 kart.

Zdarzenia. Działania na zdarzeniach

1. A' – zdarzenie „nie wypadły dwie reszki"
   B' – zdarzenie „orzeł wypadł dwa lub trzy razy"
   C' – zdarzenie „co najmniej raz wypadła reszka".
2. $A \cap B$ – zdarzenie „suma wyrzuconych oczek jest liczbą dwucyfrową i w pierwszym rzucie wypadła mniejsza liczba oczek niż w drugim rzucie"
   $B - A$ – zdarzenie „w pierwszym rzucie wypadła mniejsza liczba oczek niż w drugim rzucie i suma wyrzuconych oczek nie jest liczbą dwucyfrową"
   $A \cup C$ – zdarzenie „suma wyrzuconych oczek jest liczbą dwucyfrową lub liczba oczek w drugim rzucie jest całkowitą wielokrotnością liczby oczek w pierwszym rzucie"
   $A \cap C$ – zdarzenie „suma wyrzuconych oczek jest liczba dwucyfrową i liczba oczek w drugim rzucie jest całkowitą wielokrotnością liczby oczek w pierwszym rzucie".

Określenie prawdopodobieństwa

1. tak
2. $P(B) = 0{,}75$ $P(A \cap B) = 0{,}35$ $P(B - A) = 0{,}4$

3. $P(A) = \frac{2}{3}$, gdzie A – zdarzenie „wypadła nieparzysta liczba oczek"

Prawdopodobieństwo klasyczne

1. $P(A) = \frac{1}{10}$ $P(B) = \frac{11}{90}$ $P(C) = \frac{2}{15}$ $P(D) = \frac{11}{45}$
2. 0,75
3. a) 0,1 b) 0,03
4. a) $\frac{1}{6}$ b) $\frac{5}{18}$
5. a) $\frac{15}{16}$ b) $\frac{5}{16}$

Doświadczenie losowe wieloetapowe

1. $P(A) = \frac{8}{27}$ $P(B) = \frac{20}{27}$
2. 0,8192
3. a) $\frac{1}{6}$ b) $\frac{4}{9}$

Prawdopodobieństwo warunkowe

1. 0,4
2. 0,6
3. $\frac{4}{7}$
4. a) $\frac{1}{13}$ b) $\frac{28}{325}$
5. 0,5

Twierdzenie o prawdopodobieństwie całkowitym

1. 0,54
2. $\frac{287}{300}$

Niezależność zdarzeń

1. tak
2. a) 0,42 b) 0,46

5. Elementy statystyki opisowej

Średnia z próby

1. a) 15,25 s b) 13,25 s c) 14 s
2. Pensjonat „Mewa"

Mediana z próby i moda z próby

1. a) $M_o = 4$, $M_e = 4$ b) $\overline{x} = 3\frac{10}{29}$ h

Wariancja i odchylenie standardowe

1. $\overline{x} \approx -7{,}2°$ $\sigma \approx 3{,}4°$ $M_o = -10°$ $M_e = -8°$
2. a) 6 ocen dobrych, 9 ocen dostatecznych b) $\sigma \approx 0{,}8$

6. Geometria przestrzenna

Płaszczyzny i proste w przestrzeni

1. a) 1 lub 3 b) 1 lub 3 c) 1 d) 4

Rzut równoległy na płaszczyznę. Rysowanie figur płaskich w rzucie równoległym na płaszczyznę

2. Nie dzieli, ponieważ wysokość rombu poprowadzona przez środek symetrii rombu nie dzieli boków rombu na połowy.

Prostopadłość prostych i płaszczyzn w przestrzeni. Rzut prostokątny na płaszczyznę

1. Wskazówka: Wykorzystaj fakt, że krawędź AB jest prostopadła do płaszczyzny (BCC_1B_1).
2. a) Nie, bo chociaż prosta BD jest prostopadła do prostej AC, to nie jest prostopadła do prostej OD_1, gdzie O jest punktem przecięcia przekątnych kwadratu $ABCD$ b) Tak, bo prosta A_1D jest prostopadła do prostej AD_1 oraz do prostej wyznaczonej przez środki odcinków AD_1 oraz BC_1.
3. Wskazówka: Wykaż, że prosta AC jest prostopadła do płaszczyzny (DBB_1D_1).
4. $|CS| = 9$ cm

Twierdzenie o trzech prostych prostopadłych

1. $P_{BDE} = 50\text{ cm}^2$. Wskazówka: Wykaż, że $|\sphericalangle BDE| = 90°$.
2. tak

Kąt między prostą a płaszczyzną. Kąt dwuścienny

1. a) 5 cm b) $5\sqrt{2}$ cm c) $5\sqrt{3}$ cm
2. a) 45° b) 90° c) ok. 64°
4. $\frac{\sqrt{6}}{6}$

Graniastosłupy

1. a) 13 cm b) $2\sqrt{6}$ cm
2. $a = 6$ cm, $h = 9$ cm
3. Wskazówka: Porównaj długości odcinków AC_1 oraz AB_1.
4. a) 45° b) 60°

Ostrosłupy

1. a) nie b) tak
2. 45°

3. 31,2 cm
4. 13 cm

Siatka wielościanu. Pole powierzchni wielościanu

1. $72\ \mathrm{cm}^2$
2. $600(1+2\sqrt{2})\ \mathrm{cm}^2$
3. $16(3+2\sqrt{3})\ \mathrm{dm}^2$
4. $6(10+\sqrt{10})\mathrm{cm}^2$
5. 4 cm

Objętość figury przestrzennej. Objętość wielościanów

1. $270\ \mathrm{cm}^3$
2. $a=2\ \mathrm{dm},\ h=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\ \mathrm{dm}$
3. $V=32\,000\ \mathrm{cm}^3$
4. $V=1797{,}5\ \mathrm{l}$

Przekroje wielościanów – zadania

2. tak
3. 36 cm, $54\sqrt{3}\ \mathrm{cm}^2$
4. $|D_1G|:|GC_1|=2:1 \qquad |B_1E|:|EB|=1:3$
   Wskazówka: Zauważ, że następujące trójkąty są podobne: ADH i FB_1E oraz ABE i GD_1H.
5. Wskazówka: Pięciokąt foremny nie ma ani jednej pary boków równoległych.

Bryły obrotowe. Pole powierzchni brył obrotowych

1. $42\pi\ \mathrm{cm}^2$ lub $56\pi\ \mathrm{cm}^2$
2. $\dfrac{P}{\pi}$
3. $50\pi(\sqrt{2}+1)\ \mathrm{cm}^2$
4. 216°
5. a) 3 cm b) 4 cm

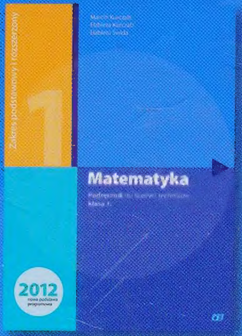
Objętość brył obrotowych

1. $\dfrac{5}{\pi}$ cm
2. a) $2000\pi\ \mathrm{cm}^3$ b) $1200\pi\ \mathrm{cm}^3$
3. 25 razy

Zastosowanie analizy matematycznej w rozwiązywaniu zadań z geometrii przestrzennej

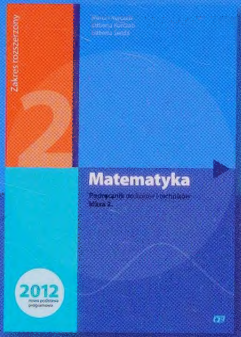
1. $r=\dfrac{4\sqrt{6}}{3},\quad h=\dfrac{4\sqrt{3}}{3},\quad V=\dfrac{128\sqrt{3}\pi}{27}$
2. wysokość puszki 8 cm, promień podstawy 4 cm
4. wymiary: $2, 2, \sqrt{2}$

Podręczniki **matematyki** do liceów i techników w zakresie rozszerzonym są zgodne z podstawą programową obowiązującą od września 2012 roku.



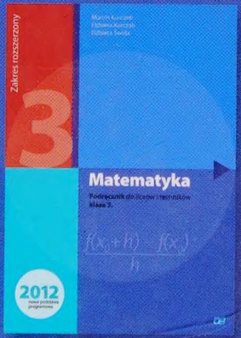
klasa 1.

Rozdział 1. Wprowadzenie do matematyki. Pojęcia podstawowe
Rozdział 2. Działania w zbiorach liczbowych
Rozdział 3. Wyrażenia algebraiczne
Rozdział 4. Geometria płaska – pojęcia wstępne
Rozdział 5. Geometria płaska – trójkąty
Rozdział 6. Trygonometria
Rozdział 7. Geometria płaska – pole koła, pole trójkąta
Rozdział 8. Funkcja i jej własności
Rozdział 9. Przekształcenia wykresów funkcji



klasa 2.

Rozdział 1. Funkcja liniowa
Rozdział 2. Funkcja kwadratowa
Rozdział 3. Geometria płaska – czworokąty
Rozdział 4. Geometria płaska – pole czworokąta
Rozdział 5. Wielomiany
Rozdział 6. Ułamki algebraiczne. Równania i nierówności wymierne. Funkcje wymierne
Rozdział 7. Ciągi
Rozdział 8. Trygonometria



klasa 3.

Rozdział 1. Funkcja wykładnicza i funkcja logarytmiczna
Rozdział 2. Elementy analizy matematycznej
Rozdział 3. Geometria analityczna
Rozdział 4. Kombinatoryka i rachunek prawdopodobieństwa
Rozdział 5. Elementy statystyki opisowej
Rozdział 6. Geometria przestrzenna

ISBN 978-83-7594-091-6
9 788375 940916

MAR3

www.pazdro.com.pl